阎坤．关于对线性递推数列及交错级数收敛条件的初等注释与简略补充．西安：西安现代非线性科学应用研究所，2005-11-15．
YAN Kun. Elementary annotation and supplement about properties of the linear recurrence sequence and the conditions for convergence of the alternate series[R]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 15 November 2005.
http:// www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/linearsequence-pdf.pdf

关于对线性递推数列及交错级数收敛条件的初等注释与简略补充

阎 坤
（ 西安现代非线性科学应用研究所　西安 710061 ）

线性递推数列是典型简明的数据序列，历史上诸多学者对数列性质进行了深入分析探讨及应用研究，其中如 Fibonacci 数列等自扩展形式较具有代表性，以 Binet 通项公式分析方法具有经典意义；本短文即是对一元常系数线性递推数列概要及相关交错级数收敛广义条件等内容的一个初等朴素的注释性介绍及简略补充。

关键词：线性，递推数列，自扩展，初等数学方法，特征方程，Fibonacci 数列，Binet 通项公式，交错级数收敛的广义条件

Elementary annotation and supplement about properties of the linear recurrence sequence and the conditions for convergence of the alternate series

YAN Kun
(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Keywords　linear, recurrence sequence, self-expanding form, elementary mathematical method, characteristic equation, Fibonacci sequence(Fibonacci numbers or Fibonacci series), Binet's formula for general term, general conditions for convergence of the alternate series

1 一阶线性递推数列

一阶线性递推数列形式为

$$F_{n+1} = aF_n + b,\qquad (1)$$

式中 a 、 b 为常系数， n 为自然数； F_1 为已知量。

以下内容中的线性递推数列皆指一元常系数线性递推数列。

当 $a = 0$ 时，方程（1）式的数列为常数序列，通项公式为

$$F_n = b;$$

当 $a = 1$ 时，方程（1）式的数列为等差序列

$$F_{n+1} - F_n = b,$$

通项公式为

$$F_n = F_1 + b(n-1) = F_1 - b + bn。$$

当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时，引入待定参数 c 、 d ，使得下式的等比序列成立

$$F_{n+1} - c = d(F_n - c),\qquad (2)$$

得

$$F_{n+1} = dF_n - c(d-1),\qquad (3)$$

及该序列的通项公式为

$$F_n - c = (F_1 - c)d^{n-1}。\qquad (4)$$

由方程（1）、（3）二式得

$$\begin{cases} d = a, \\ c(d-1) = -b; \end{cases}\qquad (5)$$

即有数列的特征方程为

$$d = a,\qquad (6)$$

及解得

$$c=\frac{b}{1-a};\tag{7}$$

由方程（4)、(6)、(7）三式得数列（1）式在$a\neq 0$且$a\neq 1$时的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{a}\left[F_1-\frac{b}{1-a}\right]a^n+\frac{b}{1-a}。\tag{8}$$

2 二阶线性递推数列与 Fibonacci 数列

二阶线性递推数列形式为

$$F_{n+2}=aF_{n+1}+bF_n,\tag{9}$$

式中常数$a\neq 0$、$b\neq 0$，$F_{1,2}$为已知量。

仍然引入待定参数c、d，使得下面等比序列成立

$$F_{n+2}-cF_{n+1}=d(F_{n+1}-cF_n);\tag{10}$$

得

$$F_{n+2}=(c+d)F_{n+1}-cdF_n,\tag{11}$$

及通项公式为

$$F_{n+1}-cF_n=(F_2-cF_1)d^{n-1}。\tag{12}$$

由方程（9)、(11）二式得

$$\begin{cases}c+d=a,\\ cd=-b;\end{cases}\tag{13}$$

故有数列的特征方程为

$$d^2=ad+b,\tag{14}$$

或

$$d^2-ad-b=0;$$

解得

$$d_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2},\tag{15}$$

$$c_{1,2}=\frac{a\mp\sqrt{a^2+4b}}{2}。\tag{16}$$

根据方程（15)、(16）二式，当$a^2+4b=0$时，有

$$a^2=-4b,\quad d=d_1=d_2=\frac{a}{2},\quad c=c_1=c_2=\frac{a}{2}。$$

因$d=c=0.5a$，则将方程（12）式二边同时除以d^{n+1}，得等差数列

$$\frac{F_{n+1}}{d^{n+1}}-\frac{F_n}{d^n}=\frac{F_2-dF_1}{d^2},\tag{17}$$

此等差数列通项公式为

$$\frac{F_n}{d^n}=\frac{F_1}{d}+\frac{F_2-dF_1}{d^2}(n-1);\tag{18}$$

即由方程（18）式得数列（9）式当$a^2+4b=0$时的通项公式为

$$F_n=\frac{4}{a^2}\left[aF_1-F_2+\left(F_2-\frac{a}{2}F_1\right)n\right]\left(\frac{a}{2}\right)^n。\tag{19}$$

将方程（19）式表示为

$$F_n = [B_1 + B_2 n] d^n \text{，} \tag{20}$$

式中待定常数 $B_{1,2}$ 可由下面方程求出

$$[B_1 + B_2 p] d^p = F_p \quad\text{，}\qquad p = \text{from } 1 \text{ to } 2 \quad\text{。} \tag{21}$$

当 $a^2 + 4b \neq 0$ 时，由方程（15）、（16）二式得

$d_1 \neq d_2$，$c_1 \neq c_2$；

故由方程（12）、（15）、（16）三式得

$$F_{n+1} - c_1 F_n = (F_2 - c_1 F_1) d_1^{n-1} \text{，} \tag{22}$$

$$F_{n+1} - c_2 F_n = (F_2 - c_2 F_1) d_2^{n-1} \text{。} \tag{23}$$

将方程（22）、（23）二式相减消去 F_{n+1} 项得

$$(c_2 - c_1) F_n = (F_2 - c_1 F_1) d_1^{n-1} - (F_2 - c_2 F_1) d_2^{n-1} \text{，}$$

故得通项公式

$$F_n = \frac{(F_2 - c_1 F_1)}{d_1 (c_2 - c_1)} d_1^n - \frac{(F_2 - c_2 F_1)}{d_2 (c_2 - c_1)} d_2^n \quad\text{，} \tag{24}$$

此式中

$$c_2 - c_1 = \sqrt{a^2 + 4b} \text{。}$$

将方程（24）式表示为

$$F_n = B_1 d_1^n + B_2 d_2^n \quad\text{，} \tag{25}$$

式中待定常数 $B_{1,2}$ 可由下面方程求出

$$B_1 d_1^p + B_2 d_2^p = F_p \quad\text{，}\qquad p = \text{from } 1 \text{ to } 2 \quad\text{。} \tag{26}$$

当 $a^2 + 4b < 0$ 时，方程（15）、（16）二式成为

$$d_{1,2} = \sqrt{-b}[\cos\theta \pm i \sin\theta] \text{，} \tag{27}$$

$$c_{1,2} = \sqrt{-b}[\cos\theta \mp i \sin\theta] \text{，} \tag{28}$$

式中

$$i = \sqrt{-1} \text{，}\quad \theta = \arctan\frac{\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{a} \text{；}$$

则由方程（24）式及 Euler 公式

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$$

得数列（9）式在 $a^2 + 4b < 0$ 时的通项公式为

$$F_n = [\phi_1 \cos(n\theta) + i\phi_2 \sin(n\theta)](\sqrt{-b})^n \text{，} \tag{29}$$

式中

$$\phi_1 = \frac{(F_2 - c_1 F_1)}{d_1 (c_2 - c_1)} - \frac{(F_2 - c_2 F_1)}{d_2 (c_2 - c_1)} \quad\text{，}\qquad \phi_2 = \frac{(F_2 - c_1 F_1)}{d_1 (c_2 - c_1)} + \frac{(F_2 - c_2 F_1)}{d_2 (c_2 - c_1)} \quad\text{，}$$

$$c_2 - c_1 = 2i\sqrt{-b} \sin\theta \text{。}$$

方程（29）式中的待定常数 $\phi_{1,2}$ 也可由下面方程求出

$$[\phi_1 \cos(p\theta) + i\phi_2 \sin(p\theta)](\sqrt{-b})^p = F_p \text{，}\qquad p = \text{from } 1 \text{ to } 2 \quad\text{。} \tag{30}$$

下面概要性介绍 Fibonacci 数列。

当$a=b=1$、$F_1=F_2=1$时，数列（9）式为 Fibonacci 数列

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n，\tag{31}$$

由方程（15)、(16)、(24）三式得

$$d_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}，\quad c_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}，$$

$$c_2-c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}，$$

$$F_2-c_1F_1=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=d_1，$$

$$F_2-c_2F_1=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=d_2；$$

有 Fibonacci 数列的 Binet 通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n。\tag{32}$$

当根据方程（25)、(26）二式时，由$d_{1,2}$及$F_{1,2}$得

$$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]B_1+\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]B_2=1\quad，$$

$$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^2B_1+\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^2B_2=1\quad；$$

解得待定常数

$$B_1=\frac{1}{\sqrt{5}}，\ B_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}；$$

亦得 Fibonacci 数列的 Binet 通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n。\tag{32A}$$

Binet 通项公式的意义之一是给出了由无理数表示的整数。

简单地，对于自然数k_1、k_2($k_2-[\mathrm{int}\sqrt{k_2}]^2>0$)，有无理数表示的整数形式为

$$F_n=[k_1+\sqrt{k_2}]^n+[k_1-\sqrt{k_2}]^n。\tag{32B}$$

3 三阶线性递推数列

三阶线性递推数列形式为

$$F_{n+3}=\alpha F_{n+2}+\beta F_{n+1}+\gamma F_n，\tag{33}$$

这里α、β、γ为常数，且$\alpha\neq0$、$\beta\neq0$、$\gamma\neq0$；$F_{1,2,3}$为已知量。

引入参数c、d、e，使得下式等比数列成立

$$F_{n+3}-cF_{n+2}-eF_{n+1}=d(F_{n+2}-cF_{n+1}-eF_n)；\tag{34}$$

即得

$$F_{n+3}=(c+d)F_{n+2}+(e-cd)F_{n+1}-edF_n，\tag{35}$$

及等比数列通项公式

$$F_{n+2}-cF_{n+1}-eF_n=(F_3-cF_2-eF_1)d^{n-1}。\tag{36}$$

由方程（33）、（35）二式得

$$\begin{cases} c+d=\alpha, \\ e-cd=\beta, \\ ed=-\gamma; \end{cases}$$

故得数列的特征方程为

$$d^3=\alpha d^2+\beta d+\gamma, \tag{37}$$

或

$$d^3-\alpha d^2-\beta d-\gamma=0;$$

通过三次方程的求根公式解得 $d_{1,2,3}$，进而求出参量 $c_{1,2,3}$、 $e_{1,2,3}$。

当 $d_{1,2,3}$ 没有重根时，由方程（36）式得

$$F_{n+2}-c_1F_{n+1}-e_1F_n=(F_3-c_1F_2-e_1F_1)d_1^{n-1}, \tag{38}$$

$$F_{n+2}-c_2F_{n+1}-e_2F_n=(F_3-c_2F_2-e_2F_1)d_2^{n-1}, \tag{39}$$

$$F_{n+2}-c_3F_{n+1}-e_3F_n=(F_3-c_3F_2-e_3F_1)d_3^{n-1}; \tag{40}$$

消去 F_{n+2}、 F_{n+1} 二项得通项公式

$$F_n=\phi_0^{-1}[\phi_1d_1^n+\phi_2d_2^n+\phi_3d_3^n], \tag{41}$$

其中

$$\phi_0=\frac{e_2-e_1}{c_2-c_1}-\frac{e_3-e_2}{c_3-c_2},$$

$$\phi_1=\frac{F_3-c_1F_2-e_1F_1}{d_1(c_2-c_1)},$$

$$\phi_2=-\frac{(F_3-c_2F_2-e_2F_1)(c_3-c_1)}{d_2(c_2-c_1)(c_3-c_2)},$$

$$\phi_3=\frac{F_3-c_3F_2-e_3F_1}{d_3(c_3-c_2)}。$$

将方程（41）式表示为

$$F_n=B_1d_1^n+B_2d_2^n+B_3d_3^n, \tag{42}$$

式中待定常数 $B_{1,2,3}$ 可由下面方程求出

$$B_1d_1^p+B_2d_2^p+B_3d_3^p=F_p, \quad p=\text{from 1 to 3}。 \tag{43}$$

当 $d_{1,2,3}$ 有二个重根 $d_1=d_2$ 时，得

$$F_n=[B_1+B_2n]d_1^n+B_3d_3^n, \tag{44}$$

式中待定常数 $B_{1,2,3}$ 可由下面方程求出

$$[B_1+B_2p]d_1^p+B_3d_3^p=F_p, \quad p=\text{from 1 to 3}。 \tag{45}$$

当 $d_{1,2,3}$ 有三个重根 $d_1=d_2=d_3$ 时，得

$$F_n=[B_1+B_2n+B_3n^2]d_1^n, \tag{46}$$

式中待定常数 $B_{1,2,3}$ 可由下面方程求出

$$[B_1+B_2p+B_3p^2]d_1^p=F_p, \quad p=\text{from 1 to 3}。 \tag{47}$$

4 多阶线性递推数列

一般地，当线性递推数列形式为

$$F_{n+m}=\sum_{k=n}^{n+m-1}\varphi_k F_k \tag{48}$$

时，其特征方程形式为

$$d^m=\sum_{j=1}^{m}\varphi_{n+j-1}d^{j-1}\,, \tag{49}$$

这里φ_k（$k=\text{from}\ n\ \text{to}\ n+m-1$）为常数，$F_j$（$j=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m$）为已知量。

当特征方程（49）式的根d_j（$j=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m$）没有重根时，则数列（48）式的通项公式可表示为

$$F_n=\sum_{j=1}^{m}B_j d_j^n\,, \tag{50}$$

式中B_j（$j=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m$）为与$\varphi_k$（$k=\text{from}\ n\ \text{to}\ n+m-1$）及$F_j$（$j=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m$）相关的待定常数，其可由下面方程求出

$$\sum_{j=1}^{m}B_j d_j^p=F_p\,,\quad p=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m\quad。 \tag{51}$$

当特征方程（49）式有q个重根$d_1=d_2=\cdots=d_q$（$q<m$）时，则方程（48）式的通项公式为

$$F_n=d_1^n\sum_{j=1}^{q}B_j n^{j-1}+\sum_{j=q+1}^{m}B_j d_j^n\,, \tag{52}$$

式中待定常数B_j（$j=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m$）可由下面方程求出

$$d_1^p\sum_{j=1}^{q}B_j p^{j-1}+\sum_{j=q+1}^{m}B_j d_j^p=F_p\,,\quad p=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m\quad。 \tag{53}$$

当特征方程（49）式有m个重根$d=d_1=d_2=\cdots=d_m$时，则（48）式的通项公式为

$$F_n=d^n\sum_{j=1}^{m}B_j n^{j-1}\,, \tag{54}$$

式中待定常数B_j（$j=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m$）可由下面方程求出

$$d^p\sum_{j=1}^{m}B_j p^{j-1}=F_p\,,\quad p=\text{from}\ 1\ \text{to}\ m\quad。 \tag{55}$$

上述介绍内容并不是很严谨完整的描述，其仅是对一元常系数线性递推数列部分性质的初等概要介绍及部分内容的简略补充。

5 广义p－级数及其相应的交错级数形式

由数列

u_1，u_2，u_3，u_4，……，u_n，……

可给出其和数列

$S_1=u_1$，$S_2=u_1+u_2$，$S_3=u_1+u_2+u_3$，……，$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$，……

由数列的和构成级数，无穷数列的和构造相应的无穷级数；在这其中经典的调和级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} \tag{56}$$

及 $p-$级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}，\quad p>0 \tag{57}$$

是典型的正项级数（$u_n \geq 0$）形式。

任意有限个收敛级数的和或差，仍为收敛级数，也即整体有界；而当是无限个收敛级数的和或差时，则整体或收敛或发散。

如级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_{(k)n}$ 收敛，则级数

$$\sum_{k=1}^{W}\gamma_k\sum_{n=1}^{+\infty}u_{(k)n}，\quad k=\text{from 1 to } W \tag{58}$$

收敛；这里 γ_k 为与 k 相关的常量。

而当 $W\to+\infty$ 时，则级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma_k\sum_{n=1}^{+\infty}u_{(k)n} \tag{59}$$

或收敛、或发散。

当级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_{(k)n}$ 中只有一个发散，其余皆收敛时，则级数 $\sum_{k=1}^{W}\gamma_k\sum_{n=1}^{+\infty}u_{(k)n}$ 发散；多于一个级数发散时，则级数 $\sum_{k=1}^{W}\gamma_k\sum_{n=1}^{+\infty}u_{(k)n}$ 或收敛或发散。

特别极端地如级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}[u_n-u_n]$，无论数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 是收敛还是发散，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}[u_n-u_n]$ 都是收敛的。

一般地，例如级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n+1}], \tag{60}$$

其中 γ_1、γ_2 皆为常量。

在级数（60）式中，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\gamma_1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\gamma_2}{n+1}$ 皆为发散级数，是二个发散级数的和或差。

因为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n+1}]=\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{\gamma_1(n+1)}{n(n+1)}+\frac{\gamma_2 n}{n(n+1)}]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\gamma_1+\gamma_2)n+\gamma_1}{n(n+1)}; \tag{61}$$

故当 $\gamma_1=-\gamma_2$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n+1}]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\gamma_1}{n(n+1)}; \tag{62}$$

即此时级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n+1}]$ 为收敛级数。

而当 $\gamma_1\neq-\gamma_2$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n+1}]=\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{\gamma_1+\gamma_2}{n+1}+\frac{\gamma_1}{n(n+1)}]; \tag{63}$$

即此时级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n+1}]$ 为发散级数。

将调和级数（56）式及 $p-$ 级数（57）式在形式上进一步拓展，有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+\sin[\alpha n\pi]}，\ 0\le\alpha<1；\tag{64}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{[n+\sin[\alpha n\pi]]^{p}}，\ 0\le\alpha<1、\ p>0；\tag{65}$$

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{[n+1+n_0\sin[\alpha n\pi]]^{p}}，\ 0\le\alpha<1、\ p>0、\ n_0\ge1；\tag{66}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{[n+n^{q}\sin[\alpha n\pi]]^{p}}，\ 0\le\alpha<1、\ p>0、\ 0\le q<1。\tag{67}$$

显然当 $\alpha=0$ 时，级数（64）～（67）式即退化还原为由经典的调和级数（56）式及 $p-$ 级数（57）式的形式，即级数（64）式为一般的调和级数形式，而（65）～（67）式则为广义 $p-$ 级数形式。

一般地，在正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$（$u_n>0$）之后就是交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$（这里 $u_n>0$）；而交错级数的收敛充分条件是通过 Leibniz 定理给出的。

Leibniz 定理表述为如果交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$（这里 $u_n>0$）满足二个条件

（A）$u_n\ge u_{n+1}$，

（B）$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$；

则该交错级数收敛。

Leibniz 定理为交错级数收敛的充分条件；不总是严格满足该定理条件（A），但严格满足条件（B）的交错级数的敛散性讨论也是很有意义的方向。而由一般调和级数及广义 $p-$ 级数（64）～（67）式构造的交错级数即为如下形式

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin[\alpha n\pi]}，\ 0\le\alpha<1；\tag{68}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{[n+\sin[\alpha n\pi]]^{p}}，\ 0\le\alpha<1、\ p>0；\tag{69}$$

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(-1)^{n-n_0}\frac{1}{[n+1+n_0\sin[\alpha n\pi]]^{p}}，\ 0\le\alpha<1、\ p>0、\ n_0\ge1；\tag{70}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{[n+n^{q}\sin[\alpha n\pi]]^{p}}，\ 0\le\alpha<1、\ p>0、\ 0\le q<1。\tag{71}$$

交错级数（68）～（71）式在 $0\le\alpha<1$ 情况下并不总是严格满足 Leibniz 定理中的条件（A），即 u_n 并不总是大于等于 u_{n+1}；但严格满足条件（B），即 $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$。

特别简单特殊地，如

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2\sin[0.5n\pi]}，\tag{72}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{[n+2.5\sin[0.5n\pi]]^{p}}，\ p>0\tag{73}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{[n+\sqrt{n}\sin[0.5n\pi]]^{p}}\text{，}\quad p>0 \qquad (74)$$

等交错级数具体形式，都具有不总是严格满足 Leibniz 定理中的条件（A），但严格满足条件（B）的显著特征。

同样的，由若干有限个条件收敛的交错级数的和或差构成的级数，整体也可以是绝对收敛级数；而当条件收敛的交错级数的个数为无限时，其和或差构成的级数在整体上或绝对收敛、或条件收敛、或发散。

简单地，参照级数（60）式及（63）式，由二个条件收敛的级数的和构成的交错级数形式

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^{n-1}\frac{\gamma_1}{n}+(-1)^{n-1}\frac{\gamma_2}{n+1}]\text{，} \qquad (75)$$

则其当$\gamma_1=-\gamma_2$时，有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^{n-1}\frac{\gamma_1}{n}+(-1)^{n-1}\frac{\gamma_2}{n+1}]=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\gamma_1}{n(n+1)}\text{；} \qquad (76)$$

即此时交错级数$\sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^{n-1}\frac{\gamma_1}{n}+(-1)^{n-1}\frac{\gamma_2}{n+1}]$为绝对收敛级数。

作为深入分析探讨及对 Leibniz 定理的简略补充，对于交错级数的敛散性，一个较 Leibniz 定理更为广泛普适的判别法如下：

交错级数收敛的广义充分条件

如果交错级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$（这里$u_n>0$）满足二个条件

（A）级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$在第J ($J\geq 1$)项之后，存在一有限的正整数M ($M\geq J$)，使得

$$\sum_{n=J}^{M}u_n\geq\sum_{l=M+1}^{2M-J+1}u_l\text{，}\quad n=J\ \text{to}\ M, M+1\ \text{to}\ 2M-J+1,\ \cdots\text{；}\quad l=n+M+1-J\text{；} \qquad (77)$$

（B）$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$；（78）

则该交错级数收敛。

显然，当$M=J$时，这一判别法即退化为 Leibniz 判别法。

采用条件（77）、（78）二式，则可直接判别如（68）～（71）式或其部分具体形式（72）～（74）的收敛性质。

初等方法质朴易通，论证过程一般需凭高等方法作宏观总览或远景指导；而高等方法在细微局部上仍以初等方法作为根本基础或是其变换体现，且在极限或特殊条件下能够退回到初等方法，至少需由初等方法给出的结论予以检验验证。历史上，即便是经过或将要经过高等方法证明的描述，诸如 Fermat 大定理、Gauss 素数分布规律、Riemann 猜想等，仍希望采用初等方法予以阐释；以高等方法审视初等方法的局限，以初等方法检验高等方法的脱漏；如此使得初等方法与高等方法在简洁善巧及深刻普适层面相互辉映，将自然清丽和典雅高远融为一体。

阎　坤（yankun@nature.ac.cn）
2005 年 11 月 15 日 北京德外关厢岁月纪念