YAN Kun. Primary annotation of symbol basing on imaginary form about infinity[R]. Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 18 March 2009.

关于对无穷予以虚数形式标记的初步注释

阎 坤
西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061

摘 要：给出对无穷予以虚数形式标记的初步讨论注释。

关键词：无穷，0，虚数形式，标记，注释，Euler 公式

无穷是自然科学理论及现象描述中的重要概念及思想。下面通过 Euler 公式给出对无穷予以虚数形式标记的初步讨论注释。

根据 Euler 公式

$$\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta\,,\quad i=\sqrt{-1} \tag{1}$$

当取

$$\tan s=\frac{\sin s}{\cos s}=i\,,\qquad (s=\mathrm{spirit}) \tag{2}$$

时，则得

$$\tan^2 s=-1\text{。} \tag{3}$$

由方程（2）式记常数

$$s=\arctan i\text{。} \tag{4}$$

一般地，常数 s 可表示为

$$s=n\pi+\arctan i\,, \tag{4A}$$

式中 $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$。

相对于几何，方程（4）式的简单表述是一角 s 的斜边、邻边、对边分别为 0、1、i 的直角三角形。

依据（2）式得

$$\sin s=i\cos s\,, \tag{5}$$

$$\cos s+i\sin s=0\text{；}$$

进而根据（1）式得

$$\exp(is)=\cos s+i\sin s=0\,, \tag{6}$$

$$is=-\infty\,, \tag{7}$$

$$s=\arctan i=+\infty i\text{。} \tag{8}$$

方程（6）～（8）三式表明 is 是对负无穷大（$-\infty$）予以虚数形式的标记。

一般地，根据方程（1）式，得

$$\exp(ii\theta)=\cos(i\theta)+i\sin(i\theta)\,,$$

即

$$\exp(-\theta)=\cos(i\theta)+i\sin(i\theta)\,,$$

$$\exp\theta=\cos(i\theta)-i\sin(i\theta)\text{；}$$

得

$$\cos(i\theta)=0.5[\exp\theta+\exp(-\theta)]=\cosh\theta\,, \tag{9}$$

$$\sin(i\theta)=0.5i[\exp\theta-\exp(-\theta)]=i\sinh\theta\,, \tag{10}$$

$$\tan(i\theta)=\frac{\sin(i\theta)}{\cos(i\theta)}=i\frac{\exp\theta-\exp(-\theta)}{\exp\theta+\exp(-\theta)}=i\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}=i\tanh\theta\text{。} \tag{11}$$

依据方程（2）、（11）二式，当 $i\theta=s$ 时，得

$$\tan s=-i\tanh(is)\,,$$

$$i=-i\frac{\exp(is)-\exp(-is)}{\exp(is)+\exp(-is)}\text{；}$$

解得（6）～（8）三式

$$\exp(is)=0\text{，}\tag{6A}$$

$$is=-\infty\text{，}\tag{7A}$$

$$s=\arctan i=+\infty i\text{。}\tag{8A}$$

根据方程（5）式得

$$\cos^2 s+\sin^2 s=0\text{。}\tag{12}$$

方程（12）式与下面方程

$$\cos^2 s+\sin^2 s=1$$

是不同的。

当依据方程

$$\cos^2 s+\sin^2 s=1$$

时，则由方程（3）式得

$$\frac{1}{\cos^2 s}=1+\tan^2 s=0\text{；}$$

再结合（9）式得

$$\frac{1}{\cos^2 s}=\frac{1}{\cosh^2(is)}=\frac{1}{0.25[\exp(is)+\exp(-is)]^2}=0\text{，}$$

即

$$\frac{4\exp(-2is)}{[1+\exp(-2is)]^2}=0\text{，}\tag{13}$$

或

$$\frac{4\exp(2is)}{[\exp(2is)+1]^2}=0\text{。}\tag{14}$$

由方程（14）式解得（6）～（8）三式

$$\exp(is)=0\text{，}\tag{6B}$$

$$is=-\infty\text{，}\tag{7B}$$

$$s=\arctan i=+\infty i\text{。}\tag{8B}$$

方程（6）～（8）三式仅是对无穷予以虚数形式的标记，不改变无穷的原本性质。

根据（6）式得

$$0=\exp(is)\text{；}\tag{15}$$

进而得

$$0^i=\exp(-s)\text{，}\tag{16}$$

$$0^{-1}=\exp(-is)\text{，}\tag{17}$$

$$0\times 0^{-1}=\exp(is)\exp(-is)=1\text{，}\tag{18}$$

$$\ln 0=is\text{。}\tag{19}$$

方程（19）式

$$\ln 0=is=(n\pi+\arctan i)i\text{，}\tag{19A}$$

使$\ln 0$类于下面二式的表述形式

$$\ln 1=2n\pi i\text{，}$$

$$\ln(-1)=(2n+1)\pi i\text{。}$$

引入无穷的虚数形式标记，会带来运算表述的差异，诸如方程（12）式。其一方面，对于任何α，皆有

$$\alpha^{-1}+(-\alpha^{-1})=\alpha^{-1}-\alpha^{-1}=0\text{；}\tag{20}$$

另一方面，若

$$\alpha^{-1}-\alpha^{-1}=(1-1)\times\alpha^{-1}=0\times\alpha^{-1}, \quad \alpha^{-1}=1\times\alpha^{-1} \tag{21}$$

则有

$$\alpha^{-1}+(-\alpha^{-1})=\alpha^{-1}-\alpha^{-1}=0\times\alpha^{-1}=\begin{cases}0, & \alpha\neq 0\\ 1, & \alpha=0\end{cases} \tag{22}$$

方程（22）式指出当0的乘法逆元等于0^{-1}时，则0^{-1}的加法逆元不等于-0^{-1}。这表明对无穷予以虚数形式标记推演能力较弱，处于运算体系边缘，乃至于后面，是远不完备的。

作为初步讨论，在至为简略层面，若以实数区间长度论0，如区间$[a,b]$的长度，则有

$[a,b]=b-a$，$a\le b$

其中当$a<b$时

$(a,b]=[a,b)=(a,b)=[a,b]=b-a$；

以及当$a=b$时

$[a,a]=a-a=0$；

$$[a,a)+(a,a]=[a,a], \quad [a,a)+(a,a)=[a,a), \quad (a,a]+(a,a)=(a,a]。 \tag{23}$$

因方程（23）式试图探讨比$[a,a]$或0要小的非负数标记，故当由$[a,a)+(a,a]=[a,a]$给出$[a,a)=[a,a]-(a,a]$时，尚需保留$[a,a]$或0的运算位置，不宜简记为$[a,a)=-(a,a]$。

现标记(a,a)为A（$A=\text{anatta}$），即

$$(a,a)=A; \tag{24}$$

则有如下小于等于0的非负数形式细化表示

$$0\ge(a,a]>A, \quad 0\ge[a,a)>A; \tag{25}$$

乃至小于0的非负数形式进一步细化表示

$$0>(a,a]>A, \quad 0>[a,a)>A。 \tag{26}$$

上式意指若以点论0，则$[a,a]$是有一个点，没有邻域，即为有一个0；$(a,a]$及$[a,a)$皆是不足一个点，似有若无，即为不到一个0；(a,a)是彻底没有一个点，即完全没有0。

这在基本描述上又近似地回到了众所周知的“0”是由印度学者于公元 6 世纪前后从用黑点“·”标记逐渐演变普及（如 Brahmagupta 的历算书）而来的一支历史发展脉络中。

依据方程（17）、（26）二式可初步得关于对无穷予以标记的延伸表述

$$A^{-1}>(a,a]^{-1}>\exp(-is), \quad A^{-1}>[a,a)^{-1}>\exp(-is)。 \tag{27}$$

分析表明，虽然（4）、（24）二式中的s、A源出于虚数、实数，能够参与部分运算，但由于不完全具有一般虚数、实数的性质，故其都只是与0或无穷紧密联系的似数标记。

仍需指出，上述内容存在着诸多矛盾及脱漏，并不是严谨的数学论述，其阐释过程及初步结论的极端出格之处谨供偶有闲暇时随依清风抚卷会心一笑。

数学理论内涵包括几何思想代数表示，代数思想几何表示；变换，映射；0 和无穷，1 和i。在进行自然现象描述时，简化为函数，微分，积分；动力学系统表现形式则为激励，演化，守恒。其中，无穷这一动态概念及思想贯穿始终。

在现象演化过程，0 亦表示相互作用及自持续的动态平衡。在一般大略方面，“0”乃“无”之占位符，意有“无”；若无“无”，则亦不需“0”出现，等等；如此涉入言辞嵌套递进过程。无穷弥于无穷之外，含摄于 0 之内，介于可言与不可言之间，隐现于由科学思想导入智慧义趣之中。在自然远景方向，对物理学、数学等领域做出根本贡献，从现象、思想、真性起善至一切智、道种智、一切种智。一表观描述是，现象界真空的无穷层面背景近于 Newton 绝对空间，绝对空间的无穷层面背景趋于 Siddhartha 法界；法界圆融，远超越数理逻辑及言语意识。如是浩繁著述多为理解自然图景所引入的中间参量或辅助线。旷劫沙等恒河沙世界，刹那流迁微尘中微尘。

给无穷予以标记及适当讨论注释，对无穷之间的初步关联分析仅具有基本意义。

非线性科学研究所成立 12 周年纪念

2009 年 03 月 18 日，北京

Primary annotation of symbol basing on imaginary form about infinity

YAN Kun (yankun@nature.ac.cn)
Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China

Abstract In this paper, the primary annotation of symbol basing on imaginary form about infinity is given.
Keywords infinity, zero, imaginary form, symbol, annotation, Euler's formula

---

Date ：

Analysis ：