关于对线性递推数列的初等注释

线性递推数列是典型简明的数据序列，历史上诸多学者对数列性质进行了深入分析探讨及应用研究，其中如 Fibonacci 数列等自扩展形式较具有代表性，以 Binet 通项公式分析方法具有经典意义；本短文即是对一元常系数线性递推数列概要一个初等朴素的注释性介绍。

关键词：线性，递推数列，自扩展，初等数学，特征方程，Fibonacci 数列，Binet 通项公式

Elementary annotation about properties of linear recurrence sequence

Keywords linear, recurrence sequence, self-expanding form, elementary mathematical method, characteristic equation, Fibonacci sequence(Fibonacci numbers or Fibonacci series), Binet's formula for general term

1 一阶线性递推数列

一阶线性递推数列形式为

$$F_{n+1} = aF_n + b, \tag{1}$$

式中 a 、b 为常系数，n 为自然数；F_1 为已知量。

以下内容中的线性递推数列皆指一元常系数线性递推数列。

当 $a = 0$ 时，方程（1）式的数列为常数序列，通项公式为

$$F_n = b;$$

当 $a = 1$ 时，方程（1）式的数列为等差序列

$$F_{n+1} - F_n = b,$$

通项公式为

$$F_n = F_1 + b(n-1) = F_1 - b + bn 。$$

当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时，引入待定参数 c 、d ，使得下式的等比序列成立

$$F_{n+1} - c = d(F_n - c), \tag{2}$$

得

$$F_{n+1} = dF_n - c(d-1), \tag{3}$$

及该序列的通项公式为

$$F_n - c = (F_1 - c)d^{n-1} 。 \tag{4}$$

由方程（1）、（3）二式得

$$\begin{cases} d = a, \\ c(d-1) = -b; \end{cases} \tag{5}$$

即有数列的特征方程为

$$d = a, \tag{6}$$

及解得

$$c = \frac{b}{1-a}; \tag{7}$$

由方程（4）、（6）、（7）三式得数列（1）式在 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时的通项公式为

$$F_n = \frac{1}{a}\left[F_1 - \frac{b}{1-a}\right]a^n + \frac{b}{1-a} 。 \tag{8}$$

2 二阶线性递推数列与 Fibonacci 数列

二阶线性递推数列形式为

$$F_{n+2} = aF_{n+1} + bF_n \text{，} \tag{9}$$

式中常数 $a \neq 0$ 、$b \neq 0$ ，$F_{1,2}$ 为已知量。

仍然引入待定参数 c 、 d ，使得下面等比序列成立

$$F_{n+2} - cF_{n+1} = d(F_{n+1} - cF_n) \text{；} \tag{10}$$

得

$$F_{n+2} = (c+d)F_{n+1} - cdF_n \text{，} \tag{11}$$

及通项公式为

$$F_{n+1} - cF_n = (F_2 - cF_1)d^{n-1} \text{。} \tag{12}$$

由方程（9)、(11）二式得

$$\begin{cases} c + d = a, \\ cd = -b; \end{cases} \tag{13}$$

故有数列的特征方程为

$$d^2 = ad + b \text{，} \tag{14}$$

或

$$d^2 - ad - b = 0 \text{；}$$

解得

$$d_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \text{，} \tag{15}$$

$$c_{1,2} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \text{。} \tag{16}$$

根据方程（15)、(16）二式，当 $a^2 + 4b = 0$ 时，有

$$a^2 = -4b \text{，} \quad d = d_1 = d_2 = \frac{a}{2} \text{，} \quad c = c_1 = c_2 = \frac{a}{2} \text{。}$$

因 $d = c = 0.5a$ ，则将方程（12）式二边同时除以 d^{n+1} ，得等差数列

$$\frac{F_{n+1}}{d^{n+1}} - \frac{F_n}{d^n} = \frac{F_2 - dF_1}{d^2} \text{，} \tag{17}$$

此等差数列通项公式为

$$\frac{F_n}{d^n} = \frac{F_1}{d} + \frac{F_2 - dF_1}{d^2}(n-1) \text{；} \tag{18}$$

即由方程（18）式得数列（9）式当 $a^2 + 4b = 0$ 时的通项公式为

$$F_n = \frac{4}{a^2}\left[aF_1 - F_2 + \left(F_2 - \frac{a}{2}F_1\right)n\right]\left(\frac{a}{2}\right)^n \text{。} \tag{19}$$

将方程（19）式表示为

$$F_n = [B_1 + B_2 n]d^n \text{，} \tag{20}$$

式中待定常数 $B_{1,2}$ 可由下面方程求出

$$[B_1 + B_2 p]d^p = F_p \text{，} \qquad p = \text{from } 1 \text{ to } 2 \text{ 。} \tag{21}$$

当$a^2+4b\neq 0$时，由方程（15）、（16）二式得

$d_1\neq d_2$，

$c_1\neq c_2$；

故由方程（12）、（15）、（16）三式得

$$F_{n+1}-c_1F_n=(F_2-c_1F_1)d_1^{n-1}, \tag{22}$$

$$F_{n+1}-c_2F_n=(F_2-c_2F_1)d_2^{n-1}。 \tag{23}$$

将方程（22）、（23）二式相减消去F_{n+1}项得

$$(c_2-c_1)F_n=(F_2-c_1F_1)d_1^{n-1}-(F_2-c_2F_1)d_2^{n-1},$$

故得通项公式

$$F_n=\frac{(F_2-c_1F_1)}{d_1(c_2-c_1)}d_1^n-\frac{(F_2-c_2F_1)}{d_2(c_2-c_1)}d_2^n \quad , \tag{24}$$

此式中

$$c_2-c_1=\sqrt{a^2+4b}\ 。$$

将方程（24）式表示为

$$F_n=B_1d_1^n+B_2d_2^n \quad , \tag{25}$$

式中待定常数$B_{1,2}$可由下面方程求出

$$B_1d_1^p+B_2d_2^p=F_p \quad , \quad p=\text{from 1 to 2} \quad 。 \tag{26}$$

当$a^2+4b<0$时，方程（15）、（16）二式成为

$$d_{1,2}=\sqrt{-b}[\cos\theta\pm i\sin\theta], \tag{27}$$

$$c_{1,2}=\sqrt{-b}[\cos\theta\mp i\sin\theta], \tag{28}$$

式中

$$i=\sqrt{-1}\ , \quad \theta=\arctan\frac{\sqrt{-(a^2+4b)}}{a}\ ;$$

则由方程（24）式及 Euler 公式

$$\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$$

得数列（9）式在$a^2+4b<0$时的通项公式为

$$F_n=[\phi_1\cos(n\theta)+i\phi_2\sin(n\theta)](\sqrt{-b})^n, \tag{29}$$

式中

$$\phi_1=\frac{(F_2-c_1F_1)}{d_1(c_2-c_1)}-\frac{(F_2-c_2F_1)}{d_2(c_2-c_1)} \quad ,$$

$$\phi_2=\frac{(F_2-c_1F_1)}{d_1(c_2-c_1)}+\frac{(F_2-c_2F_1)}{d_2(c_2-c_1)} \quad ,$$

$$c_2-c_1=2i\sqrt{-b}\sin\theta\ 。$$

方程（29）式中的待定常数$\phi_{1,2}$也可由下面方程求出

$$[\phi_1\cos(p\theta)+i\phi_2\sin(p\theta)](\sqrt{-b})^p=F_p, \quad p=\text{from 1 to 2} \quad 。 \tag{30}$$

下面概要性介绍 Fibonacci 数列。

当$a=b=1$、$F_1=F_2=1$时，数列（9）式为 Fibonacci 数列

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, \tag{31}$$

由方程（15)、(16)、(24）三式得

$$d_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\quad c_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2},\ c_2-c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5},$$

$$F_2-c_1F_1=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=d_1,\ F_2-c_2F_1=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=d_2;$$

有 Fibonacci 数列的 Binet 通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n。 \tag{32}$$

当根据方程（25)、(26）二式时，由$d_{1,2}$及$F_{1,2}$得

$$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]B_1+\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]B_2=1\ ,$$

$$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^2B_1+\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^2B_2=1\ ;$$

解得待定常数

$$B_1=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$B_2=-\frac{1}{\sqrt{5}};$$

亦得 Fibonacci 数列的 Binet 通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n。 \tag{32A}$$

Binet 通项公式的意义之一是给出了由无理数表示的整数。

简单地，对于自然数k_1、$k_2\,(k_2-[\mathrm{int}\sqrt{k_2}]^2>0)$，有无理数表示的整数形式为

$$F_n=[k_1+\sqrt{k_2}]^n+[k_1-\sqrt{k_2}]^n。 \tag{32B}$$

3 三阶线性递推数列

三阶线性递推数列形式为

$$F_{n+3}=\alpha F_{n+2}+\beta F_{n+1}+\gamma F_n, \tag{33}$$

这里α、β、γ为常数，且$\alpha\neq0$、$\beta\neq0$、$\gamma\neq0$；$F_{1,2,3}$为已知量。

引入参数c、d、e，使得下式等比数列成立

$$F_{n+3}-cF_{n+2}-eF_{n+1}=d(F_{n+2}-cF_{n+1}-eF_n); \tag{34}$$

即得

$$F_{n+3}=(c+d)F_{n+2}+(e-cd)F_{n+1}-edF_n, \tag{35}$$

及等比数列通项公式

$$F_{n+2}-cF_{n+1}-eF_n=(F_3-cF_2-eF_1)d^{n-1}\text{。} \tag{36}$$

由方程（33）、（35）二式得

$$\begin{cases} c+d=\alpha, \\ e-cd=\beta, \\ ed=-\gamma; \end{cases}$$

故得数列的特征方程为

$$d^3=\alpha d^2+\beta d+\gamma, \tag{37}$$

或

$$d^3-\alpha d^2-\beta d-\gamma=0;$$

通过三次方程的求根公式解得$d_{1,2,3}$，进而求出参量$c_{1,2,3}$、$e_{1,2,3}$。

当$d_{1,2,3}$没有重根时，由方程（36）式得

$$F_{n+2}-c_1F_{n+1}-e_1F_n=(F_3-c_1F_2-e_1F_1)d_1^{n-1}, \tag{38}$$

$$F_{n+2}-c_2F_{n+1}-e_2F_n=(F_3-c_2F_2-e_2F_1)d_2^{n-1}, \tag{39}$$

$$F_{n+2}-c_3F_{n+1}-e_3F_n=(F_3-c_3F_2-e_3F_1)d_3^{n-1}; \tag{40}$$

消去F_{n+2}、F_{n+1}二项得通项公式

$$F_n=\phi_0^{-1}[\phi_1d_1^n+\phi_2d_2^n+\phi_3d_3^n], \tag{41}$$

其中

$$\phi_0=\frac{e_2-e_1}{c_2-c_1}-\frac{e_3-e_2}{c_3-c_2},\quad \phi_1=\frac{F_3-c_1F_2-e_1F_1}{d_1(c_2-c_1)},$$

$$\phi_2=-\frac{(F_3-c_2F_2-e_2F_1)(c_3-c_1)}{d_2(c_2-c_1)(c_3-c_2)},\quad \phi_3=\frac{F_3-c_3F_2-e_3F_1}{d_3(c_3-c_2)}\text{。}$$

将方程（41）式表示为

$$F_n=B_1d_1^n+B_2d_2^n+B_3d_3^n, \tag{42}$$

式中待定常数$B_{1,2,3}$可由下面方程求出

$$B_1d_1^p+B_2d_2^p+B_3d_3^p=F_p,\quad p=\text{from 1 to 3}\text{。} \tag{43}$$

当$d_{1,2,3}$有二个重根$d_1=d_2$时，得

$$F_n=[B_1+B_2n]d_1^n+B_3d_3^n, \tag{44}$$

式中待定常数$B_{1,2,3}$可由下面方程求出

$$[B_1+B_2p]d_1^p+B_3d_3^p=F_p,\quad p=\text{from 1 to 3}\text{。} \tag{45}$$

当$d_{1,2,3}$有三个重根$d_1=d_2=d_3$时，得

$$F_n=[B_1+B_2n+B_3n^2]d_1^n, \tag{46}$$

式中待定常数$B_{1,2,3}$可由下面方程求出

$$[B_1+B_2p+B_3p^2]d_1^p=F_p,\quad p=\text{from 1 to 3}\text{。} \tag{47}$$

4 多阶线性递推数列

一般地，当线性递推数列形式为

$$F_{n+m} = \sum_{k=n}^{n+m-1} \varphi_k F_k \qquad (48)$$

时，其特征方程形式为

$$d^m = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{n+j-1} d^{j-1} , \qquad (49)$$

这里φ_k（$k = \text{from } n \text{ to } n+m-1$）为常数，$F_j$（$j = \text{from } 1 \text{ to } m$）为已知量。

当特征方程（49）式的根d_j（$j = \text{from } 1 \text{ to } m$）没有重根时，则数列（48）式的通项公式可表示为

$$F_n = \sum_{j=1}^{m} B_j d_j^n , \qquad (50)$$

式中B_j（$j = \text{from } 1 \text{ to } m$）为与$\varphi_k$（$k = \text{from } n \text{ to } n+m-1$）及$F_j$（$j = \text{from } 1 \text{ to } m$）相关的待定常数，其可由下面方程求出

$$\sum_{j=1}^{m} B_j d_j^p = F_p , \quad p = \text{from } 1 \text{ to } m \quad 。 \qquad (51)$$

当特征方程（49）式有q个重根$d_1 = d_2 = \cdots = d_q$（$q < m$）时，则方程（48）式的通项公式为

$$F_n = d_1^n \sum_{j=1}^{q} B_j n^{j-1} + \sum_{j=q+1}^{m} B_j d_j^n , \qquad (52)$$

式中待定常数B_j（$j = \text{from } 1 \text{ to } m$）可由下面方程求出

$$d_1^p \sum_{j=1}^{q} B_j p^{j-1} + \sum_{j=q+1}^{m} B_j d_j^p = F_p , \quad p = \text{from } 1 \text{ to } m \quad 。 \qquad (53)$$

当特征方程（49）式有m个重根$d = d_1 = d_2 = \cdots = d_m$时，则（48）式的通项公式为

$$F_n = d^n \sum_{j=1}^{m} B_j n^{j-1} , \qquad (54)$$

式中待定常数B_j（$j = \text{from } 1 \text{ to } m$）可由下面方程求出

$$d^p \sum_{j=1}^{m} B_j p^{j-1} = F_p , \quad p = \text{from } 1 \text{ to } m \quad 。 \qquad (55)$$

上述介绍内容并不是很严谨完整的描述，其仅是对一元常系数线性递推数列部分性质的初等概要介绍。

初等方法质朴易通，论证过程一般需凭高等方法作宏观总览或远景指导；而高等方法在细微局部上仍以初等方法作为根本基础或是其变换体现，且在极限或特殊条件下能够退回到初等方法，至少需由初等方法给出的结论予以检验验证。历史上，即便是经过或将要经过高等方法证明的描述，诸如 Fermat 大定理、Gauss 素数分布规律、Riemann 猜想等，仍希望采用初等方法予以阐释；以高等方法审视初等方法的局限，以初等方法检验高等方法的脱漏；如此使得初等方法与高等方法在简洁善巧及深刻普适层面相互辉映，将自然清丽和典雅高远融为一体。

阎 坤（yankun@nature.ac.cn）

2005 年 11 月 15 日