

## 关于对无穷予以虚数形式标记的初步注释

阎 坤

西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061

**摘 要:** 给出对无穷予以虚数形式标记的初步讨论注释。

**关键词:** 无穷, 0, 虚数形式, 标记, 注释, Euler 公式

无穷是自然科学理论及现象描述中的重要概念及思想。下面通过 Euler 公式给出对无穷予以虚数形式标记的初步讨论注释。

这是一篇充满矛盾和脱漏、乃至错误及悖论的注释性短文。

取一常数  $s$  ( $s$ : spirit) 的正切值为

$$\tan s = i, \quad i = \sqrt{-1} \quad (1)$$

则常数  $s$  的最简洁表示形式为

$$s = \arctan i, \quad (2)$$

其一般形式为

$$s = n\pi + \arctan i, \quad (3)$$

式中  $n$  为自然数;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 。

由 (1) 式得

$$\tan s = \frac{\sin s}{\cos s} = i, \quad (4)$$

继而得

$$\tan^2 s = -1; \quad (5)$$

$$\sin s = i \cos s; \quad (6)$$

即有

$$\cos s + i \sin s = 0. \quad (7)$$

相对于几何, 方程 (1) 式或 (4) 式的简单表述是一角  $s$  的斜边、邻边、对边分别为 0、 $z$ 、 $zi$  的直角三角形; 这里  $z$  为复数,  $z \neq 0$ 。

根据 Euler 公式

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta; \quad (8)$$

对于 (8) 式, 当取  $\theta = s$  时, 结合方程 (7) 式得

$$\exp(is) = \exp(i \arctan i) = 0; \quad (9)$$

即有

$$i \arctan i = -\infty, \quad (10)$$

$$s = \arctan i = +\infty i. \quad (11)$$

方程 (9) ~ (11) 三式表明  $is$  是对负无穷大 ( $-\infty$ ) 予以虚数形式的标记。

一般地, 根据方程 (8) 式, 得

$$\exp(ii\theta) = \cos(i\theta) + i \sin(i\theta), \quad (12)$$

即

$$\exp(-\theta) = \cos(i\theta) + i \sin(i\theta), \quad (13)$$

$$\exp \theta = \cos(i\theta) - i \sin(i\theta); \quad (14)$$

得

$$\cos(i\theta) = 0.5[\exp \theta + \exp(-\theta)] = \cosh \theta, \quad (15)$$

$$\sin(i\theta) = 0.5i[\exp \theta - \exp(-\theta)] = i \sinh \theta, \quad (16)$$

$$\tan(i\theta) = \frac{\sin(i\theta)}{\cos(i\theta)} = i \frac{\exp \theta - \exp(-\theta)}{\exp \theta + \exp(-\theta)} = i \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} = i \tanh \theta. \quad (17)$$

当取  $i\theta = s$  时, 由方程 (17) 式得

$$\tan s = i \tanh(-is) = -i \tanh(is), \quad (18)$$

进而结合 (1) 式得

$$i = -i \frac{\exp(is) - \exp(-is)}{\exp(is) + \exp(-is)}; \quad (19)$$

解得表述形式

$$\exp(is) = \exp(i \arctan i) = 0, \quad (20)$$

即有

$$i \arctan i = -\infty, \quad (21)$$

$$s = \arctan i = +\infty i. \quad (22)$$

根据方程 (6) 式得

$$\cos^2 s + \sin^2 s = 0; \quad (23)$$

显然方程 (23) 式与下面已知恒等式方程

$$\cos^2 s + \sin^2 s = 1 \quad (24)$$

是不同的, 已经处在运算规则的边缘地带, 矛盾、错误及悖论隐约显现。

当依据方程 (24) 式时, 则结合方程 (5) 式可得

$$\frac{1}{\cos^2 s} = 1 + \tan^2 s = 0; \quad (25)$$

再结合 (15) 式得

$$\frac{1}{\cos^2 s} = \frac{1}{\cosh^2(is)} = \frac{1}{0.25[\exp(is) + \exp(-is)]^2} = 0, \quad (26)$$

即

$$\frac{4 \exp(-2is)}{[1 + \exp(-2is)]^2} = 0; \quad (27)$$

或

$$\frac{4 \exp(2is)}{[\exp(2is) + 1]^2} = 0. \quad (28)$$

由方程 (28) 式解得表述形式

$$\exp(is) = \exp(i \arctan i) = 0; \quad (29)$$

即有

$$i \arctan i = -\infty, \quad (30)$$

$$s = \arctan i = +\infty i. \quad (31)$$

方程 (9) ~ (11) 三式、方程 (20) ~ (22) 三式、方程 (29) ~ (31) 三式, 三组方程表述形式相同, 其仅是对无穷予以虚数形式的标记, 不改变无穷的原性质。

作为运算标记的初步讨论, 根据 (9) 式, 可得 0 的一种细化运算标记为

$$0 = \exp(is); \quad (32)$$

进而得

$$0^i = \exp(-s), \quad (33)$$

$$0^{-1} = \exp(-is), \quad (34)$$

$$0 \times 0^{-1} = \exp(is) \exp(-is) = 1, \quad (35)$$

$$\ln 0 = is; \quad (36)$$

或为

$$\ln 0 = i \arctan i; \quad (37)$$

其一般形式为

$$\ln 0 = (n\pi + \arctan i)i. \quad (38)$$

因  $\ln 1$  与  $\ln(-1)$  为已知表述, 则结合 (38) 式,  $\ln 1$ 、 $\ln 0$ 、 $\ln(-1)$  三者表述式的谱系即为

$$\ln 1 = 2n\pi i; \quad (39)$$

$$\ln 0 = (n\pi + \arctan i)i; \quad (40)$$

$$\ln(-1) = (2n+1)\pi i. \quad (41)$$

引入无穷的虚数形式标记, 会带来运算表述的差异, 诸如方程 (23) 式。其一方面, 对于任何  $\alpha$ , 皆有

$$\alpha^{-1} + (-\alpha^{-1}) = \alpha^{-1} - \alpha^{-1} = 0; \quad (42)$$

另一方面, 若

$$\alpha^{-1} - \alpha^{-1} = (1-1) \times \alpha^{-1} = 0 \times \alpha^{-1}, \quad \alpha^{-1} = 1 \times \alpha^{-1} \quad (43)$$

则有

$$\alpha^{-1} + (-\alpha^{-1}) = \alpha^{-1} - \alpha^{-1} = 0 \times \alpha^{-1} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 0 \\ 1, & \alpha = 0 \end{cases} \quad (44)$$

方程 (44) 式指出当 0 的乘法逆元等于  $0^{-1}$  时, 则  $0^{-1}$  的加法逆元不等于  $-0^{-1}$ 。这表明对无穷予以虚数形式标记推演能力较弱, 处于运算体系边缘, 乃至后面, 谬误及悖论开始呈现。

作为初步讨论, 在至为简略层面, 有区间运算方程

$$[a, a] + (a, a) = [a, a]; \quad (45)$$

$$[a, a] + (a, a) = [a, a]; \quad (46)$$

$$(a, a] + (a, a) = (a, a]; \quad (47)$$

$$[a, a] + (a, a) = [a, a]。 \quad (48)$$

若以实数区间长度论 0, 也即在相对维数  $D=1$  论 0 时, 如区间  $[a, b]$  的长度, 则有

$$[a, b]_{D=1} = b - a, \quad a \leq b \quad (49)$$

其中当  $a < b$  时

$$(a, b]_{D=1} = [a, b]_{D=1} = (a, b)_{D=1} = [a, b]_{D=1} = b - a; \quad (50)$$

以及当  $a = b$  时, 在大略轮廓层面上有

$$[a, a]_{D=1} = a - a = 0, \quad (51)$$

$$[a, a)_{D=1} = a - a = 0, \quad (52)$$

$$(a, a]_{D=1} = a - a = 0, \quad (53)$$

$$(a, a)_{D=1} = a - a = 0。 \quad (54)$$

而在相对维数  $D=0$  论 0 时, 如区间  $[a, b]$  的点数, 则有

$$[a, b]_{D=0} = +\infty, \quad a < b \quad (55)$$

以及当  $a = b$  时有大略轮廓层面上的可区分表述形式

$$[a, a]_{D=0} = 1, \quad (56)$$

$$[a, a)_{D=0} = 0.5, \quad (57)$$

$$(a, a]_{D=0} = 0.5, \quad (58)$$

$$(a, a)_{D=0} = 0; \quad (59)$$

即有

$$[a, a]_{D=0} > (a, a]_{D=0} > (a, a)_{D=0}, \quad [a, a]_{D=0} > [a, a)_{D=0} > (a, a)_{D=0}。 \quad (60)$$

统论之并兼顾细化层面, 若以相对维数  $D=0$  论 0 时, 则  $[a, a]_{D=0}$  有一个点, 没有邻域, 而在相对维数  $D=1$  时  $[a, a]_{D=1}$  有一个 0;  $(a, a]_{D=0}$  及  $[a, a)_{D=0}$  皆是不足一个点, 而在相对维数  $D=1$  时  $(a, a]_{D=1}$  及  $[a, a)_{D=1}$  则于细节层面上即为不到一个 0;  $(a, a)_{D=0}$  是彻底没有一个点, 在相对维数  $D=1$  时  $(a, a)_{D=1}$  则于细节层面上即完全没有 0; 即在细节层面上, 有

$$[a, a]_{D=1} > (a, a]_{D=1} > (a, a)_{D=1}, \quad [a, a]_{D=1} > [a, a)_{D=1} > (a, a)_{D=1}; \quad (61)$$

如此进一步地作为对可区分 0 的细化标记探讨, 现标记  $(a, a)_{D=1}$  为  $A$  ( $A: \text{anatta}$ ), 即

$$(a, a)_{D=1} = A; \quad (62)$$

则有隐含矛盾及悖论的具有小于 0 的非负数细化标记形式

$$0 > (a, a]_{D=1} > A, \quad 0 > [a, a)_{D=1} > A。 \quad (63)$$

较为一般地, 在相对维数  $D \geq 0$  时有兼顾大略轮廓及细化二个层面的通用表述为

$$[a, a]_{D \geq 0} \geq (a, a]_{D \geq 0} \geq (a, a)_{D \geq 0}, \quad [a, a]_{D \geq 0} \geq [a, a)_{D \geq 0} \geq (a, a)_{D \geq 0}。 \quad (64)$$

这在基本描述上又近似地回到了众所周知的“0”是由印度学者于公元 6 世纪前后从用黑点“·”标记逐渐演变普及 (如 Brahmagupta 的历算书) 而来的一支历史发展脉络中。

依据方程 (34)、(63) 二式可初步得关于对无穷予以标记的延伸表述

$$A^{-1} > (a, a]_{D=1}^{-1} > \exp(-is), \quad A^{-1} > [a, a]_{D=1}^{-1} > \exp(-is). \quad (65)$$

分析表明, 虽然 (2)、(62) 二式中的  $s$ 、 $A$  源出于虚数、实数, 能够参与部分运算, 但由于不完全具有一般虚数、实数的性质, 故其都只是与 0 或无穷紧密联系的似数标记。

数学发展到今天, 机械论的内核思想仍然在起着主导作用, 并在未来的一段时期仍将继续下去。机械论思想有其显著的直观朴素的优势, 拆解重组、变换叠加、进退有据。

考虑先暂时放下目前测度论等相关研究结论, 初步给出一显著偏离目前主流数学研究框架、几乎充满脱漏 (乃至极端偏差) 并较为直接朴素的探讨方向, 为已有理论提供微许并行支持, 为未来理论提供点滴构造参考; 其中内容若前人已有相关类似的严谨研究结论, 则宜以前人表述的严谨结论为主。

### A 引入点的近零动态邻域概念

点作为位置抽象, 诸多点的排列累积仍不具有线的整体属性, 也即是, 线在包含点的机械静态集合之外, 还具有点的机械静态集合所完全不具有的特性, 即使是趋于无穷小的线段微元仍然具有点的静态集合所不能完全表示的作为线的性质。

引入点的近零动态邻域等特征, 或是进一步深入刻画点与线关系的途径之一。

点的近零动态邻域定义: 每一数值空间点, 都有其趋近于零的动态邻域。

点的近零动态邻域的部分性质:

a 点的近零动态邻域为点本身所动态覆盖;

b 相邻点的近零动态邻域具有叠加性。

如此, 线是由诸点通过在其近零动态邻域的叠加排列构成; 当然, 无论如何, 线仍然具有诸点排列所不能完全替代的部分特征, 这是层面变化导致的差别。

这一概念的显著缺陷为, 没有进一步给出点的近零动态邻域构成、性质, 点如何动态覆盖, 及相邻点如何在邻域叠加等内容。

### B 临界自然数的性质

一般地, 描述数据量一是有界、有限数, 即总是小于或等于预先给定的任意确定数; 二是无穷大, 即总是大于预先给定的任意确定数; 三是 Cantor 的超限数, 即大于所有有限数, 但不必定绝对无限的基数 (以能够有效进行多个“无穷大”量之间的比较)。

临界自然数概念类似于超限数, 旨在描述介于有限数与无穷大之间的数据量或数值状态。

临界自然数定义为总是远大于预先给定的任意大的有限或有界确定数, 同时亦总是小于无穷大。

取预先给定任意确定数为  $M_p$ , 则临界自然数  $N_C$  为

$$M_p \ll N_C < +\infty. \quad (66)$$

临界自然数  $N_C$  总是小于无穷大, 是因为趋于无穷大时, 原来描述层面及其性质将发生变化。

### C 任何二个不同的有理数点之间都有临界 $N_C$ 个有理数点, 细化构造具有近似分形特征。

朴素简洁地, 直接以实数  $x$  轴为例, 取任意二个不同的有理数  $r_S$ 、 $r_E$  的区域  $[r_S, r_E]$ , 则有诸有理数点  $r_j$  为

$$r_j = \frac{(n-j)r_S + jr_E}{n}, \quad j=1 \text{ to } n-1 \quad (67)$$

式中  $n$ 、 $j$  为自然数,  $n \geq 2$ 。

当  $n$  为任何有限的自然数时,  $r_j$  皆为有理数点; 当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $r_j$  的性质则趋向于无理数点; 即只要  $n$  小于无穷大, 则在任意二个不同的有理数点之间, 都有仅小于无穷大个有理数点。进一步细化, 在这  $n$  个有理数点中任何二个相邻的有理数点之间, 仍然具有小于无穷大个有理数点; 如此  $N_C$  次嵌套, 则细化后的有理数点数量超过任意预先给定的确定数; 但若嵌套次数趋于无穷大, 则有理数点的性质将向无理数点转化; 即得在任意二个不同的有理数点之间, 都有  $N_C$  个有理数点; 此细化过程诸层次第嵌套, 具有近似分形构造特征。

### D 任何二个不同的无理数点之间都有 $N_C$ 个有理数点, 有理数点作为分隔点较为孤立。

仍然简洁地, 以实数  $x$  轴为例, 取任意二个不同的无理数  $I_S$ 、 $I_E$ , 其构成的区间为  $[I_S, I_E]$ , 有区间间隔

$$\Delta I = I_E - I_S > 0; \quad (68)$$

即可在区域 $[I_S, I_E]$ 中生成有理数点 $r_{IS}$ 、 $r_{IE}$ 的区域 $[r_{IS}, r_{IE}]$

$$r_{IS} = \text{dtru}[I_S + a^{-1}\Delta I], \quad (69)$$

$$r_{IE} = \text{dtru}[I_E - a^{-1}\Delta I]; \quad (70)$$

这里系数 $a > 2$ 为实数,  $\text{tru}[\bullet]$ 为对数值的有限项截断取值,  $\text{dtru}[\bullet]$ 为若干不同数值的有限项差别截断取值; 一般在显著差别时可考虑取实数 $a \geq 2.5$ , 有

$$I_E - a^{-1}\Delta I > I_S + a^{-1}\Delta I. \quad (71)$$

有限项差别截断取值即是保证截断后生成的有理数点 $r_{IS}$ 、 $r_{IE}$ 与 $I_S$ 、 $I_E$ 满足如下关系

$$r_{IS} > I_S, \quad r_{IE} < I_E, \quad r_{IS} < r_{IE}; \quad (72)$$

即是在任何二个不同的无理数点构成的区间内, 都存在有理数点构成的区间。

因有理数点 $r_{IS}$ 、 $r_{IE}$ 的区域 $[r_{IS}, r_{IE}]$ 中含有 $N_C$ 个有理数点, 所以在其外延的无理数 $I_S$ 、 $I_E$ 的区间 $[I_S, I_E]$ 中包含有 $N_C$ 个有理数点。

在与无理数点进行近零动态邻域相叠加的相邻数据点, 具有无理数点的较大成分特征, 然后无理数点特征的成分逐渐减弱, 次第过渡到有理数点, 由有理数点分隔无理数点的影响区域; 也即, 与无理数点的特征区域相比较, 有理数点作为无理数点影响区域之间的分隔点, 较为孤立; 与此直接等效的结论是, 无理数点的近零动态邻域大于有理数点的近零动态邻域, 其几乎直接支持无理数点比有理数点稠密的论述。

### E 展望函数阶(或函数维)微积分及其几何意义

截止到目前, 诸多数学成就高峰中, 微积分的思想和成就仍然是数学的峰巅之一, 为诸多分支方向提供了参考框架, 若结合点的近零动态邻域构造等内容进一步给出函数阶(或函数维)微积分形式及其几何意义, 则将为诸如真空背景及其能量形式、质量来源及其分布间隙、粒子生成及湮灭等更广泛的自然现象演化过程提供更强有力的描述途径。

仍需指出, 上述内容存在着诸多矛盾、脱漏, 乃至错误及悖论, 并不是严谨的数学解析论述, 其阐释过程及初步结论的极端出格乃至明显谬误之处谨供偶有闲暇时随依清风抚卷会心一笑。

数学理论内涵包括几何思想代数表示, 代数思想几何表示; 即代数思想几何化, 几何思想代数化; 变换, 映射; 0 和无穷, 1 和*i*。在进行自然现象描述时, 简化为函数, 微分, 积分; 动力学系统表现形式则为激励、演化、守恒三位一体。其中, 无穷这一动态概念及思想贯穿始终, 构造与悖论相互交织包含、转化促进。

在现象演化过程, 0 亦表示相互作用及自持续的动态平衡。在一般大略方面, “0”乃“无”之占位符, 意有“无”; 若无“无”, 则亦不需“0”出现, 等等; 如此涉入言辞嵌套递进过程。无穷弥于无穷之外, 含摄于 0 之内, 介于可言与不可言之间, 隐现于由科学思想导入智慧义趣之中。在自然远景方向, 对物理学、数学等领域做出根本贡献, 从现象、思想、真性起善至一切智、道种智、一切种智。一表观描述是, 现象界真空的无穷层面背景近于 Newton 绝对空间, 绝对空间的无穷层面背景趋于 Siddhartha 法界; 法界圆融, 远超越数理逻辑及言语意识。如是浩繁著述多为理解自然图景所引入的中间参量或辅助线。旷劫沙等恒河沙世界, 刹那流迁微尘中微尘。

给无穷予以标记及适当讨论注释, 对无穷之间的初步关联分析仅具有基本意义。

非线性科学研究所成立 12 周年纪念  
2009 年 03 月 18 日, 北京

## Primary annotation of symbol basing on imaginary form about infinity

YAN Kun ([yankun@nature.ac.cn](mailto:yankun@nature.ac.cn))

Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China

**Abstract** In this paper, primary annotation of symbol basing on imaginary form about infinity is given.

**Keywords** infinity, zero, imaginary form, symbol, annotation, Euler's formula

Date :

Analysis :