本文框架内容发表在：
阎坤. 数据曲线间断区域的自适应连接方程研究[J]. 地球物理学进展，2011, 26(1):162～171。
YAN Kun. Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve[J]. Progress in Geophys(in Chinese with abstract in English), 2011, 26(1): 162～171；DOI:10.3969/j.issn.1004-2903.2011.01.018.

数据曲线间断区域的自适应连接方程研究

阎 坤
(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘 要：通过讨论非线性动力学方程的近似等效解析解及数据曲线间断区域的性质，给出间断区域的自适应连接方程构造形式及其参数确定的预置迭代方法，进而亦给出一般曲线间断区域的映射方程组连接方法，随后给出计算实例，其中包括位错间断区域与回转间断区域的映射方程组及光滑连接曲线。此自适应连接方程，可以作为经典 S 型曲线方程或 Logistic 函数的一般扩展形式（扩展型双曲正切函数）予以应用；其中对于缓变数据曲线阶跃间断区域，可自动计算生成连接方程形式。文中分析了非线性方程在经典 Newton 动力学方程及 RLC 串联电路电荷方程方面的兼容性；基于自适应连接方程探讨分析了自然现象演化系列相变函数的一种扩展型双曲正切级数近似表示形式、磁性材料磁滞回线方程、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程、稳定核素比结合能趋势方程、核素结合能的理论最大值及其相应质子数、太阳系元素丰度的趋势方程、势能函数曲线趋势方程（诸如双原子分子势能函数曲线方程）、自然饱和过程方程（诸如钢材料断裂韧性方程）及金属或岩石蠕变过程方程。
关键词：非线性动力学方程，数据曲线间断区域，自适应连接方程，映射连接方程，磁滞回线方程，粒子统计分布方程，比结合能方程，太阳系元素丰度方程，势能函数曲线方程，自然饱和过程方程，蠕变过程方程

Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve

YAN Kun
(Xi’an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi’an 710061, China)

Abstract In this paper, by discussing approximate equivalent analytical solution of nonlinear dynamics equation and some properties in discontinuous area of data curve, a general constructing form of adaptive connection equation and preset iteration method determining parameters in discontinuous area are given. And then, a connecting method of the mapping equations for the discontinuous areas of general curves is also given. Subsequently, computing examples which included the discontinuous areas with dislocation and turn-back are given too. This adaptive connection equation can be applied as a general form of expansion (extended hyperbolic tangent function) of the classical S-curve (sigmoid curve) equation or Logistic function, and for step discontinuous area of slowly varying data curve, its form of the adaptive connection equation can be obtained by automatic calculating. In this paper, compatibility of the nonlinear equation in classical Newton dynamic equation and the charge equation of the RLC series circuit is analyzed. Basing on the form of the adaptive connection equation, an approximate expression of extended hyperbolic tangent series for the characteristic function of the series phases transition of the evolution of phenomena, equations of magnetic hysteresis loop for magnetic material, extended form of average energy equation (or Einstein-Stern equation) and tendency differential equation of the average particle number for the statistical distributions of the particles, equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide, a theoretical maximum of the nuclear binding energy and its corresponding proton number, abundances equation of elements in the Solar System, curvilinear equation of potential energy function (such as curvilinear equation of potential energy function of diatomic molecule, etc), equation of natural saturation process (such as tree growth and physical reaction or chemical reaction process, equation of fracture toughness for steel material, etc) and equation of typical creep process for metal or rock material are explored and analyzed tentatively.
Keywords nonlinear dynamics equation, discontinuous area of data curve, adaptive connection equations, connecting method of the mapping equations, equations of magnetic hysteresis loop, equation of statistical distributions of the particles, equation of average binding energy per nucleon, abundances equation of elements in Solar System, curvilinear equation of potential energy function, equation of natural saturation process, equation of creep process

0 引 言

在自然科学及工程技术的诸多领域，对数据曲线间断区域或等效间断区域予以描述是很重要的研究方向，其尤以确定连接方程构造形式及参数计算方法为关键。

本文通过对非线性方程近似等效解析解及数据曲线在间断区域的讨论，采用趋势分析途径[1]，给出自适应连接方程构造形式及参数的预置迭代计算方法，进而给出一般曲线间断区域的映射方程组连接方法，实例计算表明连接效果很好。本文提出了现象演化状态间转变方程，其一般遵循最优光滑曲线路径方程形式的原则；给出并分析了非线性 Newton 动力学方程、包含二种新的非线性电路元件的 RLCNG 串联电路方程、自然现象演化系列相变特征函数的扩展型双曲正切级数表示形式及自然演化平衡法则、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式、稳定核素比结合能方程、核素结合能最大值及其质子数、太阳系元素丰度方程、饱和及蠕变过程方程等相关内容。

与 Bézier 曲线方程及相关方法等[2~4]比较，本文方法主要侧重于数据曲线间断区域的自适应连接、或光滑穿过折线区域，其可直接应用到对类如时间序列局部折线及阶跃数据进行自适应光滑处理、曲线间断区域或缠绕区域（等效间断区域）的非线性动力学方程趋势分析描述及简化处理、数据主曲线优化与回归分析融合等方面。

1 数据曲线间断区域的自适应连接方程形式构造

1.1 一简洁非线性动力学微分方程的自嵌套特征及兼容性

对自然现象演化过程，其多变量微分方程组在消元简化后再略去高阶项，可表述为一非线性动力学方程

$$\varpi_1 \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} + \varpi_2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, x^2} + \sigma_{\mathrm{IE}} + \sigma_1 y + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 y^3 = \psi_{\mathrm{EE}}\text{，} \quad (1)$$

式中 x 、y 为关联参量或复合参量；ϖ_1 、ϖ_2 、σ_1 、σ_2 、σ_3 皆为关于 x 、y 的系函数；σ_{IE} 为内激励函数，ψ_{EE} 为外激励函数；此方程描述了现象演化的阶段性主体趋势。

作者简介 阎坤，1962年10月生，吉林榆树人，1983年8月毕业于长春地质学院；数值解析方向，目前主要从事非线性科学研究。
(Email: yankun@nature.ac.cn)

方程（1）式作为描述现象演化过程多变量微分方程组经消元简化后的近似形式，方程中各系函数及激励函数多具有形如方程（1）式的全部或部分项数耦合自嵌套形式，其内各系函数及激励函数再分别形如方程（1）式的耦合嵌套，如是诸层次第耦合嵌套，而参量y亦为上一层另一组关联参量形如方程（1）式表述形式中的一系函数或一激励函数，即在一般情况下方程（1）式是一自嵌套非线性动力学微分方程，或是以自嵌套为主的非线性动力学微分方程，方程谱阵整体上具有近似分形构造，相对分形维数为$D \approx 1 \sim 2$附近；在进行局部分析探讨时各系函数及激励函数近似取为简单函数形式或等效为常量。特别简单地，方程中（1）式中参量y的多项式部分也可等效视为一待定函数的三阶Taylor级数展开近似式。

方程（1）式兼容 Newton 动力学位移y－时间t方程、RLC 串联电路电荷量Q－时间t方程为

$$m_0 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \mu_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + b_{\mathrm{IE}} + k_0 y + n_0 y^2 + g_0 y^3 = F_{\mathrm{EE}} \text{，} \quad (2)$$

$$L_0 \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R_0 \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + S_{\mathrm{IE}} + \frac{1}{C_0} Q + N_0 Q^2 + G_0 Q^3 = U_{\mathrm{EE}} \text{，} \quad (3)$$

在方程（2）式中m_0、μ_0、k_0分别为质点质量、介质阻力系数、介质弹性系数，F_{EE}为作用力；b_{IE}为自激励函数；n_0、g_0为非线性极限系数；当$n_0 = 0$、$g_0 = 0$时，方程（2）式转化为经典 Newton 动力学方程形式

$$m_0 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \mu_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + k_0 y = F_{\mathrm{EE}} - b_{\mathrm{IE}} \text{；} \quad (4)$$

在方程（3）式中L_0、R_0、C_0分别为串联电路中的电感值、电阻值、电容值，U_{EE}为电压源激励函数；S_{IE}为自激励函数，拟此等效元件名称为“电态元件，statransor”，文字及图形符号为“S，”，电压方程$U_{\mathrm{S}} = S_{\mathrm{IE}}$；$N_0$、$G_0$为非线性元件特征值，其都具有构成新型非线性电子存储器及高灵敏度传感器的特性，N_0量纲为$[\mathrm{m^2kgs^{-5}A^{-3}}]$，拟其名称为“电存器，nonlinstor”，文字及图形符号为“N，”，电压U_{N}方程为

$$U_{\mathrm{N}} = N_0 Q^2 \text{；} \quad (5)$$

G_0量纲为$[\mathrm{m^2kgs^{-6}A^{-4}}]$，拟其名称为“电敏器，geomsentor”，文字及图形符号为“G，”，电压U_{G}方程为

$$U_{\mathrm{G}} = G_0 Q^3 \text{；} \quad (6)$$

当$N_0 = 0$、$G_0 = 0$时，方程（3）式即由 RLCNG 串联电路方程转化为经典 RLC 串联电路方程形式

$$L_0 \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R_0 \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_0} Q = U_{\mathrm{EE}} - S_{\mathrm{IE}} \text{。} \quad (7)$$

对方程（2）式，当μ_0、k_0、g_0皆为0时，有方程

$$m_0 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + n_0 y^2 = F_{\mathrm{EE}} - b_{\mathrm{IE}} \text{；} \quad (8)$$

当m_0、n_0、b_{IE}、F_{EE}为常量时，积分上式解得能量方程

$$\frac{1}{2} m_0 \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{1}{3} n_0 y^3 = [F_{\mathrm{EE}} - b_{\mathrm{IE}}] y + \phi_{\mathrm{E}} \text{，} \quad (9)$$

这里ϕ_{E}为能量待定常量。

方程（9）式在$n_0 \neq 0$、$F_{\mathrm{EE}} = b_{\mathrm{IE}}$、$\phi_{\mathrm{E}} = 0$时，即得位移$y$、速度$V_{\mathrm{n}}$、加速度$g_{\mathrm{n}}$的解分别为

$$y = -\frac{6m_0}{n_0[t+t_0]^2} \text{，} V_{\mathrm{n}} = \frac{12m_0}{n_0[t+t_0]^3} \text{，} g_{\mathrm{n}} = -\frac{36m_0}{n_0[t+t_0]^4} \text{；} \quad (10)$$

式中$V_{\mathrm{n}} << c$，c为真空中光速，t_0为时间待定常量。

对于电存元件(或电存器)，考虑Q为简谐波函数形式

$$Q = Q_0 \cos[2\pi f_0 t + \theta_0] \text{，}$$

这里Q_0、$f_0 = T_{\mathrm{N}}^{-1}$及$\theta_0$分别为$Q$的简谐波函数电荷量振幅、频率及初始相位，$T_{\mathrm{N}}$为简谐波周期。

由方程（5）式得电存元件的电流有效值I_{Neff}及电压有效值U_{Neff}分别为

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{Neff}} &= \sqrt{\frac{1}{T_{\mathrm{N}}} \int_0^{T_{\mathrm{N}}} \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \right)^2 \mathrm{d}t} \\ &= \left[0.5 T_{\mathrm{N}}^{-1} \int_0^{T_{\mathrm{N}}} [2\pi f_0 Q_0]^2 [1 - \cos[4\pi f_0 t + 2\theta_0]] \mathrm{d}t \right]^{0.5} \\ &= \sqrt{2} \pi f_0 Q_0 \text{；} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{Neff}} &= \sqrt{\frac{1}{T_{\mathrm{N}}} \int_0^{T_{\mathrm{N}}} [N_0 Q^2]^2 \mathrm{d}t} \\ &= \Big[0.25 T_{\mathrm{N}}^{-1} \int_0^{T_{\mathrm{N}}} [N_0^2 Q_0^4][1.5 + 2\cos[4\pi f_0 t + 2\theta_0] \\ &\qquad + 0.5\cos[8\pi f_0 t + 4\theta_0]] \mathrm{d}t \Big]^{0.5} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} N_0 Q_0^2 \text{；} \end{aligned} \quad (12)$$

则电存元件的阻抗Z_{N}为

$$Z_{\mathrm{N}} = \frac{U_{\mathrm{Neff}}}{I_{\mathrm{Neff}}} = \frac{\sqrt{3} N_0 Q_0}{4\pi f_0} \text{；} \quad (13)$$

即得由微分方程（3）式引入的电存元件具有非线性、高通、变频及关联电荷的性质。

对于（1）式，取$\varpi_2 = 0$、$\varpi_1 \neq 0$、$\sigma_3 = 0$，且ϖ_1、σ_{IE}、σ_1、σ_2、ψ_{EE}皆为常量；当$\sigma_2 \neq 0$时有简化形式

$$\varpi_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sigma_1 y + \sigma_2 y^2 = \psi_{\mathrm{EE}} - \sigma_{\mathrm{IE}} \text{，} \quad (14)$$

该方程的解为

$$y = \begin{cases} y_0 + A\tan[\alpha(x - x_0)],\ \sigma_2 \xi > 0, \\ \qquad \alpha = \varpi_1^{-1}\sqrt{\sigma_2 \xi},\ A = -\sqrt{\sigma_2^{-1}\xi} \\ y_0 + A\tanh[\alpha(x - x_0)],\ \sigma_2 \xi < 0, \\ \qquad \alpha = \varpi_1^{-1}\sqrt{-\sigma_2 \xi},\ A = \sqrt{-\sigma_2^{-1}\xi} \\ y_0 + \varpi_1 \sigma_2^{-1}[x + \xi_0]^{-1},\ \xi = 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中x_0、ξ_0为常量；$y(x = x_0) = y_0$，$y_0 = -0.5\sigma_1\sigma_2^{-1}$；$\xi = -\vartheta_{\mathrm{E}} - 0.25\sigma_1^2\sigma_2^{-1}$，$\vartheta_{\mathrm{E}} = \psi_{\mathrm{EE}} - \sigma_{\mathrm{IE}}$。

方程（14）式当$\sigma_2=0$时得进一步简化的方程形式

$$\varpi_1\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+\sigma_1 y=\psi_{\mathrm{EE}}-\sigma_{\mathrm{IE}}\;; \tag{16}$$

其解为

$$\begin{cases}\left|y-\sigma_1^{-1}\vartheta_{\mathrm{E}}\right|=\left|y_{x=0}-\sigma_1^{-1}\vartheta_{\mathrm{E}}\right|\exp(-\varpi_1^{-1}\sigma_1 x),\ \sigma_1\neq 0\\ y=y_{x=0}+\vartheta_{\mathrm{E}}x,\ \sigma_1=0\ .\end{cases} \tag{17}$$

显然解（15）式中的双曲正切函数可进一步表示为

$$\begin{aligned}y&=y_0+A\tanh[\alpha(x-x_0)]\\&=y_0+A\frac{\exp[\alpha(x-x_0)]-\exp[-\alpha(x-x_0)]}{\exp[\alpha(x-x_0)]+\exp[-\alpha(x-x_0)]}\\&=y_0-A+A\frac{2\exp[\alpha(x-x_0)]}{\exp[\alpha(x-x_0)]+\exp[-\alpha(x-x_0)]}\\&=y_0-A+A\frac{2}{1+\exp[-2\alpha(x-x_0)]};\end{aligned} \tag{18}$$

方程（18）式中x_0、y_0为曲线拐点坐标，$y(x=x_0)=y_0$；即得方程（18）式在$y_0=A$时其为描述经典 S 型曲线的 Logistic 函数表述形式

$$y=\frac{2y_0}{1+\exp[-2\alpha(x-x_0)]}\text{。} \tag{19}$$

1.2 数据曲线间断区域的性质及连接方程形式构造方法

数学，普适构造与逻辑解析二者相辅相成，几何思想代数化与代数思想几何化之间交相辉映，其部分要旨即是将 0 及无穷皆变换或映射为可区分的有限量形式；在临近层面，普适构造以逻辑解析为内核，逻辑解析以普适构造为本底；以朴直的线性构造为始，然后将线性在同一层面或临近层面逻辑拓展成更为一般的非线性形式，再将非线性形式解析变换为另一层面的简洁线性运算模式；在整体上构造高于解析，解析高于计算，构造与悖论伴生同在，悖论隐含新的构造，新的构造亦隐含新的悖论；解析由计算来趋势验证，构造以解析为延展骨架，深刻的具有颠覆性的悖论即若隐若现于构造之中，构造与悖论一体伴生演进；且诸多数学方程描述，都有一类自然现象演化过程与之相对应，表述为具有诸层自嵌套结构特征的非线性动力学方程，开放型激励、演化、守恒，所需要的是给出相应的引导方向及揭示途径；这是数学的根本法则，是数学的主旋律，使得数学既可动态自成体系，同时又在广泛应用于其它学科领域进行深入阐释延展的过程中相互促进共同发展。

对于数据曲线间断区域，取始点为$\mathrm{P_S}(x_{\mathrm{S}},y_{\mathrm{S}})$，其左邻域一点取为$\mathrm{P_{S-}}(x_{\mathrm{S-}},y_{\mathrm{S-}})$；终点为$\mathrm{P_E}(x_{\mathrm{E}},y_{\mathrm{E}})$，其右邻域一点取为$\mathrm{P_{E+}}(x_{\mathrm{E+}},y_{\mathrm{E+}})$；$x_{\mathrm{S}}<x_{\mathrm{E}}$；则有始点局部平均斜率$k_{\mathrm{S}}$、终点局部平均斜率$k_{\mathrm{E}}$分别为

$$k_{\mathrm{S}}=[y_{\mathrm{S}}-y_{\mathrm{S-}}][x_{\mathrm{S}}-x_{\mathrm{S-}}]^{-1}, \tag{20}$$

$$k_{\mathrm{E}}=[y_{\mathrm{E+}}-y_{\mathrm{E}}][x_{\mathrm{E+}}-x_{\mathrm{E}}]^{-1}; \tag{21}$$

而从间断始点到终点的斜率则为

$$k_{\mathrm{SE}}=[y_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{S}}][x_{\mathrm{E}}-x_{\mathrm{S}}]^{-1}\text{。} \tag{22}$$

取数据曲线间断区域平衡点（综合平衡点）坐标x_0、y_0及其幅值A的预置试算值$x_{0\mathrm{pv}}$、$y_{0\mathrm{pv}}$、A_{pv}分别为

$$x_{0\mathrm{pv}}=g_1(x_{\mathrm{S}}+x_{\mathrm{E}}), \tag{23}$$

$$y_{0\mathrm{pv}}=g_2(y_{\mathrm{S}}+y_{\mathrm{E}}), \tag{24}$$

$$A_{\mathrm{pv}}=g_3(y_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{S}}); \tag{25}$$

这里g_1、g_2、g_3为平衡点坐标计算系数；根据曲线间断区域的具体情况取值在 0.4～0.6，一般地取值为 0.5。

在数据曲线间断区域的连接曲线方程$y=f(x)$形式构造方向，可根据具体间断区域于始点局部平均斜率及终点局部平均斜率的特征构造多种连接曲线方程形式；其中简洁地，可将连接方程在二个端点局部平均斜率近似取为具有广泛适应性的指数函数形式

$$\begin{cases}\eta_{\mathrm{S}}=\varsigma_{\mathrm{S}}\exp[-\beta_{\mathrm{S0}}(x-x_0)],\\ \eta_{\mathrm{E}}=\varsigma_{\mathrm{E}}\exp[\beta_{\mathrm{E0}}(x-x_0)];\end{cases} \tag{26}$$

式中η_{S}、η_{E}分别为连接方程在数据曲线间断区域的始点局部平均斜率、终点局部平均斜率，$\eta_{\mathrm{S}}\approx k_{\mathrm{S}}$、$\eta_{\mathrm{E}}\approx k_{\mathrm{E}}$；$\varsigma_{\mathrm{S}}$、$\varsigma_{\mathrm{E}}$、$\beta_{\mathrm{S0}}$、$\beta_{\mathrm{E0}}$为待定系数。

在方程构造方向进一步将（26）式拆分为分式形式

$$\begin{cases}\eta_{\mathrm{S}}=\varsigma_{\mathrm{S}}\exp[-\beta_{\mathrm{S0}}(x-x_0)]=\varsigma_{\mathrm{S}}\dfrac{\exp[-\beta_{\mathrm{S1}}(x-x_0)]}{\exp[-\beta_{\mathrm{S2}}(x-x_0)]},\\ \eta_{\mathrm{E}}=\varsigma_{\mathrm{E}}\exp[\beta_{\mathrm{E0}}(x-x_0)]=\varsigma_{\mathrm{E}}\dfrac{\exp[\beta_{\mathrm{E1}}(x-x_0)]}{\exp[\beta_{\mathrm{E2}}(x-x_0)]};\end{cases} \tag{27}$$

这里β_{S1}、β_{S2}、β_{E1}、β_{E2}为待定系数，其与β_{S0}、β_{E0}之间的关系为$\beta_{\mathrm{S0}}=\beta_{\mathrm{S1}}-\beta_{\mathrm{S2}}$，$\beta_{\mathrm{E0}}=\beta_{\mathrm{E1}}-\beta_{\mathrm{E2}}$。

积分斜率方程（27）式，得连接曲线方程于始点局部邻域的y_{SE}、终点局部邻域的y_{EE}可表示为

$$\begin{cases}y_{\mathrm{SE}}=y_{\mathrm{S0}}-\varsigma_{\mathrm{S}}[\beta_{\mathrm{S1}}-\beta_{\mathrm{S2}}]^{-1}\dfrac{\exp[-\beta_{\mathrm{S1}}(x-x_0)]}{\exp[-\beta_{\mathrm{S2}}(x-x_0)]},\\ y_{\mathrm{EE}}=y_{\mathrm{E0}}+\varsigma_{\mathrm{E}}[\beta_{\mathrm{E1}}-\beta_{\mathrm{E2}}]^{-1}\dfrac{\exp[\beta_{\mathrm{E1}}(x-x_0)]}{\exp[\beta_{\mathrm{E2}}(x-x_0)]};\end{cases} \tag{28}$$

式中y_{S0}、y_{E0}为积分常数。

考虑连接曲线方程$y=f(x)$在平衡点（综合平衡点）处有$y(x=x_0)=y_0$，则在极限情况下，由端点邻域方程（28）式，即可得于此构造方向的数据曲线间断区域连接曲线方程较为简洁的形式为

$$\begin{aligned}y=y_0&-\frac{A_{\mathrm{E1}}-A_{\mathrm{S1}}}{A_{\mathrm{E2}}+A_{\mathrm{S2}}}\\&+\frac{A_{\mathrm{E1}}\exp[\beta_{\mathrm{E1}}(x-x_0)]-A_{\mathrm{S1}}\exp[-\beta_{\mathrm{S1}}(x-x_0)]}{A_{\mathrm{E2}}\exp[\beta_{\mathrm{E2}}(x-x_0)]+A_{\mathrm{S2}}\exp[-\beta_{\mathrm{S2}}(x-x_0)]};\end{aligned} \tag{29}$$

式中A_{S1}、A_{S2}、A_{E1}、A_{E2}为待定系数；

$$y_0-[A_{\mathrm{E1}}-A_{\mathrm{S1}}][A_{\mathrm{E2}}+A_{\mathrm{S2}}]^{-1}=y_{\mathrm{S0}}=y_{\mathrm{E0}},$$

$$A_{\mathrm{S1}}A_{\mathrm{S2}}^{-1}=\varsigma_{\mathrm{S}}[\beta_{\mathrm{S1}}-\beta_{\mathrm{S2}}]^{-1},\ A_{\mathrm{E1}}A_{\mathrm{E2}}^{-1}=\varsigma_{\mathrm{E}}[\beta_{\mathrm{E1}}-\beta_{\mathrm{E2}}]^{-1}\text{。}$$

方程（29）式是多平衡点等效为一综合平衡点的形式；更为简洁地，当 $A_{\mathrm{S1}}=A_{\mathrm{E1}}$、$A_{\mathrm{S2}}=A_{\mathrm{E2}}$ 时，其成为

$$y=y_0+A\frac{\exp[\beta_{\mathrm{E1}}(x-x_0)]-\exp[-\beta_{\mathrm{S1}}(x-x_0)]}{\exp[\beta_{\mathrm{E2}}(x-x_0)]+\exp[-\beta_{\mathrm{S2}}(x-x_0)]}\text{，}\tag{30}$$

式中 $y_0=y_{\mathrm{S0}}=y_{\mathrm{E0}}$，$A$ 为待定系数；

$A=A_{\mathrm{S1}}A_{\mathrm{S2}}^{-1}=A_{\mathrm{E1}}A_{\mathrm{E2}}^{-1}=\varsigma_{\mathrm{S}}[\beta_{\mathrm{S1}}-\beta_{\mathrm{S2}}]^{-1}=\varsigma_{\mathrm{E}}[\beta_{\mathrm{E1}}-\beta_{\mathrm{E2}}]^{-1}$。

对方程（30）式的分子分母同时乘以指数因子项 $\exp[\beta_{\mathrm{SE0}}(x-x_0)]$，这里 β_{SE0} 为待定常量，即有

$$y=y_0+A\times\frac{\exp[(\beta_{\mathrm{E1}}+\beta_{\mathrm{SE0}})(x-x_0)]-\exp[-(\beta_{\mathrm{S1}}-\beta_{\mathrm{SE0}})(x-x_0)]}{\exp[(\beta_{\mathrm{E2}}+\beta_{\mathrm{SE0}})(x-x_0)]+\exp[-(\beta_{\mathrm{S2}}-\beta_{\mathrm{SE0}})(x-x_0)]}\text{；}$$

取上式分母中

$$\beta_{\mathrm{E2}}+\beta_{\mathrm{SE0}}=\beta_{\mathrm{S2}}-\beta_{\mathrm{SE0}}\text{，}$$

解得待定常量 β_{SE0} 为

$$\beta_{\mathrm{SE0}}=0.5(\beta_{\mathrm{S2}}-\beta_{\mathrm{E2}})\text{；}$$

即有连接方程（30）式的一般性简化形式

$$y=y_0+A\frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)]-\exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2\cosh[\alpha_3(x-x_0)]}\text{，}\tag{31}$$

式中 α_1、α_2、α_3 为待定常量；

$$\alpha_1=\beta_{\mathrm{E1}}+0.5(\beta_{\mathrm{S2}}-\beta_{\mathrm{E2}})\text{，}$$
$$\alpha_2=\beta_{\mathrm{S1}}-0.5(\beta_{\mathrm{S2}}-\beta_{\mathrm{E2}})\text{，}$$
$$\alpha_3=0.5(\beta_{\mathrm{S2}}+\beta_{\mathrm{E2}})\text{。}$$

由（31）式，得其一阶及二阶微分方程形式分别为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A\frac{\alpha_1\exp[\alpha_1(x-x_0)]+\alpha_2\exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2\cosh[\alpha_3(x-x_0)]}-\alpha_3(y-y_0)\tanh[\alpha_3(x-x_0)]\text{；}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=&A\frac{\alpha_1^2\exp[\alpha_1(x-x_0)]-\alpha_2^2\exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2\cosh[\alpha_3(x-x_0)]}\\&-A\alpha_3\tanh[\alpha_3(x-x_0)]\times\frac{\alpha_1\exp[\alpha_1(x-x_0)]+\alpha_2\exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2\cosh[\alpha_3(x-x_0)]}\\&-\alpha_3\tanh[\alpha_3(x-x_0)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\alpha_3^2(y-y_0)}{\cosh^2[\alpha_3(x-x_0)]}\text{；}\end{aligned}\tag{33}$$

故得方程（31）式在平衡点 $x=x_0$、$y(x=x_0)=y_0$ 处的一阶及二阶导数方程值分别为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}A(\alpha_1+\alpha_2)\text{；}\tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2}A(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\text{。}\tag{35}$$

方程（35）式表明，方程（31）式为偏对称方程形式；当 $\alpha_1=\alpha_2$ 时，拐点坐标与平衡点坐标处于同一位置。

同时方程（32）、（33）二式亦表明，以逻辑解析为内核的普适构造方法建立的连接方程（31）式并不直接对应着较为简洁的单一非线性动力学微分方程形式。

对于方程（14）式，其解析解（15）式中的 y_0、α、A 可由方程（14）式中的诸系数及常数直接计算给出；而方程（14）式的一般形式（31）式，在相应的动力学微分方程或方程组尚未确立前，方程中的 y_0、α_1、α_2、α_3、A 则需由所研究的具体现象演化过程数据计算给出。

建立现象演化过程的动力学微分方程是重要的，但由于现象演化的多阶段性、多层面性及自反馈性等基本特征，使得建立严谨的动力学微分方程一般是极其困难的。

由方程（34）式，取方程（31）式在平衡点 $x=x_0$ 处邻域的斜率值 $\eta_{\mathrm{SEE}}=0.5A(\alpha_1+\alpha_2)$；则上述连接方程的基本特征即为三斜率关系方程

$$\eta_{\mathrm{S}}\approx k_{\mathrm{S}}\text{、}\eta_{\mathrm{E}}\approx k_{\mathrm{E}}\text{、}\eta_{\mathrm{SEE}}\to k_{\mathrm{SE}}\text{。}\tag{36}$$

此三斜率方程为光滑曲线连接原则，随顺知机善导究竟。

若引入适当的路径约束（或平衡方式），有函数（泛函）表述

$$W(y)=\int_{x_{\mathrm{S}}}^{x_{\mathrm{E}}}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x\text{，}\tag{37}$$

式中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y'_{\mathrm{S}}\approx k_{\mathrm{S}}$，$y'_{\mathrm{E}}\approx k_{\mathrm{E}}$；则一近似解析方法是通过类如一阶变分 Euler-Lagrange 方程

$$\delta W(y)=\delta\int_{x_{\mathrm{S}}}^{x_{\mathrm{E}}}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x=0\text{，}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0\text{；}\tag{38}$$

等相应途径确定连接方程 $y=f(x)$ 的具体表述形式。

显然方程（31）式的微分方程（32）、（33）二式形式比（1）式复杂。方程（31）式当 $\alpha_1=\alpha_2$ 时，简化为

$$y=y_0+A\frac{\sinh[\alpha_1(x-x_0)]}{\cosh[\alpha_3(x-x_0)]}\text{；}\tag{39}$$

当 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ 时，方程（31）式进一步简化为

$$y=y_0+A\tanh[\alpha(x-x_0)]\text{；}\tag{40}$$

即连接方程（31）式为方程（1）式一条件解（15）式中双曲正切函数的拓展形式，描述经典 S 型曲线的 Logistic 函数（19）式亦为连接方程（31）式的简化表述。

由方程（35）式，方程（39）、（40）二式曲线拐点坐标与平衡点坐标处于同一位置。

连接方程（31）式能够自适应曲线间断区域始点、终点邻域斜率，具有多阶导数及多曲线形态，是在平衡点处趋近于间断区域始点至终点直线斜率的最优或最简洁路径光滑曲线方程，可直接应用于诸如饱和过程与蠕变过程分析及人工神经网络模型中的广义激活函数构造等方面。

当间断区域的始点局部平均斜率 k_{S} 及终点局部平均斜率 k_{E} 都较高甚至趋于无穷大时，诸如蠕变过程，则在 $y_{\mathrm{S}}<y_{\mathrm{E}}$ 情况下可由（31）式的坐标置换函数形式描述

$$x=x_0+A_{\mathrm{R}}\frac{\exp[\alpha_{\mathrm{R1}}(y-y_0)]-\exp[-\alpha_{\mathrm{R2}}(y-y_0)]}{2\cosh[\alpha_{\mathrm{R3}}(y-y_0)]}\text{，}\tag{41}$$

这里 A_{R}、$\alpha_{\mathrm{R1,R2,R3}}$ 皆为待定系数，在平衡点处 $x(y=y_0)=x_0$。

1.3 一般曲线间断区域连接的映射方程（参量方程）方法

对于一般的曲线间断区域，当其始点 $P_S(x_S, y_S)$、终点 $P_E(x_E, y_E)$ 先后次序呈现 $x_S \ge x_E$、或于平衡点处 x_0 不在 x_S 与 x_E 之间等的位错及回转情况，则不能直接应用连接方程（31）式进行光滑连接。

下面以连接方程（31）式为基础，给出一般曲线间断区域连接的映射方程（参量方程）方法。

首先将曲线间断区域始点 $P_S(x_S, y_S)$、终点 $P_E(x_E, y_E)$ 其一端、乃至二端数据段平移或旋转操作，生成新的间断区域始点 $P_{mS}(x_{mS}, y_{mS})$、终点 $P_{mE}(x_{mE}, y_{mE})$ 的次序排列，$x_{mS} < x_{mE}$，一般取 $y_{mS} = y_S$、$y_{mE} = y_E$；依据方程（31）式可得新的间断区域自适应连接方程具体形式为

$$y = y_{m0} + A\frac{\exp[\alpha_1(x - x_{m0})] - \exp[-\alpha_2(x - x_{m0})]}{2\cosh[\alpha_3(x - x_{m0})]}, \tag{42}$$

式中 x_{m0}、y_{m0}、A、α_1、α_2、α_3 为新端点次序的间断区域自适应连接方程待定系数，$y(x = x_{m0}) = y_{m0}$。

第二步由间断区域的具体特征构建相应的映射方程

$$x = x(\tau)\text{；}\ x(\tau = x_{mS}) = x_S,\ x(\tau = x_{mE}) = x_E \tag{43}$$

这里 τ 为映射参量或中间参量，$x_{mS} \le \tau \le x_{mE}$。

第三步将方程（42）式与方程（43）式联合形成映射方程组或以 τ 为中间参变量的参量方程形式

$$\begin{cases} y = y_{m0} + A\dfrac{\exp[\alpha_1(\tau - x_{m0})] - \exp[-\alpha_2(\tau - x_{m0})]}{2\cosh[\alpha_3(\tau - x_{m0})]}, \\ x = x(\tau);\quad x(\tau = x_{mS}) = x_S,\ x(\tau = x_{mE}) = x_E \end{cases} \tag{44}$$

将该连接曲线映射到原间断区域；然后去除由移动生成的端点数据段及相应的自适应连接曲线，即得原一般曲线间断区域及由映射方程组给出的光滑连接曲线。

当方程（43）、（44）二式中的映射方程 $x = \tau$ 时，上述映射方程即直接退化为自适应连接方程（31）式。

上述方程（42）～（44）式的三步映射方程方法具有较好的适应性，可对诸多曲线间断区域予以连接描述。

同样对于坐标置换连接时于 $y_S \ge y_E$ 或 y_0 不在 y_S 与 y_E 之间情况下的较复杂间断区域，可参照上述映射方程方法，进行端点数据段移动生成新的间断区域始点 $P_{mS}(x_{mS}, y_{mS})$、终点 $P_{mE}(x_{mE}, y_{mE})$，$y_{mS} < y_{mE}$，$x_{mS} = x_S$、$x_{mE} = x_E$；依据坐标置换方程（41）给出新间断区域的自适应连接方程具体形式，然后根据间断区域特征构建映射方程 $y = y(\tau)$，形成映射的参量方程

$$\begin{cases} x = x_{m0} + A_{Rm}\dfrac{\exp[\alpha_{R1}(\tau - y_{m0})] - \exp[-\alpha_{R2}(\tau - y_{m0})]}{2\cosh[\alpha_{R3}(\tau - y_{m0})]}, \\ y = y(\tau);\quad y(\tau = y_{mS}) = y_S,\ y(\tau = y_{mE}) = y_E \end{cases} \tag{45}$$

进行映射连接分析；这里 x_{m0}、y_{m0}、A_{Rm}、α_{R1}、α_{R2}、α_{R3} 为新端点次序排列的间断区域自适应连接方程待定系数；且有

$$x(y = y_{m0}) = x_{m0}\text{，}\quad y_{mS} \le \tau \le y_{mE}\text{。}$$

上述二维空间曲线间断区域的连接方程计算方法为多维空间数据组间断区域的光滑自适应连接提供运算基础，诸如对轨道交通路径（轨道跨越光滑连接及变轨过渡曲线）、模型光滑曲面等领域的自适应连接计算。

1.4 自适应连接方程与非线性动力学方程的关系及最优或最简洁路径光滑曲线原理

1.4.1 非线性微分方程的等效解析解方法

对于方程（1）式，其近似等效解析解的分析方法主要步骤为：

第一步，简化难解的非线性方程为可解或易解的线性或非线性方程形式，解出其解析解；

第二步，根据分析方向或需要，拓展或推广该解析解形式，拟作为原微分方程的初始近似等效解析解，将此拟解代入原方程中试算或对比解析解，初步确定拓展或推广中设置的待定函数及系数；

第三步，根据代入试算结果，对此拟解予以适当修正再代入原方程循环试算，确定最终近似等效解析解具体形式。

上述分析表明方程（29）式及（31）式皆为方程（1）式条件解析解（15）式中双曲正切函数的一拓展形式，即从非线性动力学方程方面考察，方程（31）式为方程（1）式的一近似等效解析解形式；其中方程（31）式有 x_0、A、α_1、α_2、α_3 共计 5 个待定系数；方程（1）式在 $\varpi_2 \ne 0$ 时亦可取有 $\varpi_1\varpi_2^{-1}$、$\sigma_1\varpi_2^{-1}$、$\sigma_2\varpi_2^{-1}$、$\sigma_3\varpi_2^{-1}$、$[\psi_{EE} - \sigma_{IE}]\varpi_2^{-1}$ 共计 5 个常量；应用近似等效解析解方法，将方程（31）式代入到方程（1）式中，导数部分及多项式部分皆出现包含在 $[\cosh[\alpha_3(x - x_0)]]^{-3}$、$[\cosh[\alpha_3(x - x_0)]]^{-2}$、$[\cosh[\alpha_3(x - x_0)]]^{-1}$ 的函数项以及相关常数项，附加方程（1）、（31）二式在 $x = x_0$ 处平衡点附近临域的关系方程

$$0.5A\varpi_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \sigma_1 y_0 + \sigma_2 y_0^2 + \sigma_3 y_0^3 = \psi_{EE} - \sigma_{IE}\text{；} \tag{46}$$

进而确定方程（31）式诸系数与方程（1）式诸常量之间关系的方程组，近似给出方程（31）式中诸系数的单值或多值表述。

应指出，近似等效解析解方法仅是一种趋势性分析途径，尤其是等效解析解的函数形式与原非线性微分方程的内涵相比较过于简单或过于复杂时，难以求出近似等效解析解中全部系数与原微分方程中诸常量的关系表达式，此亦为近似等效解析解方法的固有不足及局限性。

依据方程（1）式的条件解（15）式及拓展方程（31）式，方程（3）式亦有电荷量的双曲正切函数解或拓展型双曲正切曲线等效解析解，电存元件符号“—┘┌—”及电敏元件符号“—┘┌┘—”即是对 RCNG 串联电路直接输出电荷量双曲正切曲线或拓展型双曲正切曲线的标记。

1.4.2 自然最优原则或或自然简洁原则

自然最优原则或或自然简洁原则：自然现象总是处在动态平衡的变化中，所有变化都有相应的演化过程；现象演化状态间转变方程在一般情况下遵循自然最优或最简洁路径光滑曲线方程形式，于趋势层面包括阶跃瞬变与极缓慢转变在内的过程皆可由方程（1）式予以描述，其近似等效解析解（31）式即为此状态转变方程具体形式之一，乃至为最优路径光滑曲线等效方程形式之一。

在此状态间转变最优或最简洁路径光滑曲线方程原则的意义上，包括在波动时频率及振幅取相应极限值等，初步表明方程（1）式实为一微分方程组的极限解形式。

在近似等效情况下，一个平衡性或激励平衡性的动力学演化微分方程，一般对应着一个泛函变分表述形式。

由方程（1）式还可得一简单的兼容性微分方程形式

$$\varpi_2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+[\varpi_{\mathrm{N0}}+\varpi_{\mathrm{N1}}y]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sigma_1y=\psi_{\mathrm{EE}}-\sigma_{\mathrm{IE}}\text{，}\tag{47}$$

式中$\varpi_1=\varpi_{\mathrm{N0}}+\varpi_{\mathrm{N1}}y$，$\varpi_{\mathrm{N0}}$、$\varpi_{\mathrm{N1}}$为常量，$\varpi_2$、$\sigma_1$、$\psi_{\mathrm{EE}}-\sigma_{\mathrm{IE}}$皆为关于的系函数。

方程（47）式具有显著的变频波动特征；当$\varpi_{\mathrm{N1}}=0$时，其为二阶线性微分方程；而当$\sigma_1=0$、$\psi_{\mathrm{EE}}-\sigma_{\mathrm{IE}}=0$、$\varpi_2$为常量时，其为双曲正切函数的非线性微分方程形式

$$\varpi_2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+[\varpi_{\mathrm{N0}}+\varpi_{\mathrm{N1}}y]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\text{。}\tag{48}$$

根据天体运行轨道的一般性 Binet 方程[5]

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=u_0[2\exp[4c^{-2}u+4\beta]-\exp[2c^{-2}u+2\beta]]\text{；}\tag{49}$$

该方程为含有参量时间t的轨道方程组经消去时间t后的简化形式；在弱场时因$4c^{-2}u+4\beta<<1$，故可将方程右端予以二阶 Taylor 级数展开得

$$\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}\theta^2}+\kappa_1\tau^2+\kappa_2=0\text{，}\quad\tau=u-\kappa_0\tag{50}$$

式中$u=\dfrac{G_{\mathrm{N}}M_0}{r}$，$u_0=\dfrac{G_{\mathrm{N}}M_0}{a(1-e^2)}$；$\beta=-\dfrac{G_{\mathrm{N}}M_0}{2c^2a}$；

$$\kappa_0=c^2[(28u_0)^{-1}(c^2-6u_0)-\beta]\text{，}\quad\kappa_1=-14u_0c^{-4}\text{，}$$

$$\kappa_2=u_0[3.5c^{-4}\kappa_0^2-14\beta^2-6\beta-1]\text{；}$$

方程（50）式为方程（49）式在弱场时的近似式，亦为微分方程组经消元简化近似后给出的微分方程（1）式的特殊形式；这里G_{N}为 Newton 引力常数，c为真空中光速，M_0为主星体质量，r、θ、a、e分别为次星体公转轨道的极坐标矢径、弧度、轨道半长径、轨道偏心率。

线性总是同一层面非线性的极限表述，而非线性则是另一层面线性的近似形式；当将经典饱和过程在极限上的定值替换为演化方程时，则一般的非饱和过程即可转化为广义饱和过程；其有三个层面：定值（短程局部区域）、定演化趋势（中程较为复杂）、定演化规律及关于演化规律的规律（于长程上演化规律之间的跳转），乃至定非定；这也是动力学微分方程研究的主旨内容；在此第三层面，由现象演化过程诸阶段的系列规律构成规律谱系或规律谱阵；此中规律可以进一步细化为细微的规律谱系或规律谱阵，规律之间通过常数次第解析展开与合并进行连接，规律谱系或规律谱阵可在趋势上凝聚为一个规律。在此第三层面也即基本近于出离数学及物理学了，尤为重要的是在此层面尽头可将数学及物理学研究成就从人生华丽舞台转化为人生朴素台阶，这是人生旅程至为关键的一步；传递和历经具有等效性，变换和映射没有疆界。其中之一是，通过引进常数角度$s=\arctan i$及基于 Euler 公式可得无穷及 ln0 的虚数形式标记方程[6]

$$\exp[i\arctan i]=0\text{，}\quad i=\sqrt{-1}\tag{51}$$

$$\ln 0=[n\pi+\arctan i]i\text{，}\quad n=0,1,2,3,\ldots\tag{52}$$

而下面二个常系数置换方程在趋势上具有等效的条件解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\sigma_{11}x^2+\sigma_{12}=0\text{，}\tag{53}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sigma_{21}y^2+\sigma_{22}=0\text{；}\tag{54}$$

此二方程条件解及变形方程（同（39）式形式）分别为

$$y=0.93\times2\pi^{-1}\arctan[0.1(x\pm1)]\text{，}\tag{55}$$

$$y=0.8\frac{\sinh[0.0550(x\pm1)]}{\cosh[0.0544(x\pm1)]}\text{；}\tag{56}$$

其类如软磁材料或纳米粒子磁滞回线[7]趋势性方程简略形式；二方程曲线如图 1 所示，这里只显示右单边部分。

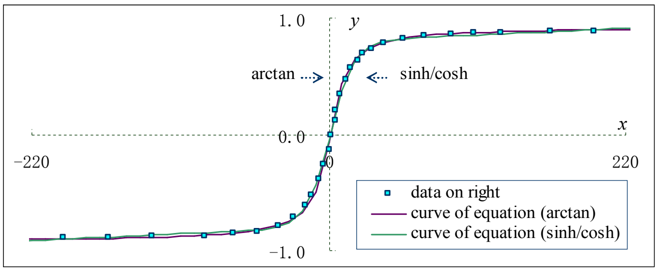

图 1 软磁材料磁滞回线右单边趋势方程等效曲线图

Fig. 1 Equivalent curves figure of tendency equations of right single magnetic hysteresis loop for soft magnetic material which obtained from arctangent function and hyperbolic tangent function

对于一般磁性材料，基于方程（53）式给出的饱和磁滞回线左右单边轮廓层面为方程（57）式

$$y=1.11\times2\pi^{-1}\arctan[0.035(x\pm69)]\mp0.03\text{；}\tag{57}$$

方程曲线如图 2 所示。这里图 1 及图 2 中的数据为图形曲线比例数据，方程与数据相关系数皆大于 0.998。

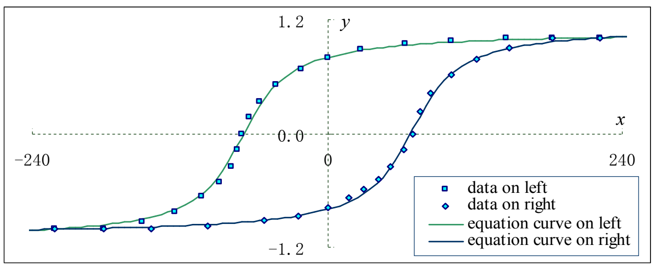

图 2 磁性材料饱和磁滞回线趋势方程曲线图

Fig. 2 Curves figure of tendency equation of saturation magnetic hysteresis loop for magnetic material which obtained from arctangent function

磁滞曲线可有多种方程阐释，上述方程仅是在唯象层面的描述，不具有原理层面机理解析上的意义。

1.5 自然现象演化系列相变特征函数的扩展型双曲正切级数表示形式及自然演化平衡法则

对于自然现象演化，一般具有多阶段平衡的系列相变特征；依据方程（31）式，此系列相变特征所表现的曲线或连续函数 $y=f(x)$ 可近似展开为如下级数形式

$$f(x)=f(x_{01})-A_1+\sum_{\Lambda=1}^{\Theta}A_\Lambda\left[1+\frac{\exp[\alpha_\Lambda(x-x_{0\Lambda})]-\exp[-\beta_\Lambda(x-x_{0\Lambda})]}{2\cosh[\gamma_\Lambda(x-x_{0\Lambda})]}\right]+\lambda_S\,,\qquad(58)$$

这里（58）式为系列相变方程；其 $f(x_{01})$ 为初始段平衡点纵坐标；Θ、Λ 为自然数，$\Theta\geq1$、$\Theta\geq\Lambda\geq1$；$x_{0\Lambda}$ 为 $y=f(x)$ 曲线各分段中心平衡点横坐标；A_Λ、α_Λ、β_Λ、γ_Λ 为各分段曲线形态系数；λ_S 为级数整体偏移量。

特别地，若曲线诸分段在接点处近似等效为水平线，则可有 $\lambda_S\approx0$；当 $\Theta\geq3$ 时，方程（58）式即简化为

$$f(x)=f(x_{01})+A_1\frac{\exp[\alpha_1(x-x_{0\Lambda})]-\exp[-\beta_1(x-x_{0\Lambda})]}{2\cosh[\alpha_1(x-x_{0\Lambda})]}+\sum_{\Lambda=2}^{\Theta-1}A_\Lambda[1+\tanh[\alpha_\Lambda(x-x_{0\Lambda})]]+A_\Theta+A_\Theta\frac{\exp[\alpha_\Theta(x-x_{0\Theta})]-\exp[-\beta_\Theta(x-x_{0\Theta})]}{2\cosh[\beta_\Theta(x-x_{0\Theta})]}\,。\qquad(59)$$

当曲线前后端分段皆可等效为水平线时，（59）式成为

$$f(x)=f(x_{01})-A_1+\sum_{\Lambda=1}^{\Theta}A_\Lambda[1+\tanh[\alpha_\Lambda(x-x_{0\Lambda})]]\,。\qquad(60)$$

方程（58）、（59）式阐释了自然现象演化一个基本法则。

自然演化平衡法则：自然现象演化过程一般存在阶段性极限，极限之间状态转化传递，逐次与演化环境相应层面动态平衡形成系列相变，演化平衡过程可由方程（58）式或（59）式予以趋势性近似描述；演化过程性、动态平衡性、相变系列性、辗转因果性、隐显含转性、层次无限性、多重反馈性，是自然现象的内秉特征。

自然演化平衡法则，在物理学领域对诸如量子理论中状态瞬变阶跃过程与深层背景激励参量的极缓变过程的细节刻画具有引导意义，为广泛的序列阶跃过程瞬变机理与诸常数的更基本常数解析展开描述提供参考。在数学领域，Taylor 级数及 Fourier 级数具有主项大区域定调、次项逐级细节修正逼近的特征；而（58）式或（59）式表述的级数，则具有诸项逐阶渐近的特征，前一项为后一项提供延展台阶；其不同于 Taylor 级数的幂函数叠加形式，而类似于 Fourier 级数的序列函数叠加形式，比较适用于对开放系统部分参量演化的趋势分析等方面。

由方程（60）式，可构造窗函数($\alpha_1>0$、$\alpha_2>0$)与台阶函数($\alpha_1\alpha_2<0$)为

$$w=0.5[\tanh[\alpha_1(x-x_{01})]-\tanh[\alpha_2(x-x_{02})]]\,;\qquad(61)$$

其中时域窗函数在 $\alpha_1\alpha_2>0$ 时还可表示为

$$w=0.5[1-\tanh[\alpha_1(x-x_{01})]\tanh[\alpha_2(x-x_{02})]]\,。\qquad(62)$$

由方程（62）式构造时域 t 的窗函数 w_t，可得岩体爆破单孔单响振动加速度 g_R 的趋势方程（唯象拟合）

$$g_R=w_t\sin[\alpha_R(t-t_{R0})]\,,\qquad(63)$$

式中 α_R、t_{R0} 为常量；亦可由变频方程（47）式近似得起振段等效变频的幅值衰减振动趋势性方程形式；方程曲线如图 3 所示。

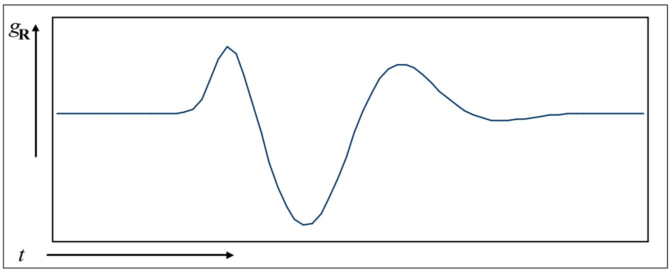

图 3 岩体爆破单孔单响振动加速度拟合方程曲线图

Fig. 3 Fitting equation curve figure of vibration acceleration of single hole blasting of once each time point in rock mass blasting process

1.6 基于饱和过程方程的广义分布函数形式延展方向

在普遍意义上，一个严格的饱和过程方程，包括可转化为严格饱和过程的蠕变过程方程等形式，因其在趋势上具有极限性特征，则一般地将其调零归一化后即转换为广义分布函数形式，其亦对应着一个广义分布密度函数。

取一严格的饱和过程方程形式为

$$y_{es}=f_{es}(x)\,,\quad x\in(-\infty,+\infty)\qquad(64)$$

其饱和性或极限性特征为

$$y_{es}(x\to-\infty)=y_{es\min}\,,\quad y_{es}(x\to+\infty)=y_{es\max}\,;\qquad(65)$$

$$y_{es\max}>y_{es\min}\,,\quad \frac{\mathrm{d}f_{es}(x)}{\mathrm{d}x}>0\,;\qquad(66)$$

即有调零（$[f_{es}(x)-y_{es\min}]$）归一化（$[y_{es\max}-y_{es\min}]^{-1}$）后转换为广义分布函数 $y_{GD}=f_{GD}(x)$ 的形式为

$$y_{GD}=f_{GD}(x)=\frac{f_{es}(x)-y_{es\min}}{y_{es\max}-y_{es\min}}\,,\qquad(67)$$

式中 $y_{GD}(x\to-\infty)=0$，$y_{GD}(x\to+\infty)=1$。

由广义分布函数（67）式得其所对应的广义分布密度函数 $y_{GDD}=f_{GDD}(x)$ 的形式则为

$$y_{GDD}=f_{GDD}(x)=\frac{\mathrm{d}y_{GD}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y_{es\max}-y_{es\min}}\frac{\mathrm{d}f_{es}(x)}{\mathrm{d}x}\,。\qquad(68)$$

由于部分蠕变过程及一系列能够转化或等效为这类蠕变过程的现象演化过程（如材料断裂、器件电磁击穿、流体湍流等），可以进一步转化为严格的对称或偏对称饱和过程，所以其描述方程调零归一化后也同样对应着相应的广义分布函数及广义分布密度函数，其在极端情况下包括具有小幅值振荡性质的广义分布密度函数形式。

当广义分布密度函数 $y_{GDD}=f_{GDD}(x)$ 已知时，则其广义分布函数 $y_{GD}=f_{GD}(x)$ 及广义数学期望 $E_{GD}(X)$ 为

$$y_{GD}(x)=\int_{-\infty}^{x}f_{GDD}(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad y_{GD}(x\to+\infty)=1\qquad(69)$$

$$E_{GD}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{GDD}(x)\,\mathrm{d}x\,。\qquad(70)$$

上述饱和过程方程与广义分布方程的转化关系，一方面将广泛的严格饱和过程方程及可转化为严格饱和过程的方程形式引入数理统计中成为广义分布函数及广义分布密度函数；另一方面，将数理统计中分布函数及分布密度函数的理论及思想延展到自然科学及社会科学诸多领域解析框架中并继而与之融为一体。

1.7 粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程探讨

自然无限，演化在多层面动态平衡，过程可趋势性描述。带有空间—时间坐标及速度参量的窗函数可给出波或粒子的定域性方程，而与之对应的背景信息则具有非定域性，经广域的信息传递及同机理解析产生关联效应。物理学核心思想及基本理论，通过适当选择运用数学的逻辑解析结构及其延展性，同时尽可能基于实验检验验证而不断成长及拓展疆域，在描述有效的前提下优化简洁构造。一般地；在解析探讨及数据运算处理过程需保留 $+0$ 及 -0 的标记以与 $+\infty$ 及 $-\infty$ 相对应。

下面据此给出粒子统计分布平均能量方程扩展形式与平均粒子数趋势性微分方程及其近似极限或条件解。

绝对温度是描述自然现象的统计性参量之一，历史上，其基本与分子及原子等物质构成层面的动能相联系。1913 年，Einstein 和 Stern 基于 Planck 黑体辐射公式思想、简谐振子的 Einstein 本征能量 E 方程

$$E=\left[n+\frac{1}{2}\right]h\nu\,,\quad 0\le n<+\infty$$

$$\Delta E=E_{n+1}-E_n=h\nu\,,$$

及 Boltzmann 粒子数分布 j 与能量 E 的关系方程

$$\Delta j\propto\exp[-E(kT)^{-1}]\Delta E\,;$$

给出平均能量 $\overline{E}_{\mathrm{ES}}$ 与频率 ν 及绝对温度 T 的关系方程，即 Einstein－Stern 平均能量方程[8]

$$\overline{E}_{\mathrm{ES}}=\frac{1}{2}h\nu+\frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}]-1}\,,$$

这里 n 为自然数，h 为 Planck 常数，k 为 Boltzmann 常数。

现将 n 加以有限自然数 q 限制，同时引入在频率 $\nu=0$ 时的基底能量或本底能量 E_0，则有本征能量 E 为

$$E=E_0+[n+n_\Delta]h\nu\,,\quad 0\le n\le q\,,\quad q>>1 \tag{71}$$

这里 $E_0=E(\nu=0)$，n_Δ 为待定常数。对于简谐振子，$n_\Delta=n_{\Delta\mathrm{E}}=0.5$，$n_{\Delta\mathrm{E}}$ 为 Einstein 简谐振子能量常数。

在考虑 E_0 近于常数时，$\Delta E=h\nu$，得平均能量 $\overline{E}$ 为

$$\begin{aligned}\overline{E}&=\frac{\sum\limits_{E=E_0+0.5h\nu}^{E_0+(q+0.5)h\nu}E\exp[-E(kT)^{-1}]\Delta E}{\sum\limits_{E=E_0+0.5h\nu}^{E_0+(q+0.5)h\nu}\exp[-E(kT)^{-1}]\Delta E}\\&=-\frac{\partial}{\partial(kT)^{-1}}\ln\sum_{E=E_0+0.5h\nu}^{E_0+(q+0.5)h\nu}\exp[-E(kT)^{-1}]\\&=-\frac{\partial}{\partial(kT)^{-1}}\ln\exp[-(E_0+0.5h\nu)(kT)^{-1}]\\&\qquad-\frac{\partial}{\partial(kT)^{-1}}\ln\frac{1-\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]}{1-\exp[-h\nu(kT)^{-1}]}\\&=E_0+\frac{1}{2}h\nu+\frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}]-1}\\&\qquad-\frac{(q+1)h\nu}{\exp[(q+1)h\nu(kT)^{-1}]-1}\,。\end{aligned} \tag{72}$$

方程（72）式即为平均能量方程扩展形式。

由（72）式，在 $E_0<<0.5h\nu$、$(q+1)h\nu(kT)^{-1}>>1$ 时，近似得 Einstein-Stern 平均能量方程

$$\lim_{q\to+\infty}\overline{E}\approx\frac{1}{2}h\nu+\frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}]-1}=\overline{E}_{\mathrm{ES}}\,。 \tag{73}$$

依据方程（72）式，当 $h\nu(kT)^{-1}>>1$ 时，得近似式

$$\begin{aligned}\overline{E}&\approx E_0+\frac{1}{2}h\nu+h\nu\exp[-h\nu(kT)^{-1}]\\&\qquad-(q+1)h\nu\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]\,；\end{aligned} \tag{74}$$

进一步可得趋势性近似极限方程

$$\begin{aligned}\overline{E}&\approx E_0+\frac{1}{2}h\nu[1+2\exp[-h\nu(kT)^{-1}]\\&\qquad-2(q+1)\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]]\\&\approx E_0+\frac{1}{2}h\nu\,。\end{aligned} \tag{75}$$

当 $(q+1)^{-1}<<h\nu(kT)^{-1}<<1$ 时，由方程（72）式得近似式

$$\begin{aligned}\overline{E}&\approx E_0+\frac{1}{2}h\nu+\frac{h\nu}{1+h\nu(kT)^{-1}+2^{-1}[h\nu(kT)^{-1}]^2-1}\\&\qquad-(q+1)h\nu\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]\\&=E_0+\frac{1}{2}h\nu+\frac{h\nu}{h\nu(kT)^{-1}[1+2^{-1}h\nu(kT)^{-1}]}\\&\qquad-(q+1)h\nu\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]\\&\approx E_0+\frac{1}{2}h\nu+kT[1-2^{-1}h\nu(kT)^{-1}]\\&\qquad-(q+1)h\nu\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]\\&=E_0+kT-(q+1)h\nu\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]\,；\end{aligned} \tag{76}$$

进一步可得趋势性近似极限方程

$$\begin{aligned}\overline{E}&=E_0+kT[1-(q+1)h\nu(kT)^{-1}\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]]\\&\approx E_0+kT\,。\end{aligned} \tag{77}$$

当 $h\nu(kT)^{-1}=(q+1)^{-1}$ 时，由方程（72）式得

$$\overline{E}=E_0+\frac{1}{2}h\nu+\frac{(q+1)^{-1}kT}{\exp(q+1)^{-1}-1}-\frac{kT}{e-1}\,； \tag{78}$$

考虑 $q>>1$，有 $(q+1)^{-1}<<1$，得趋势性近似极限方程

$$\begin{aligned}\overline{E}&\approx E_0+\frac{1}{2}h\nu+\frac{(q+1)^{-1}kT}{1+(q+1)^{-1}+2^{-1}(q+1)^{-2}-1}-\frac{kT}{e-1}\\&=E_0+\frac{1}{2}h\nu+\frac{(q+1)^{-1}kT}{(q+1)^{-1}[1+2^{-1}(q+1)^{-1}]}-\frac{kT}{e-1}\\&\approx E_0+\frac{1}{2}h\nu+kT[1-2^{-1}(q+1)^{-1}]-\frac{kT}{e-1}\\&=E_0+\frac{1}{2}h\nu+kT[1-2^{-1}h\nu(kT)^{-1}]-\frac{kT}{e-1}\\&=E_0+\frac{e-2}{e-1}kT\,。\end{aligned} \tag{79}$$

当$0 < h\nu(kT)^{-1} << (q+1)^{-1}$时，由方程（72）式得趋势性近似极限方程

$$\overline{E} \approx E_0 + \frac{1}{2}h\nu + \frac{h\nu}{1 + h\nu(kT)^{-1} + 2^{-1}[h\nu(kT)^{-1}]^2 - 1} - \frac{(q+1)h\nu}{1 + (q+1)h\nu(kT)^{-1} + 2^{-1}[(q+1)h\nu(kT)^{-1}]^2 - 1}$$

$$\approx E_0 + \frac{1}{2}h\nu + kT[1 - 2^{-1}h\nu(kT)^{-1}] - kT[1 - 2^{-1}(q+1)h\nu(kT)^{-1}]$$

$$= E_0 + \frac{1}{2}(q+1)h\nu \text{。} \tag{80}$$

由（75）、（77）、（79）、（80）四式，得方程（72）式在νT^{-1}减小方向近似有趋势性极限表述形式

$$\overline{E} \approx \begin{cases} E_0 + \frac{1}{2}h\nu, & \frac{h\nu}{kT} >> 1 \\ E_0 + kT, & \frac{1}{q+1} << \frac{h\nu}{kT} << 1 \\ E_0 + \frac{e-2}{e-1}kT, & \frac{h\nu}{kT} = \frac{1}{q+1} \\ E_0 + \frac{1}{2}(q+1)h\nu, & 0 < \frac{h\nu}{kT} << \frac{1}{q+1}. \end{cases} \tag{81}$$

可见（81）式中的后二近似趋势极限形式即为平均能量方程扩展形式（72）式的检验判别式，亦为在甚低频段、甚高温区的量子化效应预言及量子理论的频率区间或频率上下限研究提供参考方向。

方程（72）式的一个前提条件为

$$\lim_{E \to +\infty} \exp[-E(kT)^{-1}] \to 0\text{；} \tag{82}$$

即方程（72）式不适用于$T < 0$的区域。

由方程（72）式，在$T \to -0$、$h\nu(b|T|)^{-1} >> 1$时，得近似方程

$$\overline{E} \approx E_0 + \frac{1}{2}h\nu - h\nu[1 + \exp[-h\nu(k|T|)^{-1}]] + (q+1)h\nu[1 + \exp[-(q+1)h\nu(k|T|)^{-1}]]\text{；}$$

即得其近似趋势性极限表述形式

$$\overline{E}(T \to -0) \approx E_0 + \frac{1}{2}h\nu - h\nu + (q+1)h\nu = E_0 + \frac{1}{2}h\nu + qh\nu \text{。} \tag{83}$$

由方程（72）式，在$T \to +0$、$h\nu(bT)^{-1} >> 1$时，得与（74）式相同的近似方程

$$\overline{E} \approx E_0 + \frac{1}{2}h\nu + h\nu\exp[-h\nu(kT)^{-1}] - (q+1)h\nu\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]\text{；}$$

即得与（75）式相同的近似趋势性极限表述形式

$$\overline{E}(T \to +0) = E_0 + \frac{1}{2}h\nu[1 + 2\exp[-h\nu(kT)^{-1}] - 2(q+1)\exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]] \approx E_0 + \frac{1}{2}h\nu \text{。} \tag{84}$$

由极限表述（83）、（84）二式，如果方程（72）直接跨越$T = 0$处，则其于$T = 0$邻域存在零点能量阶跃$\overline{E}_{\pm 0\,\mathrm{step}}$为

$$\overline{E}_{\pm 0\,\mathrm{step}} = \overline{E}(T \to -0) - \overline{E}(T \to +0) \approx E_0 + \frac{1}{2}h\nu + qh\nu - E_0 - \frac{1}{2}h\nu = qh\nu \text{。} \tag{85}$$

作为初步探讨，若将方程（72）式亦适用于$T < 0$的区域，则一途径是直接对 Boltzmann 统计分布方程中的绝对温度T取绝对值

$$\Delta j \propto \exp[-E(k|T|)^{-1}]\Delta E\text{，} \tag{86}$$

方程（72）式成为

$$\overline{E} = E_0 + \frac{1}{2}h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(k|T|)^{-1}] - 1} - \frac{(q+1)h\nu}{\exp[(q+1)h\nu(k|T|)^{-1}] - 1} \text{。} \tag{87}$$

若用数据处理方法，参照（73）式，有连续变化形式

$$\overline{E} = E_0 + \frac{1}{2}h\nu + kT\int \mathrm{d}\frac{x}{\exp x - 1}\text{，}(q+1)\frac{h\nu}{kT} \geq x \geq \frac{h\nu}{kT} \tag{88}$$

这里x取值从$(q+1)h\nu(kT)^{-1}$到$h\nu(kT)^{-1}$连续变化，则得一探讨性的覆盖$T < 0$区域平滑的平均能量方程$\overline{E_{\mathrm{s}}}$为

$$\overline{E_{\mathrm{s}}} = E_0 + \frac{1}{2}h\nu + b|T|\frac{\exp[h\nu(b|T|)^{-1}] - 1}{\exp[h\nu(k|T|)^{-1}] - 1}\text{，} \tag{89}$$

式中b为待定常数，$b >> k$。

当$E_0 << 0.5h\nu$、$T > 0$、$h\nu(bT)^{-1} << 1$时，方程（89）式即转化为 Einstein－Stern 平均能量方程形式

$$\overline{E_{\mathrm{s}}} \approx \frac{1}{2}h\nu + bT\frac{[1 + h\nu(bT)^{-1}] - 1}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} = \frac{1}{2}h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} \text{。} \tag{90}$$

而当$h\nu(b|T|)^{-1} >> 1$时，由方程（89）式得

$$\lim_{|T| \to 0}\overline{E_{\mathrm{s}}} = E_0 + \frac{1}{2}h\nu + \lim_{|T| \to 0}\frac{b|T|}{\exp[h\nu(k^{-1} - b^{-1})|T|^{-1}]} \approx E_0 + \frac{1}{2}h\nu \text{。} \tag{91}$$

较为简单地，作为对粒子系统统计分布方程的趋势性分析，参考方程（1）式，在渐变连续或等效渐变连续的趋势性探索方向，可初步构建绝对温度为T时分布在能级E上一个量子态上平均粒子数n_{S}的非线性微分方程趋势性简略形式为

$$z_0\frac{\mathrm{d}^2 n_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}n_{\mathrm{E}}^2}+\frac{\mathrm{d}n_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}n_{\mathrm{E}}}+z_{\mathrm{IE}}+n_{\mathrm{S}}+z_{\mathrm{s}}n_{\mathrm{S}}^2+z_{\mathrm{c}}n_{\mathrm{S}}^3=z_{\mathrm{EE}}\text{，}\tag{92}$$

这里$n_{\mathrm{E}}=E(kT)^{-1}+\alpha_{\mathrm{E}}$，$\alpha_{\mathrm{E}}$为与$kT$相关的待定参量，是对$n_{\mathrm{E}}$中主项$E(kT)^{-1}$予以补充的参量，诸如在部分分布中包含着化学势$\mu$项，即$\alpha_{\mathrm{E}}=-\mu(kT)^{-1}+\alpha_{\mathrm{C}}$，$\alpha_{\mathrm{C}}$为常量；$z_0$、$z_{\mathrm{s}}$、$z_{\mathrm{c}}$为待定常数，$z_{\mathrm{IE}}$为内激励函数，$z_{\mathrm{EE}}$为外激励函数；一般取$n_{\mathrm{S}}(n_{\mathrm{E}}\to+\infty)=0$。

对于方程（92）式，当内激励函数与外激励函数相平衡$z_{\mathrm{IE}}=z_{\mathrm{EE}}$、及$z_0=0$、$z_{\mathrm{c}}=0$时，有简略微分方程

$$\frac{\mathrm{d}n_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}n_{\mathrm{E}}}+n_{\mathrm{S}}+z_{\mathrm{s}}n_{\mathrm{S}}^2=0\text{；}\tag{93}$$

在$\mathrm{d}n_{\mathrm{S}}/\mathrm{d}n_{\mathrm{E}}=0$时即得方程（93）式的二个常量解为

$$n_{\mathrm{S}}=0\text{；}\quad n_{\mathrm{S}}=-z_{\mathrm{s}}^{-1}\text{，}\quad z_{\mathrm{s}}\neq 0\text{。}$$

依据方程(93)式，当$n_{\mathrm{S}}>0$时，则在$z_{\mathrm{s}}=0$，$z_{\mathrm{s}}\neq 0$、$z_{\mathrm{s}}^{-1}+n_{\mathrm{S}}>0$，$z_{\mathrm{s}}\neq 0$、$z_{\mathrm{s}}^{-1}+n_{\mathrm{S}}<0$三种情况下分别得

$$\ln n_{\mathrm{S}}=-n_{\mathrm{E}}+B_1\text{，}\tag{94}$$

$$\ln n_{\mathrm{S}}-\ln[z_{\mathrm{s}}^{-1}+n_{\mathrm{S}}]=-n_{\mathrm{E}}+B_2\text{，}\tag{95}$$

$$\ln n_{\mathrm{S}}-\ln[-z_{\mathrm{s}}^{-1}-n_{\mathrm{S}}]=-n_{\mathrm{E}}+B_3\text{；}\tag{96}$$

进而得方程（93）式的三个条件解析解形式分别为

$$n_{\mathrm{S}}=\exp[-(E-\mu)(kT)^{-1}-(\alpha_{\mathrm{C}}-B_1)]\text{，}\tag{97}$$

$$n_{\mathrm{S}}=\frac{z_{\mathrm{s}}^{-1}}{\exp[(E-\mu)(kT)^{-1}+(\alpha_{\mathrm{C}}-B_2)]-1}\text{，}\tag{98}$$

$$n_{\mathrm{S}}=\frac{-z_{\mathrm{s}}^{-1}}{\exp[(E-\mu)(kT)^{-1}+(\alpha_{\mathrm{C}}-B_3)]+1}\text{；}\tag{99}$$

这里B_1、B_2、B_3为待定常量。

方程（97）～（99）式给出绝对温度为T时在能级E上一个量子态中平均粒子数的趋势分布形式。作为对比，三式依次当$z_{\mathrm{s}}=0$、$\alpha_{\mathrm{C}}=B_1$，$z_{\mathrm{s}}=1$、$\alpha_{\mathrm{C}}=B_2$，$z_{\mathrm{s}}=-1$、$\alpha_{\mathrm{C}}=B_3$时即分别对应着 Maxwell-Boltzmann 统计分布、Bose-Einstein 统计分布及 Fermi-Dirac 统计分布里绝对温度为T时在能级E上一量子态中平均粒子数诸方程形式

$$n_{\mathrm{S}}=\exp[-(E-\mu)(kT)^{-1}]\text{，}\quad z_{\mathrm{s}}=0\tag{100}$$

$$n_{\mathrm{S}}=\frac{1}{\exp[(E-\mu)(kT)^{-1}]-1}\text{，}\quad z_{\mathrm{s}}=1\tag{101}$$

$$n_{\mathrm{S}}=\frac{1}{\exp[(E-\mu)(kT)^{-1}]+1}\text{；}\quad z_{\mathrm{s}}=-1\text{。}\tag{102}$$

上述平均能量方程扩展形式及平均粒子数微分方程是属于在趋势方向探讨试错性的，为深入研究提供参考。

一般地，所谓的极限仅是现下理论框架的阶段性局部结论；在更广阔的诸多层面，已有的极限形式仅是一种局部条件解表述。真空、光速、绝对零度、超流(固)体，真空的诸层阶次背景能量及信息构造、超光速运动、负绝对温度区域、自由相体、量子状态阶跃瞬变过程等，皆是分属于同类相变附近层面紧密关联问题；而零点能量表述形式即与天体构成及运行背景、引力机理、超光速、波粒二象性、量子结构、量子纠缠、Casimir 力、Higgs 机制等密切相关，是解析开 G_{N}、c、h的重要方向，对真空的诸层背景每一阶次的深刻认识都会加固并拓展物理学根基。目前描述的四种作用力应仅是自然界诸多作用力的一部分，对其所作的统一框架探索在机械论层面无有止境。

根本上，基本常数是包含更基本常数的局部能量时空尺度方程数值形式近似表示，现象演化过程的规律谱系通过基本常数的次第解析展开连接延展，在表观展现为现象演化的相变系列性；由此，数理逻辑是开环周期体系。

2 连接方程的适应性

对于自然现象，数理方程描述虽不究竟但亦颇有力量；理论框架相对于现象演化多为趋势性概述，乃至仅是局部轨迹割线或切线方向的阐释，但透过对现象网络阵列中一个节点的深刻认识，仍可获得对其它节点的简略理解，虽然每个节点又都包含着无穷层面的无穷问题。归根结底，科学仅是台阶和指向，旨在建立有限参量数据间的因果交织方程及进行阶段性趋势预测；原理是唯象的，解析是局部的；过度复杂会渐失适用性，而过度理想简化亦会导致较大偏差；原理朴直，解析适度，简洁有效即可。

下面对有关现象的趋势性描述不具有原理层面的解析意义，其远离纲领性的主线脉络，是悄然路过科学台阶、眺望自然远峰的并行途径，其中待定系数过多及与物理学和力学常数或基础方程没有建立普适联系是主要原因，基本属于探讨性的描述，其旨在介绍连接方程及复合函数形式对自然现象变化过程于趋势或包络层面上的适应性。

2.1 稳定核素比结合能方程及核素结合能的理论最大值——稳定核素分布及结合能曲线远景特征的趋势分析方法

目前的核素结合能（质量）公式主要是由 Weizsäcker 液滴能(含体能、表面能、Coulomb 能、对称能、奇偶能)、Strutinsky 壳修正能、残余修正能等相关项构建的方程，是基于唯象构架的局部解析延展形式，有五个以上待定系数，由对实验数据的方程拟合确定，核素计算较为广泛。

下面通过对稳定核素数据[9, 10]的讨论给出趋势分析方法，主要进行稳定核素分布、比结合能及结合能（质量）的趋势性计算，其仍是基于数据分析的唯象构造形式。

由稳定核素中子数N与质子数（原子序数）Z之间的实验数据，将中子数N与质子数Z平滑等效为渐变连续参量，已有研究给出一简洁的趋势性方程为[11]

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}Z}+\sigma_{01}N^2+\sigma_{02}=0\text{，}\quad N(Z=1)=0\tag{103}$$

式中σ_{01}、σ_{02}为待定常量，二待定常量由对实验数据的拟合确定；一组值为$\sigma_{01}=-3.646\times10^{-5}$，$\sigma_{02}=-1.344$。

方程（103）式为方程（1）式的特殊形式；其一周期性解 $N(Z)$ 形式为

$$N = 192\tan[0.007(Z-1)]\text{。} \qquad (104)$$

根据方程（104）式，得可能存在的包括目前化学元素周期表及核素分布在内的各大周期质子数 Z 的起始值 $Z_{j\,\mathrm{Start}}$、终止值 $Z_{j\,\mathrm{End}}$、相邻大周期间隔 $Z_{j\,\mathrm{ILP}}$ 分别为

$$Z_{j\,\mathrm{Start}} = 143(j-1)\pi + 1\text{，} \qquad (105)$$

$$Z_{j\,\mathrm{End}} = 143(j-0.5)\pi + 1\text{，} \qquad (106)$$

$$Z_{j\,\mathrm{ILP}} = (Z_{j+1\mathrm{Start}} - 1) - (Z_{j\,\mathrm{End}} + 1) + 1$$
$$= 143 \times 0.5\pi - 1 \approx 224\text{；} \qquad (107)$$

式中 j 为自然数，$j \ge 1$。

在第一大周期质子数起始值 $Z_{1\mathrm{Start}}$ 与终止值 $Z_{1\mathrm{End}}$ 为

$$Z_{1\mathrm{Start}} = 143(1-1)\pi + 1 = 1\text{，} \qquad (108)$$

$$Z_{1\mathrm{End}} = 143(1-0.5)\pi + 1 \approx 225\text{；} \qquad (109)$$

方程（104）式曲线及与实验数据对比结果如图 4 所示。

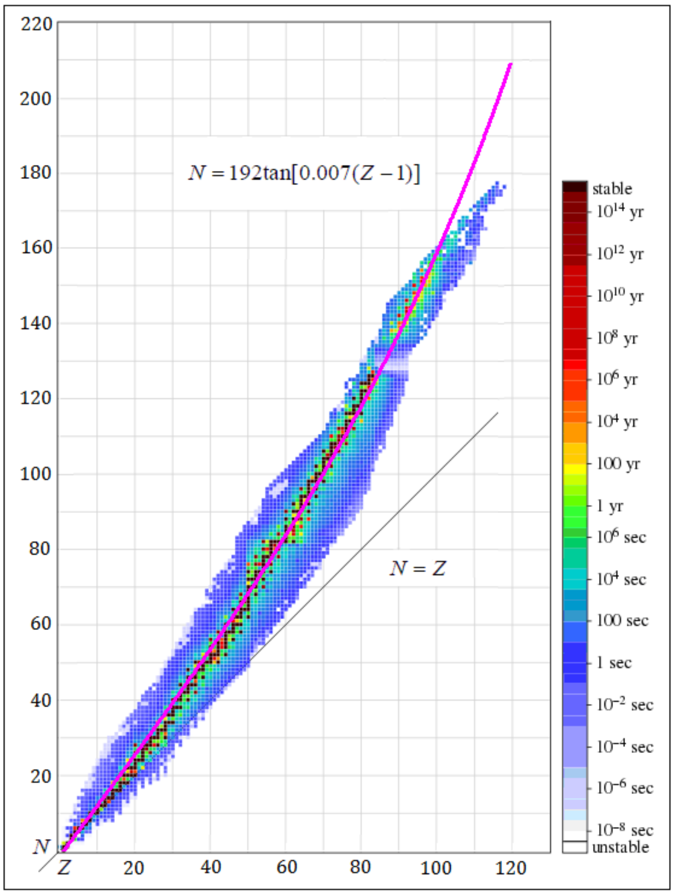

图 4 趋势方程 $N(Z)$ 曲线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图

■ 稳定核素数据点(from website of nndc.bnl.gov or en.wikipedia.org) [10]

— 趋势方程曲线(from website of nature.ac.cn) [11]

Fig.4 Comparison result figure between the curve of tendency equation $N(Z)$ and the experimental distribution data points of the stable nuclides

■ point of stable nuclide data(from website of nndc.bnl.gov or en.wikipedia.org) [10]

— curve of tendency equation(from website of nature.ac.cn) [11]

由方程（104）式，可得以中子数 N 表示质子数 Z 的周期性饱和方程 $Z(N)$ 形式为

$$Z = 1 + 143\arctan[0.0052N]\text{；} \qquad (110)$$

方程（110）式曲线及与实验数据对比结果如图 5 所示。

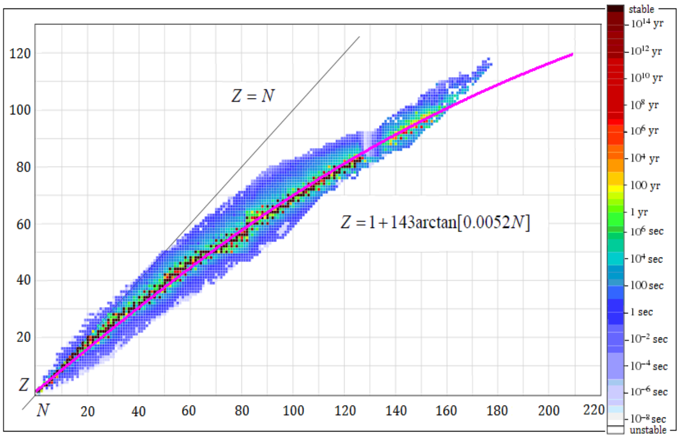

图 5 趋势方程 $Z(N)$ 曲线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图

■ 稳定核素数据点[10] — 趋势方程曲线[11]

Fig.5 Comparison result figure between the curve of tendency equation $Z(N)$ and the experimental distribution data points of the stable nuclides

■ point of stable nuclide data[10] — curve of tendency equation[11]

下面给出稳定核素比结合能及结合能的趋势性方程。

基于方程（31）式及稳定核素分布和比结合能或平均结合能数据资料[9, 10]，对其趋势特征的等效渐变分析可得稳定核素的比结合能或平均结合能 ε（MeV）与核子数 A_N（$A_\mathrm{N} = Z + N$）之间关系的波动扩展趋势性方程为

$$\varepsilon = b_0 \frac{\exp[\alpha_{01}(A_\mathrm{N}-1)] - \exp[-\alpha_{02}(A_\mathrm{N}-1)]}{2b_\mathrm{A}\cosh[\alpha_{03}(A_\mathrm{N}-1)]} b_\mathrm{w}\text{，} \qquad (111)$$

式中 b_0、α_{01}、α_{02}、α_{03} 为待定常量，b_w 为波动扩展函数，b_A 为趋势比函数，其皆由数据拟合确定。

对于（111）式，当略去方程的波动部分，即取波动扩展函数 $b_\mathrm{w} \approx 1$、趋势比函数 $b_\mathrm{A} = 1$ 时，则方程简化为

$$\varepsilon = b_0 \frac{\exp[\alpha_{01}(A_\mathrm{N}-1)] - \exp[-\alpha_{02}(A_\mathrm{N}-1)]}{2\cosh[\alpha_{03}(A_\mathrm{N}-1)]}\text{。} \qquad (112)$$

对于稳定核素比结合能的数据分析，方程（107）式可以有多种具体形式，待定常量 b_0、α_{01}、α_{02}、α_{03} 可以有多组表示，其中一组值为 $b_0 = 9.5\,\mathrm{MeV}$、$\alpha_{01} = 0.040$、$\alpha_{02} = 0.50$、$\alpha_{03} = 0.041$；则当 $b_\mathrm{w} \approx 1$ 时有简化方程（112）式的具体形式为

$$\varepsilon = 9.5 \frac{\exp[0.040(A_\mathrm{N}-1)] - \exp[-0.50(A_\mathrm{N}-1)]}{2\cosh[0.041(A_\mathrm{N}-1)]}\text{。} \qquad (113)$$

方程（113）式曲线如图 6 所示，方程与数据之间相关系数为 0.9696。

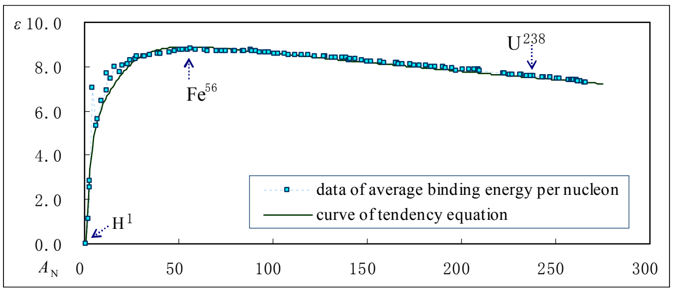

图 6 稳定核素比结合能趋势方程曲线图

Fig. 6 Curve figure of tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

对于稳定核素比结合能数据，核子数 A_{N} 从 4 到 56 曲线附近（从 He^4 始，经 C^{12}、O^{16} 到 Fe^{56} 附近）数据有从显著到细微的波动特征；在数据曲线拟合趋势层面上，b_{w} 有多种函数形式，其双边波动扩展的一简略形式为

$$b_{\mathrm{w}}=1+b_{\mathrm{w0}}\exp[-\gamma_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos[2\pi f_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N}}-A_{\mathrm{N0}})]\text{；}\quad(114)$$

单边波动扩展的一简略形式为

$$b_{\mathrm{w}}=1+b_{\mathrm{w0}}\exp[-\gamma_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos^2[\pi f_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N}}-A_{\mathrm{N0}})]\text{；}\quad(115)$$

这里 b_{w0} 为波动扩展系数，γ_{w}、A_{N0} 为待定常数，f_{w} 为数据波动频率，$f_{\mathrm{w}}=T_{\mathrm{w}}^{-1}$，$T_{\mathrm{w}}$ 为数据波动周期。

对于核素比结合能数据波动曲线，双边波动扩展侧重展示方程形式的波动趋势，单边波动扩展主要进行数据拟合处理。以下依据单边波动扩展函数（115）式进行分析。

由核素比结合能数据曲线在核子数 A_{N} 从 4 到 56 附近的波动特征，可得数据波动周期 T_{w}、频率 f_{w} 及待定常数 A_{N0} 为

$$T_{\mathrm{w}}\approx 4\text{，}\quad f_{\mathrm{w}}=T_{\mathrm{w}}^{-1}\approx 0.25\text{；}\quad A_{\mathrm{N0}}=0\text{；}\qquad(116)$$

即得其系列比结合能峰值 $\varepsilon_{\mathrm{P}l}$ 为

$$\varepsilon_{\mathrm{P}l}=\varepsilon(A_{\mathrm{N}}=4l)\text{；}\qquad(117)$$

这里 l 为自然数，$l\geq 1$。

简单地，当取系数 $b_{\mathrm{w0}}=1$ 时，由方程（115）式及（116）式得单边波动扩展函数 b_{w} 为

$$b_{\mathrm{w}}=1+\exp[-\gamma_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\mathrm{N}})\text{；}\quad(118)$$

方程（111）式成为

$$\varepsilon=b_0\frac{\exp[\alpha_{01}(A_{\mathrm{N}}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2b_{\mathrm{A}}\cosh[\alpha_{03}(A_{\mathrm{N}}-1)]}$$
$$\times[1+\exp[-\gamma_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\mathrm{N}})]\text{。}\quad(119)$$

由方程（113）式中的参数，及当常数 $\gamma_{\mathrm{w}}=0.155$ 时，得方程（119）式在 $b_{\mathrm{A}}=1$ 情况下的一具体简略形式为

$$\varepsilon=9.5\frac{\exp[0.040(A_{\mathrm{N}}-1)]-\exp[-0.50(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2\cosh[0.041(A_{\mathrm{N}}-1)]}$$
$$\times[1+\exp[-0.155(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\mathrm{N}})]\text{。}\quad(120)$$

方程（120）式 A_{N} 从 1 到 90 的局部曲线如图 7 所示，A_{N} 从 1 到 275 的曲线如图 8 所示，其中在图 8 中方程与数据之间相关系数为 0.9750。

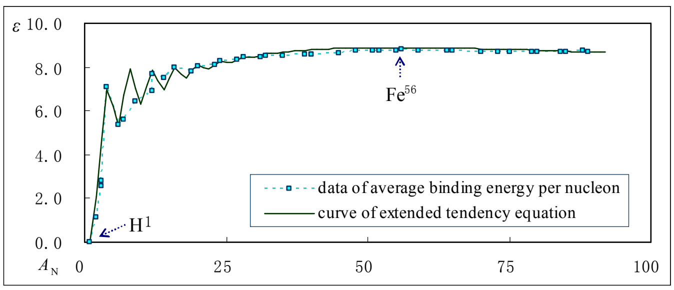

图 7 稳定核素比结合能单边拓展趋势方程局部曲线图
Fig. 7 Local curve figure of the unilateral extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

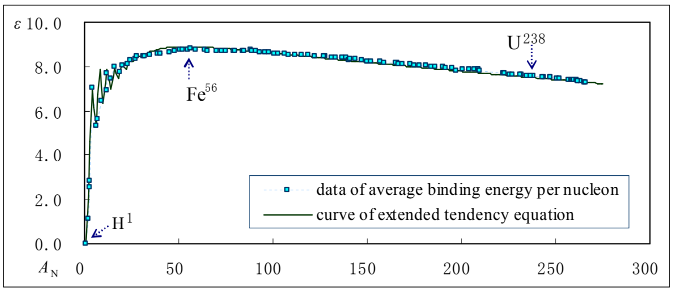

图 8 稳定核素比结合能单边拓展趋势方程曲线图
Fig. 8 Curve figure of the unilateral extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

方程（119）式是一半开放性方程，在 $b_{\mathrm{A}}=1$ 时，待定常量 b_0、α_{01}、α_{02}、α_{03}、γ_{w} 可以有多组取值，诸如当 $\gamma_{\mathrm{w}}=0.155$ 或 $\gamma_{\mathrm{w}}=0.15$ 时，即有 $b_0=9.35\,\mathrm{MeV}$、$\alpha_{01}=0.0398$、$\alpha_{02}=0.54$、$\alpha_{03}=0.04071$；或 $b_0=9.348\,\mathrm{MeV}$、$\alpha_{01}=0.0403$、$\alpha_{02}=0.54$、$\alpha_{03}=0.04121$；或 $b_0=9.34\,\mathrm{MeV}$、$\alpha_{01}=0.041$、$\alpha_{02}=0.52$、$\alpha_{03}=0.04191$ 等数值组；由其中一组取值即得方程（119）式的另一具体形式为

$$\varepsilon=9.348\frac{\exp[0.0403(A_{\mathrm{N}}-1)]-\exp[-0.54(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2\cosh[0.04121(A_{\mathrm{N}}-1)]}$$
$$\times[1+\exp[-0.15(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\mathrm{N}})]\text{。}\quad(121)$$

方程（121）式基本上是方程（120）式的一细化并行形式，主要细微调节区间为 $30<A_{\mathrm{N}}<80$。方程（121）式核子数 A_{N} 从 1 到 90 的局部曲线如图 9 所示，A_{N} 从 1 到 275 的曲线如图 10 所示，方程与数据之间相关系数为 0.9751，整体上和方程（120）式的计算结果相近。

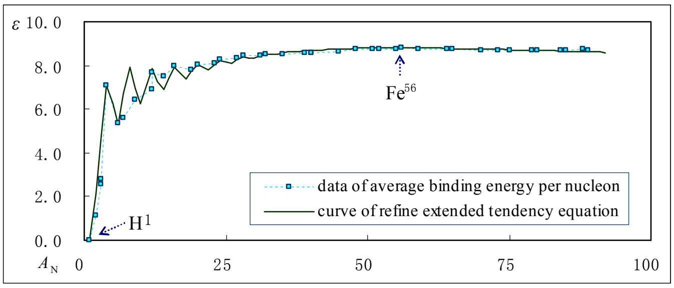

图 9 稳定核素比结合能单边细化拓展趋势方程局部曲线图
Fig. 9 Local curve figure of the unilateral refinement extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

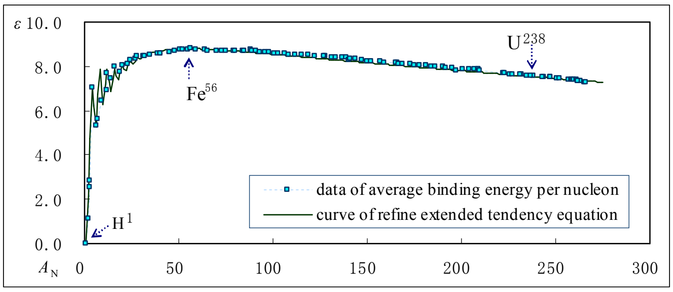

图 10 稳定核素比结合能单边细化拓展趋势方程曲线图
Fig. 10 Curve figure of the unilateral refinement extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

作为探讨，由比结合能ε系列峰值方程（117）式及（120）式曲线图 7、图 8 所示，ε在$A_{\mathrm{N}}=4l$处具有峰值$\varepsilon_{\mathrm{P}l}$；其中在$l=2$处（$A_{\mathrm{N}}=8$处）即有一峰值$\varepsilon_{\mathrm{P2}}$为

$$\varepsilon_{\mathrm{P2}}\approx 7.9\,\mathrm{MeV}\,; \qquad (122)$$

由细化方程（118）式曲线图 9、图 10 所示，在$l=2$处（$A_{\mathrm{N}}=8$处）的峰值$\varepsilon_{\mathrm{P2}}$亦为

$$\varepsilon_{\mathrm{P2}}\approx 7.9\,\mathrm{MeV}\,; \qquad (123)$$

并考虑$\varepsilon_{\mathrm{P1}}$、$\varepsilon_{\mathrm{P3}}$波峰特征，则于此$A_{\mathrm{N}}=8$处位置一待定核素比结合能值的估计范围$\varepsilon_{\mathrm{P2R}}$及中心值$\varepsilon_{\mathrm{P2CV}}$近似为

$$\varepsilon_{\mathrm{P2R}}\approx 7.2\,\mathrm{MeV}\sim 7.9\,\mathrm{MeV}\,; \qquad (124)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{P2CV}}\approx 7.6\,\mathrm{MeV}\,。 \qquad (125)$$

由方程（119）式，在$b_{\mathrm{A}}=1$时二个区域性近似式为

$$\varepsilon(A_{\mathrm{N}}>A_{\mathrm{N1}})\approx b_0\frac{\exp[\alpha_{01}(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2\cosh[\alpha_{03}(A_{\mathrm{N}}-1)]}\,; \qquad (126)$$

$$\varepsilon(A_{\mathrm{N}}>A_{\mathrm{N2}})\approx b_0\exp[-(\alpha_{03}-\alpha_{01})(A_{\mathrm{N}}-1)]\,; \qquad (127)$$

这里A_{N1}、A_{N2}为常量，且满足

$$\exp(\alpha_{01}(A_{\mathrm{N1}}-1)>>\exp(-\alpha_{02}(A_{\mathrm{N1}}-1)\,,$$
$$\exp(-\gamma_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N1}}-1)<<1\,;$$
$$\exp(\alpha_{01}(A_{\mathrm{N2}}-1)>>\exp(-\alpha_{02}(A_{\mathrm{N1}}-1)\,,$$
$$\exp(\alpha_{03}(A_{\mathrm{N2}}-1)>>\exp(-\alpha_{03}(A_{\mathrm{N3}}-1)\,,$$
$$\exp(-\gamma_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N2}}-1)<<1\,。$$

由方程（120）式得其二个区域性的近似表示式为

$$\varepsilon(A_{\mathrm{N}}>20)\approx 9.5\frac{\exp[0.040(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2\cosh[0.041(A_{\mathrm{N}}-1)]}\,; \qquad (128)$$

$$\varepsilon(A_{\mathrm{N}}>60)\approx 9.5\exp[-0.001(A_{\mathrm{N}}-1)]\,。 \qquad (129)$$

同样地，由方程（121）式亦得其二个区域性的近似式为

$$\varepsilon(A_{\mathrm{N}}>20)\approx 9.348\frac{\exp[0.0403(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2\cosh[0.04121(A_{\mathrm{N}}-1)]}\,; \qquad (130)$$

$$\varepsilon(A_{\mathrm{N}}>60)\approx 9.348\exp[-0.00091(A_{\mathrm{N}}-1)]\,。 \qquad (131)$$

其中，方程（130）、（131）二式曲线如图 11 所示。

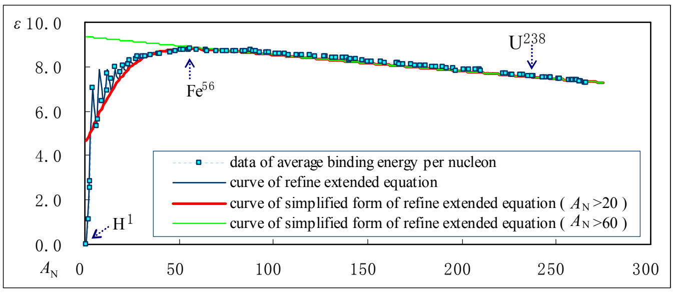

图 11 稳定核素比结合能细化扩展方程区域性简化形式曲线图

Fig. 11 Curve figure of regional simplified form of unilateral refine extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

由方程（119）式，相应地即得稳定核素结合能E_{N}(MeV)的波动扩展趋势性方程形式为

$$E_{\mathrm{N}}=A_{\mathrm{N}}\varepsilon$$
$$=b_0A_{\mathrm{N}}\frac{\exp[\alpha_{01}(A_{\mathrm{N}}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2b_{\mathrm{A}}\cosh[\alpha_{03}(A_{\mathrm{N}}-1)]}$$
$$\times[1+\exp[-\gamma_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\mathrm{N}})]\,; \qquad (132)$$

相应地亦得结合能E_{N}的等效质量m_{E}的波动扩展方程为

$$m_{\mathrm{E}}=c^{-2}E_{\mathrm{N}}$$
$$=b_0A_{\mathrm{N}}\frac{\exp[\alpha_{01}(A_{\mathrm{N}}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2c^2b_{\mathrm{A}}\cosh[\alpha_{03}(A_{\mathrm{N}}-1)]}$$
$$\times[1+\exp[-\gamma_{\mathrm{w}}(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\mathrm{N}})]\,。 \qquad (133)$$

由（132）式与（133）式，当结合能E_{N}(MeV)的等效质量m_{E}单位取$\mathrm{MeV}c^{-2}$时，则m_{E}与E_{N}在数值上相同。

稳定核素分布方程（103）式及其解（104）式、比结合能方程（119）式和结合能方程（132）式及等效质量方程（133）式是关于稳定核素计算的趋势分析方法，是属于统计性质的方程，亦是进一步逆向探讨核子之间综合作用力方程表述及多核子层壳团簇分布规律的参考指南。

相邻层面的规律之间具有组合与拆分运算的关联性，每一层面的现象演化多有其本俱的规律特征，诸层面的开放性规律通过常数展开及合并进行转折更迭而无有止境。

对于（132）式，在取$b_{\mathrm{A}}=1$、$b_{\mathrm{w}}\approx 1$时，其简化为

$$E_{\mathrm{N}}=b_0A_{\mathrm{N}}\frac{\exp[\alpha_{01}(A_{\mathrm{N}}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2\cosh[\alpha_{03}(A_{\mathrm{N}}-1)]}\,; \qquad (134)$$

依据比结合能方程（132）式，在$b_{\mathrm{A}}=1$时，对于（120）式相应地有核素结合能方程

$$E_{\mathrm{N}}=9.5A_{\mathrm{N}}\frac{\exp[0.040(A_{\mathrm{N}}-1)]-\exp[-0.50(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2\cosh[0.041(A_{\mathrm{N}}-1)]}$$
$$\times[1+\exp[-0.155(A_{\mathrm{N}}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\mathrm{N}})]\,。 \qquad (135)$$

方程（135）式与稳定核素结合能数据之间相关系数为 0.9999，曲线如图 12 所示。

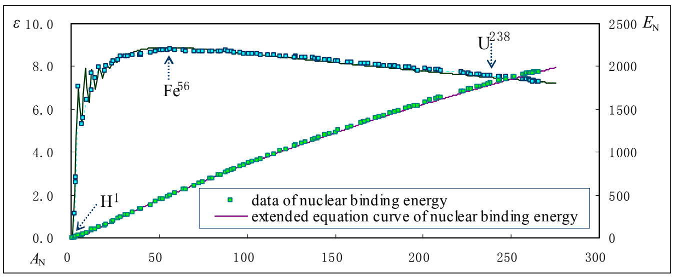

图 12 稳定核素结合能单边扩展趋势方程曲线图

Fig. 12 Curve figure of unilateral extended tendency equation of stable nuclear binding energy

对于（135）式，当略去波动部分时，得E_{N}（MeV）为

$$E_{\mathrm{N}}=9.5A_{\mathrm{N}}\frac{\exp[0.040(A_{\mathrm{N}}-1)]-\exp[-0.50(A_{\mathrm{N}}-1)]}{2\cosh[0.041(A_{\mathrm{N}}-1)]}\,; \qquad (136)$$

方程（136）式与稳定核素结合能数据之间相关系数亦为 0.9999，曲线如图 13 所示。

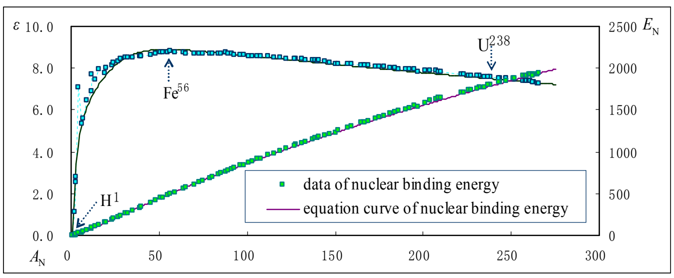

图 13 稳定核素结合能简化趋势方程曲线图

Fig. 13 Curve figure of simplified tendency equation of stable nuclear binding energy

对于比结合能方程（121）式亦有结合能方程形式

$$E_N = 9.348A_N \frac{\exp[0.0403(A_N-1)]-\exp[-0.54(A_N-1)]}{2\cosh[0.04121(A_N-1)]} \times [1+\exp[-0.15(A_N-1)]\cos^2(0.25\pi A_N)]。 \quad (137)$$

方程（137）式与稳定核素结合能数据之间相关系数为0.9999，曲线如图14所示。

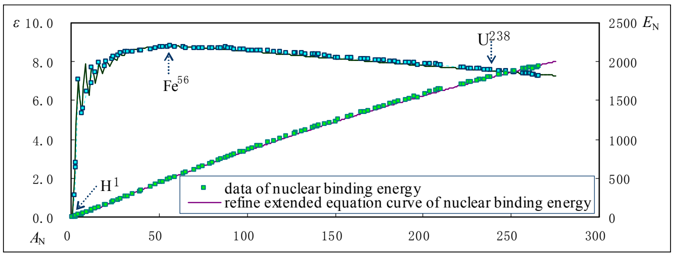

图 14 稳定核素结合能单边细化扩展趋势方程曲线图

Fig. 14 Curve figure of unilateral refinement extended tendency equation of stable nuclear binding energy

对于（137）式，当略去波动部分时，得 E_N（MeV）为

$$E_N = 9.348A_N \frac{\exp[0.0403(A_N-1)]-\exp[-0.54(A_N-1)]}{2\cosh[0.04121(A_N-1)]}; \quad (138)$$

方程（138）式与稳定核素结合能数据之间相关系数亦为0.9999，曲线如图15所示。

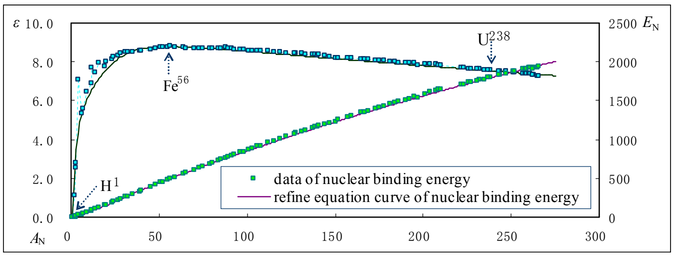

图 15 稳定核素结合能细化趋势方程曲线图

Fig. 15 Curve figure of refinement tendency equation of stable nuclear binding energy

由方程（126）式及（127）式，对于核素结合能方程（132）式，其二个区域性近似式为

$$E_N(A_N > A_{N1}) \approx b_0 A_N \frac{\exp[\alpha_{01}(A_N-1)]}{2\cosh[\alpha_{03}(A_N-1)]}; \quad (139)$$

$$E_N(A_N > A_{N2}) \approx b_0 A_N \exp[-(\alpha_{03}-\alpha_{01})(A_N-1)]。 \quad (140)$$

由方程（135）式得二个区域性的 E_N 近似表示式为

$$E_N(A_N > 20) \approx 9.5A_N \frac{\exp[0.040(A_N-1)]}{2\cosh[0.041(A_N-1)]}; \quad (141)$$

$$E_N(A_N > 60) \approx 9.5A_N \exp[-0.001(A_N-1)]。 \quad (142)$$

由方程（137）式亦得二个区域性的结合能 E_N 近似表示式为

$$E_N(A_N > 20) \approx 9.348A_N \frac{\exp[0.0403(A_N-1)]}{2\cosh[0.04121(A_N-1)]}; \quad (143)$$

$$E_N(A_N > 60) \approx 9.348A_N \exp[-0.00091(A_N-1)]。 \quad (144)$$

下面计算稳定核素比结合能最大值及其相应核子数。依据方程（119）式，在 $b_A = 1$ 时，考虑核子数 A_N 及核素比结合能 ε 可平滑等效为渐变连续参量，即得

$$\frac{d\varepsilon}{dA_N} = \varepsilon\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_N-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_N-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_N-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_N-1)]} - \alpha_{03}\varepsilon\tanh[\alpha_{03}(A_N-1)] + \varepsilon\frac{-\gamma_w\cos^2(0.25\pi A_N)-0.25\pi\sin(0.5\pi A_N)}{1+\exp[-\gamma_w(A_N-1)]\cos^2(0.25\pi A_N)} \times\exp[-\gamma_w(A_N-1)]; \quad (145)$$

则当 $\frac{d\varepsilon}{dA_N}=0$ 时 ε 取极限值 $\varepsilon_{\lim}$，得方程

$$\varepsilon_{\lim}[\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_N-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_N-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_N-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_N-1)]} - \alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_N-1)] + \frac{-\gamma_w\cos^2(0.25\pi A_N)-0.25\pi\sin(0.5\pi A_N)}{1+\exp[-\gamma_w(A_N-1)]\cos^2(0.25\pi A_N)} \times\exp[-\gamma_w(A_N-1)]]=0; \quad (146)$$

故有

$$\varepsilon_{\lim}=0; \quad (147)$$

$$\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_N-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_N-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_N-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_N-1)]} - \alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_N-1)] + \frac{-\gamma_w\cos^2(0.25\pi A_N)-0.25\pi\sin(0.5\pi A_N)}{1+\exp[-\gamma_w(A_N-1)]\cos^2(0.25\pi A_N)} \times\exp[-\gamma_w(A_N-1)]=0。 \quad (148)$$

方程（119）式具有波动性，亦相应地具有若干波动峰值，即方程（148）式有若干解，其中对于方程（120）式的具体形式，方程（148）式的最后一数值近似解为

$$A_N \approx 55.5654 \approx 56; \quad (149)$$

代入波动扩展方程（117）式得稳定核素比结合能极限值为

$$\varepsilon_{\lim}(A_N = 56) = 8.89556\text{MeV}。 \quad (150)$$

依据波动扩展方程（120）式进行数值计算，有

$\varepsilon(A_N=55)=8.89545\text{MeV}$，$\varepsilon(A_N=55)>\varepsilon(1\le A_N\le 54)$；

$\varepsilon(A_N=56)=8.89556\text{MeV}$；

$\varepsilon(A_N=57)=8.89327\text{MeV}$，$\varepsilon(A_N=57)>\varepsilon(A_N\ge 58)$；

则直接可得在核子数 $A_N=56$ 时稳定核素比结合能 ε 取最大值 $\varepsilon_{\max}$，即

$$\varepsilon_{\max}=\varepsilon(A_N=56)=8.89556\text{MeV}。 \quad (151)$$

对于方程（121）式的具体形式，方程（148）式的最后一数值近似解为

$$A_N \approx 55.8167 \approx 56; \quad (152)$$

代入波动扩展方程（121）式得稳定核素比结合能极限值

$$\varepsilon_{\lim}(A_N=56)=8.79940\text{MeV}。 \quad (153)$$

依据波动扩展方程（121）式进行数值计算，有
$\varepsilon(A_{\rm N}=55)=8.79841{\rm MeV}$，$\varepsilon(A_{\rm N}=55)>\varepsilon(1\le A_{\rm N}\le 54)$；
$\varepsilon(A_{\rm N}=56)=8.79940{\rm MeV}$；
$\varepsilon(A_{\rm N}=57)=8.79749{\rm MeV}$，$\varepsilon(A_{\rm N}=57)>\varepsilon(A_{\rm N}\ge 58)$；
则直接可得在核子数 $A_{\rm N}=56$ 时稳定核素比结合能 ε 取最大值 $\varepsilon_{\max}$，即

$$\varepsilon_{\max}=\varepsilon(A_{\rm N}=56)=8.79940{\rm MeV}。\quad（154）$$

简单地，作为近似计算，在考虑稳定核素比结合能趋势性方程（111）式中略去波动部分及在 $b_{\rm A}=1$ 时的简单情况下，核子数 $A_{\rm N}$ 及核素比结合能 ε 可平滑等效为渐变连续参量，依据方程（112）式得

$$\frac{{\rm d}\varepsilon}{{\rm d}A_{\rm N}}=\varepsilon\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}-\alpha_{03}\varepsilon\tanh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]；\quad（155）$$

$$\frac{{\rm d}^2\varepsilon}{{\rm d}A_{\rm N}^2}=\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}\frac{{\rm d}\varepsilon}{{\rm d}A_{\rm N}}+\varepsilon\frac{\rm d}{{\rm d}A_{\rm N}}\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}-\alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]\frac{{\rm d}\varepsilon}{{\rm d}A_{\rm N}}-\frac{\alpha_3^2\varepsilon}{\cosh^2[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]}；\quad（156）$$

则当 $\frac{{\rm d}\varepsilon}{{\rm d}A_{\rm N}}=0$ 时 ε 取极限值 $\varepsilon_{\rm lim}$，得

$$\varepsilon_{\rm lim}[\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}-\alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]]=0；$$

即有

$$\varepsilon_{\rm lim}=0；\quad（157）$$

$$\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}-\alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]=0；\quad（158）$$

其中对于方程（158）式，考虑极限值 $\varepsilon_{\rm lim}>0$ 时的位置在核子数 $A_{\rm N}>A_{\rm N0}$ 之后，满足

$$\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N0}-1)]>>\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N0}-1)]，$$

$$\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N0}-1)]>>\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N0}-1)]；$$

这里 $A_{\rm N0}$ 为常数；即有近似式

$$\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}\approx\alpha_{01}；$$

则由方程（156）式得在极限值 $\varepsilon_{\rm lim}>0$ 的位置有

$$\frac{{\rm d}^2\varepsilon}{{\rm d}A_{\rm N}^2}\approx-\frac{\alpha_3^2\varepsilon_{\rm lim}}{\cosh^2[\alpha_3(A_{\rm N}-1)]}<0；\quad（159）$$

即由方程(158)、(159)二式得极限值 $\varepsilon_{\rm lim}$ 为最大值 $\varepsilon_{\max}$ 时的核子数方程为

$$\alpha_{01}-\alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]=0；\quad（160）$$

由方程（160）式即解得 ε 取最大值 $\varepsilon_{\max}$ 时的核子数 $A_{\rm N}$ 为

$$A_{\rm N}=\frac{1}{\alpha_{03}}{\rm arctanh}\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{03}}+1。\quad（161）$$

由方程（161）式，对于方程（120）式在略去波动部分情况下（即取 $b_{\rm w}\approx 1$）可得 ε 取最大值 $\varepsilon_{\max}$ 时的核子数 $A_{\rm N}$ 值及最大值 $\varepsilon_{\max}$ 分别为

$$A_{\rm N}=\frac{1}{0.041}{\rm arctanh}\frac{0.040}{0.041}+1=54.5908\approx 55，\quad（162）$$

$$\varepsilon_{\max}=9.5\frac{\exp[0.040(55-1)]-\exp[-0.50(55-1)]}{2\cosh[0.041(55-1)]}=8.89442\,{\rm MeV}；\quad（163）$$

对于方程（121）式在略去波动部分情况下（亦取 $b_{\rm w}\approx 1$）得 ε 取最大值 $\varepsilon_{\max}$ 时的核子数 $A_{\rm N}$ 及最大值 $\varepsilon_{\max}$ 分别为

$$A_{\rm N}=\frac{1}{0.04121}{\rm arctanh}\frac{0.0403}{0.04121}+1=55.5482\approx 56，\quad（164）$$

$$\varepsilon_{\max}=9.348\frac{\exp[0.0403(56-1)]-\exp[-0.54(56-1)]}{2\cosh[0.04121(56-1)]}=8.79710\,{\rm MeV}。\quad（165）$$

下面在趋势层面探讨核素结合能 $E_{\rm N}$ 的理论最大值 $E_{\rm Ntmax}$ 及其对应的核子数 $A_{\rm Nt}$、质子数 $Z_{\rm t}$ 及中子数 $N_{\rm t}$。

对于核素结合能方程(132)式，在取 $b_{\rm A}=1$、$b_{\rm w}\approx 1$ 时，考虑核子数 $A_{\rm N}$ 及结合能 $E_{\rm N}$ 可平滑等效为渐变连续参量，则由方程（134）式即得

$$\frac{{\rm d}E_{\rm N}}{{\rm d}A_{\rm N}}=\varepsilon+A_{\rm N}\frac{{\rm d}\varepsilon}{{\rm d}A_{\rm N}}=\varepsilon+E_{\rm N}\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}-\alpha_{03}E_{\rm N}\tanh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]；\quad（166）$$

$$\frac{{\rm d}^2E_{\rm N}}{{\rm d}A_{\rm N}^2}=\frac{{\rm d}\varepsilon}{{\rm d}A_{\rm N}}+\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}\frac{{\rm d}E_{\rm N}}{{\rm d}A_{\rm N}}+E_{\rm N}\frac{\rm d}{{\rm d}A_{\rm N}}\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}-\alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]\frac{{\rm d}E_{\rm N}}{{\rm d}A_{\rm N}}-\frac{\alpha_{03}^2E_{\rm N}}{\cosh^2[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]}。\quad（167）$$

由（166）式，当 $\frac{{\rm d}E_{\rm N}}{{\rm d}A_{\rm N}}=0$ 时 $E_{\rm N}$ 取极限值 $E_{\rm Nlim}$，有

$$E_{\rm Nlim}[\frac{1}{A_{\rm N}}+\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}-\alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]]=0；\quad（168）$$

即有

$$E_{\text{Nlim}}=0\text{；}\tag{169}$$

$$\frac{1}{A_{\text{N}}}+\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\text{N}}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\text{N}}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\text{N}}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\text{N}}-1)]}-\alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_{\text{N}}-1)]=0\text{；}\tag{170}$$

其中对于方程（170）式，考虑极限值$E_{\text{Nlim}}>0$时的位置在核子数$A_{\text{N}}>A_{\text{N}01}$之后，满足

$$\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\text{N}01}-1)]>>\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\text{N}01}-1)]\text{，}$$

$$\exp[\alpha_{01}(A_{\text{N}01}-1)]>>\exp[-\alpha_{02}(A_{\text{N}01}-1)]\text{，}$$

$$\exp(\alpha_{03}(A_{\text{N}01}-1)>>\exp(-\alpha_{03}(A_{\text{N}01}-1)\text{；}$$

这里$A_{\text{N}01}$为常数；即有

$$\frac{\alpha_{01}\exp[\alpha_{01}(A_{\text{N}}-1)]+\alpha_{02}\exp[-\alpha_{02}(A_{\text{N}}-1)]}{\exp[\alpha_{01}(A_{\text{N}}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\text{N}}-1)]}\approx\alpha_{01}\text{，}$$

$$\alpha_{03}\tanh[\alpha_{03}(A_{\text{N}}-1)]\approx\alpha_{03}\text{；}$$

则由方程（167）式得在极限值$E_{\text{Nlim}}>0$的位置有

$$\frac{\mathrm{d}^2E_{\text{N}}}{\mathrm{d}A_{\text{N}}^2}\approx-(\alpha_{03}-\alpha_{01})\frac{E_{\text{Nlim}}}{A_{\text{N}}}-\frac{\alpha_{03}^2E_{\text{Nlim}}}{\cosh^2[\alpha_{03}(A_{\text{N}}-1)]}<0\text{；}\tag{171}$$

即由方程（170）、（171）二式得E_{Nlim}为最大值E_{Nmax}时的相应核子数方程为

$$\frac{1}{A_{\text{N}}}+\alpha_{01}-\alpha_{03}\approx0\text{。}\tag{172}$$

得核素结合能E_{N}为最大值E_{Nmax}时的相应核子数为

$$A_{\text{N}}=\frac{1}{\alpha_{03}-\alpha_{01}}\text{。}\tag{173}$$

更为简单地，依据区域性方程（140）式，即考虑核素结合能E_{N}取极限值E_{Nlim}的位置在$A_{\text{N}}>A_{\text{N}2}$之后，得

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{N}}}{\mathrm{d}A_{\text{N}}}\approx[A_{\text{N}}^{-1}-(\alpha_{03}-\alpha_{01})]E_{\text{N}}\text{，}\tag{174}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E_{\text{N}}}{\mathrm{d}A_{\text{N}}^2}\approx-A_{\text{N}}^{-2}E_{\text{N}}+[A_{\text{N}}^{-1}-(\alpha_{03}-\alpha_{01})]\frac{\mathrm{d}E_{\text{N}}}{\mathrm{d}A_{\text{N}}}\text{；}\tag{175}$$

在极限值E_{Nlim}的位置有

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{N}}}{\mathrm{d}A_{\text{N}}}\approx[A_{\text{N}}^{-1}-(\alpha_{03}-\alpha_{01})]E_{\text{Nlim}}=0\text{，}\tag{176}$$

即由（176）式得

$$E_{\text{Nlim}}=0\text{；}\tag{177}$$

$$A_{\text{N}}^{-1}-(\alpha_{03}-\alpha_{01})=0\text{；}\tag{178}$$

其中对于（178）式，由（175）式及（176）式得在$E_{\text{Nlim}}>0$时的位置有

$$\frac{\mathrm{d}^2E_{\text{N}}}{\mathrm{d}A_{\text{N}}^2}=-A_{\text{N}}^{-2}E_{\text{Nlim}}<0\text{；}\tag{179}$$

即由方程（178）式、（179）式亦得核素结合能E_{N}为最大值E_{Nmax}的核子数A_{N}为

$$A_{\text{N}}=\frac{1}{\alpha_{03}-\alpha_{01}}\text{。}\tag{180}$$

由方程（173）式，对于方程（136）式得核素结合能E_{N}取最大值E_{Nmax}时所对应的核子数A_{N}、最大值E_{Nmax}及其等效质量m_{Emax}分别为

$$A_{\text{N}}\approx(0.041-0.040)^{-1}=1000\text{，}\tag{181}$$

$$E_{\text{Nmax}}=3498.35\text{MeV}\text{，}\tag{182}$$

$$m_{\text{Emax}}=c^{-2}E_{\text{Nmax}}=3498.35\text{MeV}c^{-2}\text{；}\tag{183}$$

对于方程（138）式得

$$A_{\text{N}}\approx(0.04121-0.0403)^{-1}=1099\text{，}\tag{184}$$

$$E_{\text{Nmax}}=3782.49\text{MeV}\text{，}\tag{185}$$

$$m_{\text{Emax}}=c^{-2}E_{\text{Nmax}}=3782.49\text{MeV}c^{-2}\text{。}\tag{186}$$

由方程（104）、（173）二式，即得在$A_{\text{N}}=(\alpha_{03}-\alpha_{01})^{-1}$附近的质子数方程为

$$Z+192\tan[0.007(Z-1)]\approx(\alpha_{03}-\alpha_{01})^{-1}\text{；}\tag{187}$$

方程（104）式为趋势性方程解，仍将质子数Z平滑等效为渐变连续参量，由 Newton 迭代法及方程（109）式，取函数

$$f(Z)=Z+192\tan[0.007(Z-1)]-(\alpha_{03}-\alpha_{01})^{-1}\text{，}\quad 1\le Z\le225$$

则方程（187）式的解Z在理论计算上有 Newton 迭代法方程

$$Z_{\text{t}J+1}=Z_{\text{t}J}-\frac{f(Z_{\text{t}J})}{f'(Z_{\text{t}J})}=Z_{\text{t}J}-\frac{Z_{\text{t}J}+192\tan[0.007(Z_{\text{t}J}-1)]-(\alpha_{03}-\alpha_{01})^{-1}}{1+192\times0.007\cos^{-2}[0.007(Z_{\text{t}J}-1)]}\text{，}\tag{188}$$

这里J为自然数，$J\ge0$；$f'(Z_{\text{t}J})=\dfrac{\mathrm{d}f(Z_{\text{t}J})}{\mathrm{d}Z_{\text{t}J}}$。

由（188）式，考虑方程（187）式的解$Z<225$，故可取迭代方程（188）式中$Z_{\text{t}0}=200$，则对于（181）式$A_{\text{N}}=(\alpha_{03}-\alpha_{01})^{-1}=1000$，在$Z_{\text{t}J\ge3}$后即收敛于

$$Z_{\text{t}J\ge3}\approx192.07\approx192\text{；}\tag{189}$$

由方程（104）式及（189）式得中子数N_{t}为

$$N_{\text{t}}=192\tan[0.007(192-1)]\approx806.21\approx806\text{；}\tag{190}$$

故有在$A_{\text{N}}=1000$附近可分解的相应质子数Z_{t}、中子数N_{t}及核子数A_{Nt}分别为

$$Z_{\text{t}}=192\text{，}N_{\text{t}}=806\text{，}A_{\text{Nt}}=Z_{\text{t}}+N_{\text{t}}=998\text{；}\tag{191}$$

则由方程（136）式即得在第一大周期（$1 \le Z \le 225$）核素结合能 $E_{\rm N}$ 的理论最大值 $E_{\rm Ntmax}$、$E_{\rm Ntmax}$ 的等效质量 $m_{\rm Etmax}=c^{-2}E_{\rm Ntmax}$、$E_{\rm Ntmax}$ 所对应的核子数 $A_{\rm Nt}$、质子数 $Z_{\rm t}$ 及中子数 $N_{\rm t}$ 分别为

$$\begin{cases} E_{\rm Ntmax}=3498.34{\rm MeV}; \\ m_{\rm Etmax}=3498.34{\rm MeV}c^{-2}; \\ A_{\rm Nt}=998，Z_{\rm t}=192，N_{\rm t}=806。\end{cases} \tag{192}$$

核素结合能趋势性方程（136）式的远景曲线及理论最大值位置如图 16 所示。

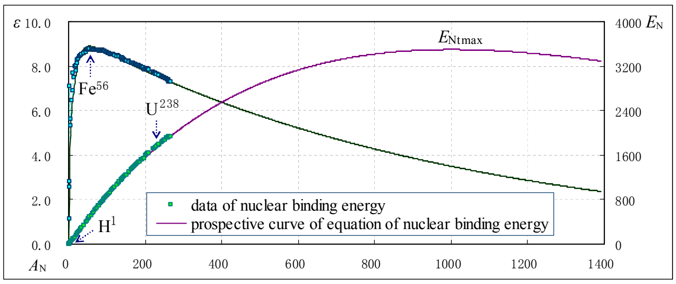

图 16 核素结合能趋势方程远景曲线及其理论最大值位置图
Fig.16 Prospective curve and its theoretical maximum position figure of tendency equation of the nuclear binding energy

依据结合能波动扩展趋势性方程（135）式，给出的核素结合能远景曲线及理论最大值位置如图 17 所示，其与方程（136）式给出的图 16 在远景曲线及理论最大值位置是相同的。

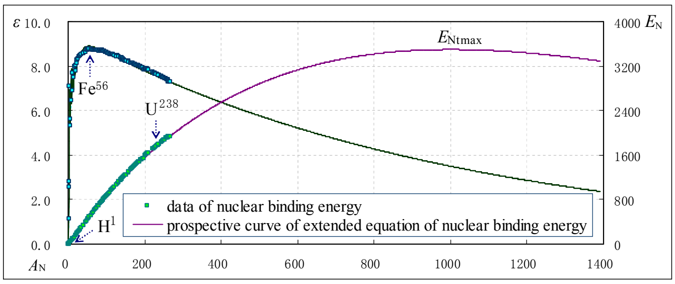

图 17 核素结合能扩展趋势方程远景曲线及其理论最大值位置图
Fig.17 Prospective curve and its theoretical maximum position figure of unilateral extended tendency equation of the nuclear binding energy

对于方程（184）式 $A_{\rm N}=(\alpha_{03}-\alpha_{01})^{-1}=1099$，仍取迭代方程（188）式中 $Z_{\rm t0}=200$，则在 $Z_{{\rm t}J\ge3}$ 后收敛于

$$Z_{{\rm t}J\ge3}\approx195.49\approx195; \tag{193}$$

由方程（104）式及（193）式得中子数 $N_{\rm t}$ 为

$$N_{\rm t}=192\tan[0.007(195-1)]\approx888.61\approx889; \tag{194}$$

故有在 $A_{\rm N}=1099$ 附近可分解的相应质子数 $Z_{\rm t}$、中子数 $N_{\rm t}$ 及核子数 $A_{\rm Nt}$ 分别为

$$Z_{\rm t}=195，N_{\rm t}=889，A_{\rm Nt}=Z_{\rm t}+N_{\rm t}=1084; \tag{195}$$

则由方程（138）式即得在第一大周期（$1 \le Z \le 225$）核素结合能 $E_{\rm N}$ 的理论最大值 $E_{\rm Ntmax}$、$E_{\rm Ntmax}$ 的等效质量 $m_{\rm Etmax}=c^{-2}E_{\rm Ntmax}$、$E_{\rm Ntmax}$ 所对应的核子数 $A_{\rm Nt}$、质子数 $Z_{\rm t}$ 及中子数 $N_{\rm t}$ 分别为

$$\begin{cases} E_{\rm Ntmax}=3782.14{\rm MeV}; \\ m_{\rm Etmax}=3782.14{\rm MeV}c^{-2}; \\ A_{\rm Nt}=1084，Z_{\rm t}=195，N_{\rm t}=889。\end{cases} \tag{196}$$

核素结合能细化趋势性方程（138）式的远景曲线及理论最大值位置如图 18 所示。

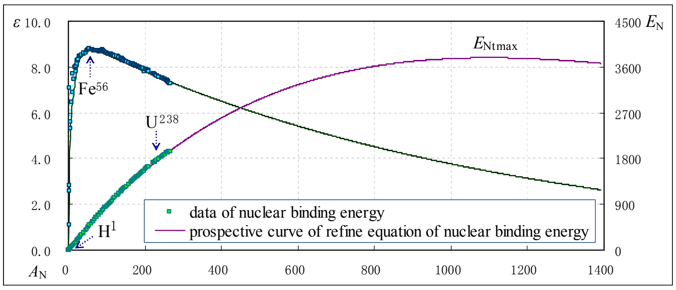

图 18 核素结合能细化趋势方程远景曲线及其理论最大值位置图
Fig.18 Prospective curve and its theoretical maximum position figure of unilateral refinement tendency equation of the nuclear binding energy

依据波动细化扩展方程（137）式给出的核素结合能远景曲线及理论最大值位置如图 19 所示，其与方程（138）式给出的图 18 在远景曲线及理论最大值位置是完全相同的。

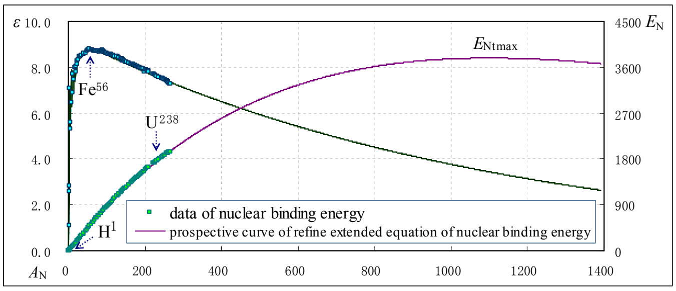

图 19 核素结合能细化扩展方程远景曲线及其理论最大值位置图
Fig.19 Prospective curve and its theoretical maximum position figure of unilateral refinement extended tendency equation of the nuclear binding energy

上述分析在方程（119）式中取趋势比函数 $b_{\rm A}=1$ 时给出的核素结合能方程，在远景曲线形态上的显著特征是核素结合能呈现最大值后即随着核子数的增加结合能开始逐渐减少，这较为不同于目前物理学理论的主线观念。

下面给出核素结合能方程（119）式中当趋势比函数 $b_{\rm A}\ne1$ 时的极限饱和形式分析途径。

最简单地，由稳定核素比结合能趋势性方程（119）式，当其中的趋势比函数 $b_{\rm A}$ 为

$$b_{\rm A}=b_{\rm A0}A_{\rm N}+1 \tag{197}$$

方程（119）式成为

$$\varepsilon=b_0\frac{\exp[\alpha_{01}(A_{\rm N}-1)]-\exp[-\alpha_{02}(A_{\rm N}-1)]}{2(b_{\rm A0}A_{\rm N}+1)\cosh[\alpha_{03}(A_{\rm N}-1)]}$$
$$\times[1+\exp[-\gamma_{\rm w}(A_{\rm N}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\rm N})]; \tag{198}$$

这里 $b_{\rm A0}$ 为待定系数。

由方程（198）式，并参考方程（120）中的参数，得稳定核素比结合能方程一具体简略形式为

$$\varepsilon = 9.5\frac{\exp[0.04(A_{\rm N}-1)]-\exp[-0.50(A_{\rm N}-1)]}{2(0.00108A_{\rm N}+1)\cosh[0.04(A_{\rm N}-1)]}$$

$$\times[1+\exp[-0.155(A_{\rm N}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\rm N})]\text{。} \quad (199)$$

方程(199)式 $A_{\rm N}$ 从 1 到 90 的局部曲线如图 20 所示，$A_{\rm N}$ 从 1 到 275 的曲线如图 21 所示，其中在图 21 中方程与数据之间相关系数为 0.9777。

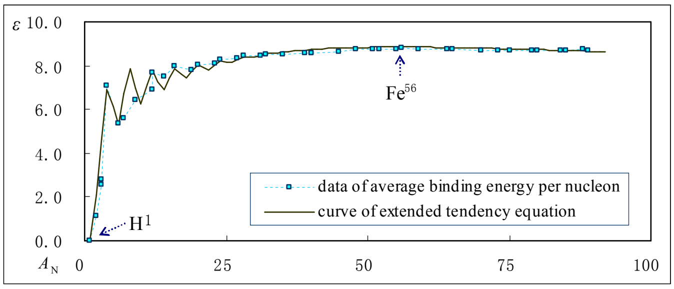

图 20 稳定核素比结合能单边拓展趋势方程局部曲线图（$b_{\rm A}\neq1$）

Fig. 20 Local curve figure of the unilateral extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide(when $b_{\rm A}\neq1$)

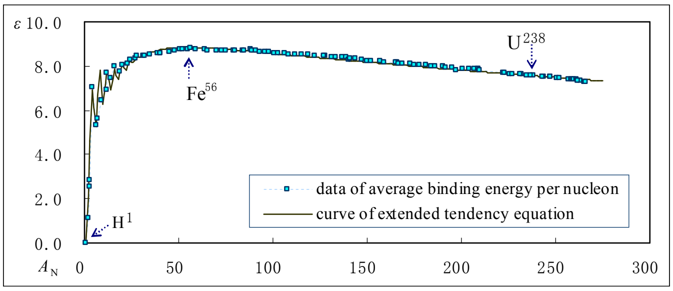

图 21 稳定核素比结合能单边拓展趋势方程曲线图（$b_{\rm A}\neq1$）

Fig. 21 Curve figure of the unilateral extended tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide(when $b_{\rm A}\neq1$)

方程（199）式的区域性近似计算形式为

$$\varepsilon(A_{\rm N}>60)\approx\frac{9.5}{0.00108A_{\rm N}+1}\text{。} \quad (200)$$

显然方程（200）式与方程（129）式的区间近似式

$$\varepsilon(60<A_{\rm N}<<1001)\approx 9.5[1+0.001A_{\rm N}]^{-1}$$

具有相近的区域性近似表述形式，但远景特征显著不同。

由方程（199）式得稳定核素结合能方程及其等效质量方程分别为

$$E_{\rm N}=9.5A_{\rm N}\frac{\exp[0.04(A_{\rm N}-1)]-\exp[-0.50(A_{\rm N}-1)]}{2(0.00108A_{\rm N}+1)\cosh[0.04(A_{\rm N}-1)]}$$

$$\times[1+\exp[-0.155(A_{\rm N}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\rm N})]\text{；} \quad (201)$$

$$m_{\rm E}=9.5A_{\rm N}\frac{\exp[0.04(A_{\rm N}-1)]-\exp[-0.50(A_{\rm N}-1)]}{2c^2(0.00108A_{\rm N}+1)\cosh[0.04(A_{\rm N}-1)]}$$

$$\times[1+\exp[-0.155(A_{\rm N}-1)]\cos^2(0.25\pi A_{\rm N})]\text{。} \quad (202)$$

方程（201）式及（202）式区域性近似计算形式分别为

$$E_{\rm N}(A_{\rm N}>60)\approx\frac{9.5A_{\rm N}}{0.00108A_{\rm N}+1}\approx\frac{8796.30A_{\rm N}}{A_{\rm N}+926}\text{，} \quad (203)$$

$$m_{\rm E}(A_{\rm N}>60)\approx\frac{8796.30A_{\rm N}}{c^2(A_{\rm N}+926)}\text{；} \quad (204)$$

可得

$$\begin{cases}E_{\rm N}(A_{\rm N}=998)\approx 4562.74\,\mathrm{MeV}，\\ m_{\rm E}(A_{\rm N}=998)\approx 4562.74\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}；\end{cases} \quad (205)$$

亦得具有极限饱和特征的核素结合能 $E_{\rm N}$ 理论最大值 $E_{\rm NStmax}$、$E_{\rm NStmax}$ 的等效质量 $m_{\rm EStmax}$ 分别为

$$\begin{cases}E_{\rm NStmax}(A_{\rm N}\to+\infty)\approx 8796.30\,\mathrm{MeV}，\\ m_{\rm EStmax}(A_{\rm N}\to+\infty)\approx 8796.30\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}\text{。}\end{cases} \quad (206)$$

方程（201）式与稳定核素结合能数据之间相关系数为 0.9999，曲线如图 22 所示；远景曲线如图 23 所示。

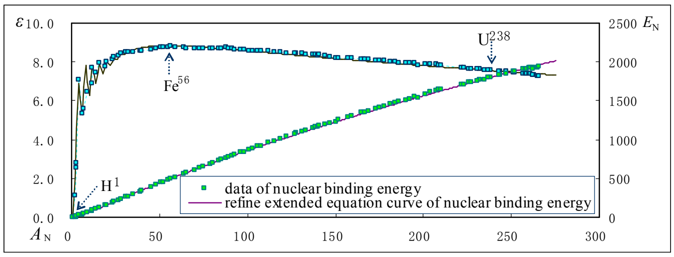

图 22 稳定核素结合能单边扩展趋势方程曲线图（$b_{\rm A}\neq1$）

Fig. 22 Curve figure of unilateral extended tendency equation of stable nuclear binding energy(when $b_{\rm A}\neq1$)

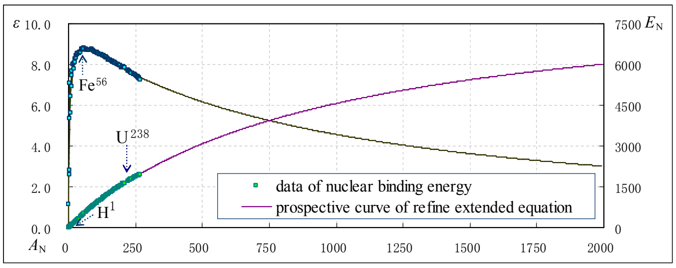

图 23 核素结合能细化扩展方程远景曲线图（$b_{\rm A}\neq1$）

Fig.23 Prospective curve figure of unilateral refinement extended tendency equation of the nuclear binding energy(when $b_{\rm A}\neq1$)

计算结果（205）式及（206）式与（192）式表明，区域近似相同，但远景差异巨大；其中方程（201）式的远景极限饱和特征较为符合物理学理论的主线脉络思想。

上述关于稳定核素计算的趋势分析方法，其分布方程（103）式及其解（104）式，比结合能方程（111）式及其具体形式（120）式及（121）式、（199）式，结合能方程（135）式及（137）式、（201）式，皆仍属于唯象形式，是趋势层面的统计性质描述，在趋势上与稳定核素实验数据基本符合的同时，亦具有简洁可解的极限特征。

在趋势比函数 $b_{\rm A}=1$ 给出的结合能远景计算结果（192）式、（196）式与在 $b_{\rm A}\neq1$ 给出的结合能远景计算结果（205）式存在显著差异；即使在同为取 $b_{\rm A}=1$ 情况下，对比方程（136）式与（138）式的远景计算结果（192）式与（196）式，核素结合能 $E_{\rm N}$ 取理论最大值 $E_{\rm Ntmax}$ 时二式之间质子数 $Z_{\rm t}$ 的最大相对误差为 1.6%，核子数 $A_{\rm Nt}$ 及 $E_{\rm Ntmax}$ 的最大相对误差分别为 8.6%，8.1%；这些显著差异是仅基于数据特征建立趋势方程而缺少解析构造所致，还有显著不足是未能对广泛的核素予以解析层面的描述。

一个深入研究方向是，稳定核素分布方程（103）式、比结合能方程（111）式或相应的结合能方程（等效质量方程）在趋势上具有共同的解析基础方程，可进行广泛的核素计算，同时上述分布方程、比结合能方程及结合能方程等仅为其简化导出形式或条件近似解。

2.2 太阳系元素丰度数据的简略趋势性方程形式

太阳系元素丰度数据研究是天体物理学及空间化学领域探索的重要方向，对理解宇宙星系元素起源、演化及分布具有显著意义。在忽略细节差异情况下，一般在趋势上可将太阳系元素丰度近似等效为宇宙元素丰度。

下面给出太阳系元素丰度数据的趋势性方程形式。

依据太阳系元素丰度数据[12]，取 $A_{\mathrm{selog}}=\log_{10}A_{\mathrm{se}}$，$A_{\mathrm{se}}$（atoms/$10^6$ atoms Si）为太阳系的元素丰度，$A_{\mathrm{selog}}(\mathrm{Si})=6$；这是一组动态的数据；由单边波动扩展方程（115）式，得 A_{selog} 与元素原子核核子数（质量数）A_{N} 之间的趋势性方程形式为

$$A_{\mathrm{selog}}=[p_0\frac{\exp[\beta_{01}(A_{\mathrm{N}}-A_{\mathrm{N0}})]-\exp[-\beta_{02}(A_{\mathrm{N}}-A_{\mathrm{N0}})]}{2\cosh[\beta_{03}(A_{\mathrm{N}}-A_{\mathrm{N0}})]}-p_1]\times[1+p_{\mathrm{w0}}\exp(-\gamma_{\mathrm{Aw}}A_{\mathrm{N}})\cos^2[\pi f_{\mathrm{Aw}}(A_{\mathrm{N}}-A_{\mathrm{N1}})]]+p_{\mathrm{rf}}\text{，}\tag{207}$$

这里 p_0、p_1、β_{01}、β_{02}、β_{03} 为待定常量，$\beta_{03}>\beta_{01}>0$；p_{w0} 为波动扩展系数，γ_{Aw}、A_{N0}、A_{N1} 为待定常数，f_{Aw} 为单边波动频率，$f_{\mathrm{Aw}}=T_{\mathrm{Aw}}^{-1}$，$T_{\mathrm{Aw}}$ 为波动周期；p_{rf} 为细化函数；诸待定参量由对实验数据的方程拟合确定。

方程（207）式以元素原子核的核子数作为自变量，但未及细节，仅为趋势分析；其一趋势性简化近似形式为

$$A_{\mathrm{selog}}=[p_{\mathrm{A0}}\exp(-\beta A_{\mathrm{N}})-p_1][1+p_{\mathrm{w0}}\exp(-\gamma_{\mathrm{Aw}}A_{\mathrm{N}})\times\cos^2[\pi f_{\mathrm{Aw}}(A_{\mathrm{N}}-A_{\mathrm{N1}})]]+p_{\mathrm{rf}}\text{，}\tag{208}$$

这里 $\beta=\beta_{03}-\beta_{01}$，$p_{\mathrm{A0}}=p_0\exp[(\beta_{03}-\beta_{01})A_{\mathrm{N0}}]$。

在（208）式中 p_{rf} 含若干波动，其中几个波动分别近似为长周期 $T_{\mathrm{rfL}}=76$，中周期 $T_{\mathrm{rfM1}}=38$、$T_{\mathrm{rfM2}}=22$，短周期 $T_{\mathrm{rfS1}}=4$、$T_{\mathrm{rfS2}}=2$；则在 $T_{\mathrm{Aw}}=12$ 及考虑对 p_{rf} 的周期 T_{rfL} 与 T_{rfS1} 细化时，太阳系元素丰度一趋势方程为

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{selog}}=&[12.8\exp(-0.017A_{\mathrm{N}})-1.4]\\&\times[1-\exp(-0.025A_{\mathrm{N}})\cos^2[12^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-8)]]\\&+0.5[\cos[38^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-56)]+\cos(2^{-1}\pi A_{\mathrm{N}})]\text{；}\end{aligned}\tag{209}$$

（209）式与数据间相关系数为 0.9354，曲线如图 24 所示。

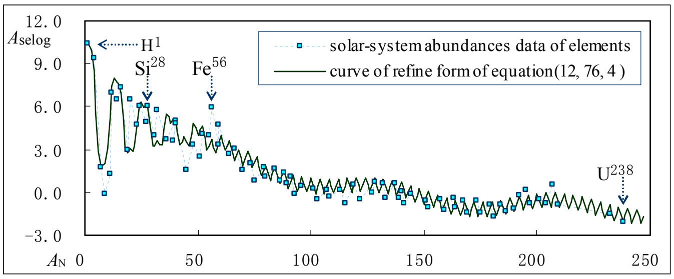

图 24 太阳系元素丰度方程的细化形式曲线图（T_{Aw}=12, T_{rfL}=76, T_{rfS1}=4）

Fig. 24 Curve figure of refinement equation of the abundances of elements in the Solar System(when T_{Aw}=12, T_{rfL}=76 and T_{rfS1}=4）

由（209）式，对 T_{rfL} 及 T_{rfS1} 二重细化，可得方程

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{selog}}=&[13.3\exp(-0.017A_{\mathrm{N}})-1.6]\\&\times[1-\exp(-0.025A_{\mathrm{N}})\cos^2[12^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-8)]]\\&+[0.5+\exp(-0.015A_{\mathrm{N}})]\\&\times[\cos[38^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-56)]+\cos(2^{-1}\pi A_{\mathrm{N}})]\text{；}\end{aligned}\tag{210}$$

（210）式与数据间相关系数为 0.9366，曲线如图 25 所示。

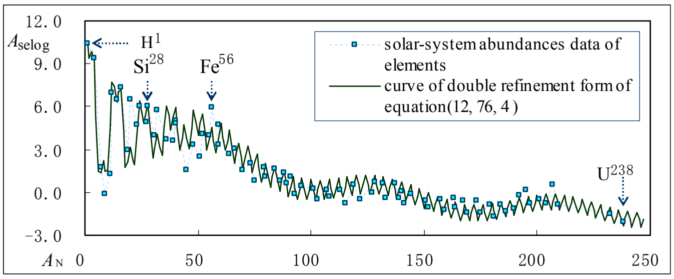

图 25 太阳系元素丰度方程的二重细化形式曲线图（T_{Aw}=12, T_{rfL}=76, T_{rfS1}=4）

Fig. 25 Curve figure of double refinement equation of the abundances of elements in the Solar System(when T_{Aw}=12, T_{rfL}=76 and T_{rfS1}=4）

参考（210）式，当 $T_{\mathrm{Aw}}=14$ 时，可得一趋势方程为

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{selog}}=&[13.2\exp(-0.017A_{\mathrm{N}})-1.6]\\&\times[1-\exp(-0.025A_{\mathrm{N}})\cos^2[14^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-9)]]\\&+[0.5+\exp(-0.01A_{\mathrm{N}})]\\&\times[\cos[38^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-56)]+\cos(2^{-1}\pi A_{\mathrm{N}})]\text{；}\end{aligned}\tag{211}$$

（211）式与数据间相关系数为 0.9396，曲线如图 26 所示。

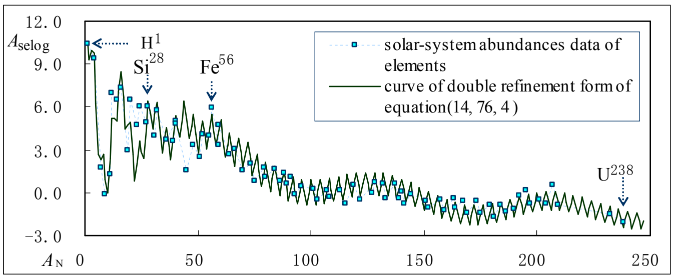

图 26 太阳系元素丰度方程的二重细化形式曲线图（T_{Aw}=14, T_{rfL}=76, T_{rfS1}=4）

Fig. 26 Curve figure of double refinement equation of the abundances of elements in the Solar System(when T_{Aw}=14, T_{rfL}=76 and T_{rfS1}=4）

由方程（211）式，当进而考虑对 p_{rf} 中 $T_{\mathrm{rfM2}}=22$ 亦进行二重细化时，则可得太阳系元素丰度一趋势性方程为

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{selog}}=&[14.1\exp(-0.018A_{\mathrm{N}})-1.2]\\&\times[1-\exp(-0.018A_{\mathrm{N}})\cos^2[14^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-9)]]\\&+[0.5+\exp(-0.015A_{\mathrm{N}})]\\&\times[\cos[38^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-56)]+\cos(2^{-1}\pi A_{\mathrm{N}})]\\&+[0.5+\exp(-0.2A_{\mathrm{N}})]\cos[11^{-1}\pi(A_{\mathrm{N}}-56)]\text{；}\end{aligned}\tag{212}$$

（212）式与数据间相关系数为 0.9262，曲线如图 27 所示。

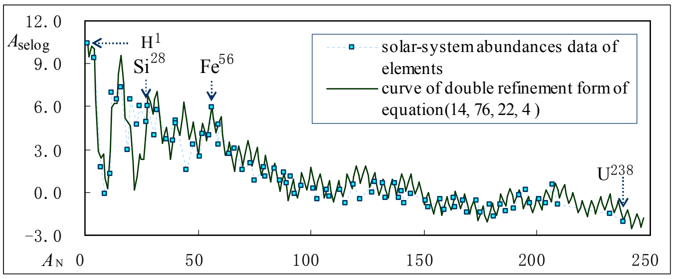

图 27 太阳系元素丰度方程的二重细化形式曲线图（T_{Aw}=14, T_{rfL}=76, T_{rfM2}=22, T_{rfS1}=4）

Fig. 27 Curve figure of double refinement equation of the abundances of elements in Solar System(when T_{Aw}=14, T_{rfL}=76, T_{rfM2}=22 and T_{rfS1}=4）

上述基于太阳系元素丰度数据特征给出的简略趋势方程，还需相应的细节比例总量约束分析及根据数据补充修正的动态情况予以平衡调整，进而将方程（103）式、（111）式及（207）式联合整体研究，为深入探索宇宙元素的起源、演化及分布提供解析分析途径及统一方程形式参考。

2.3 势能函数曲线的方程形式

2.3.1 一般性势能函数曲线的方程形式

在自然现象中，势能函数描述很重要；基于级数方程（58）式，可得一类现象演化过程势能U随距离r变化的趋势性方程为

$$U=\phi_0+\sum_{\Lambda=1}^{\Theta}\phi_\Lambda\frac{\exp[\alpha_\Lambda(r-r_\Lambda)]-\exp[-\beta_\Lambda(r-r_\Lambda)]}{2\cosh[\gamma_\Lambda(r-r_\Lambda)]}\text{，}\quad（213）$$

这里ϕ_0为待定常数，Θ、Λ为自然数，$\Theta\ge 1$、$\Theta\ge\Lambda\ge 1$；r_Λ为$U(r)$曲线各分段中心平衡点横坐标；ϕ_Λ、α_Λ、β_Λ、γ_Λ为各分段曲线形态系数。

依据方程（213）式，简单地，由其中三项可得部分现象演化过程势能U随距离r变化的简略趋势性方程为

$$U=\phi_0+\phi_1\frac{\exp[\alpha_1(r-r_1)]-\exp[-\beta_1(r-r_1)]}{2\cosh[\alpha_1(r-r_1)]}+\phi_2\tanh[\alpha_2(r-r_2)]\text{，}\quad（214）$$

这里ϕ_0、ϕ_1、ϕ_2、α_1、β_1、α_2、r_1、r_2为待定常量；一般地$\alpha_1\ge 0$、$\beta_1\ge 0$、$\alpha_2\ge 0$，$r_2>r_e>r_1>0$，$0.5(r_1+r_2)\approx r_e$，r_e为平衡间距；有区域状态近似方程

$$U(r<<r_1)\approx\phi_0-\phi_1\exp[(\alpha_1-\beta_1)(r-r_1)]-\phi_2\text{，}\quad（215）$$

$$U(r>>r_2)\approx\phi_0+\phi_1+\phi_2\text{。}\quad（216）$$

方程（214）式亦是级数方程（59）式的简化形式。

由方程（214）式，当$\phi_1<0$、$\phi_2\ge 0$时，可得势能一组曲线如图 28 所示，其主要有三种曲线形态。

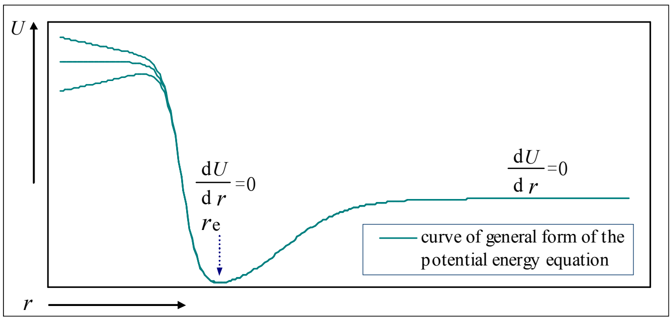

图 28 势能方程一般形式的曲线图
Fig. 28 Curve figure of general form of the potential energy equation

当$\phi_1>0$、$\phi_2\le 0$时，由方程（214）式可得反常势能的一组曲线如图 29 所示，其亦主要有三种曲线形态。

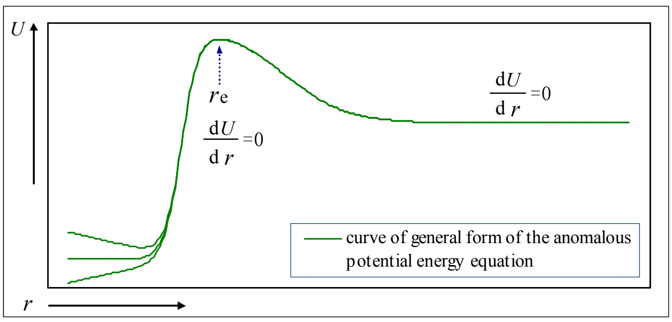

图 29 反常势能方程一般形式的曲线图
Fig. 29 Curve figure of general form of the anomalous potential energy equation

方程（214）式适于部分自然现象势能曲线整体趋势性描述及局部细节刻画分析。

简单地理想情况下，当$\beta_1=\alpha_1$时，得方程（214）式的一简化形式为

$$U=\phi_0+\phi_1\tanh[\alpha_1(r-r_1)]+\phi_2\tanh[\alpha_2(r-r_2)]\text{；}\quad（217）$$

有区域状态近似方程

$$U(r<<r_1)\approx\phi_0-\phi_1-\phi_2\text{，}\quad（218）$$

$$U(r>>r_2)\approx\phi_0+\phi_1+\phi_2\text{。}\quad（219）$$

方程（217）式当$\phi_1<0$、$\phi_2\ge 0$时的势能曲线如图 30 所示，其简化为一种曲线形态。

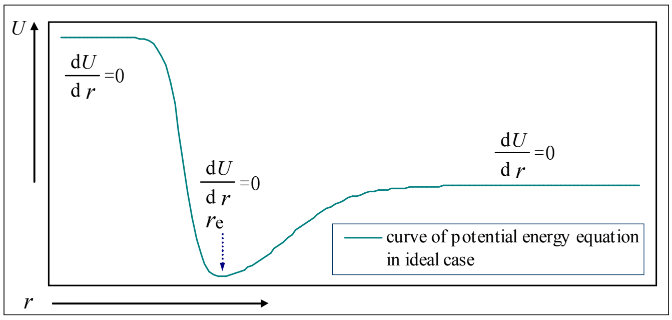

图 30 理想情况下的势能方程曲线图
Fig. 30 Curve figure of potential energy equation in ideal case

方程（217）式当$\phi_1>0$、$\phi_2\le 0$时的反常势能曲线如图 31 所示，其亦简化为一种曲线形态。

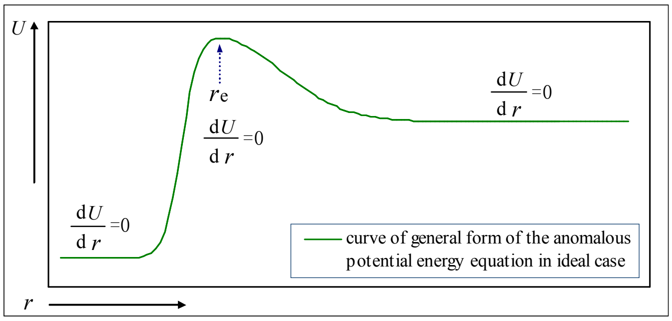

图 31 理想情况下的反常势能方程曲线图
Fig. 31 Curve figure of the anomalous potential energy equation in ideal case

物质之间的相互作用，在各层面及不同作用距离上具有其相应的具体势能方程表述，乃至含有波动性及反常性势能形式；目前已知的四种作用力仅是诸多作用力的显现部分，诸作用力的起源及可能的恒转永动开放动态背景仍是需要进一步探索的疆域，势能方程（214）式亦仅是其中一简略趋势性描述途径。

2.3.2 双原子分子势能曲线的方程形式

双原子分子势能函数具有多种形式[9, 13~15]，其中对于K_2-$B^1\Pi_u$的 RKR（Rydberg-Klein-Rees）数据[9]，由方程（217）式可得势能U（cm^{-1}）与核间距r (nm)之间的趋势方程为

$$U=2400[1.9-1.4\tanh[15(r-0.31)]+\tanh[5(r-0.55)]]\text{，}\quad（220）$$

这里平衡间距$r_e\approx 0.5(0.31+0.55)=0.43\text{nm}$。

方程（220）式曲线如图 32 所示，方程与数据的相关系数为 0.9923。

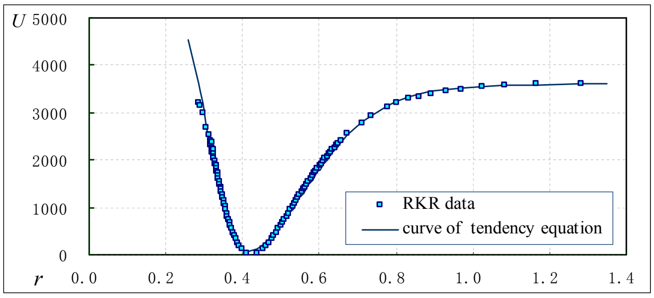

图 32 双原子分子势能函数的方程曲线图
Fig. 32 Curve figure of potential energy functional equation of diatomic molecule

对于方程（220）式，其一简化的局部曲线方程形式为

$$U = 2400[1.5 - \tanh[18(r-0.335)] + \tanh[5(r-0.55)]]；\quad (221)$$

方程曲线如图 33 所示，方程与数据的相关系数为 0.9992。

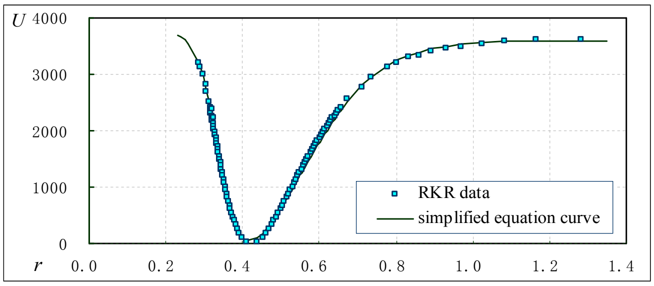

图 33 双原子分子势能函数的简化方程曲线图
Fig. 33 The curve figure of potential energy functional simplified equation of diatomic molecule

方程（220）、（221）二式是部分数据拟合的方程形式，仅在表明方程曲线的形态及趋势，具体的解析方程还需基于极端情况下的实验数据及原理层面的机理探讨予以分析确定及计算验证。

2.4 自然饱和过程

在一般性的科学技术研究探索中，自然饱和过程是较普遍的演化现象，诸如磁性材料饱和磁滞曲线、温度控制曲线、电阻率及膨胀系数随温度变化曲线、超导材料电阻—温度（R—T）曲线、金属淬冷过程曲线、地震前后地温曲线、机电开关动作过程曲线、阶跃响应曲线、光电流与加速电压关系曲线、半导体分立器件 V—A 特性曲线、生物体生长或数目总量曲线、植物群落种数—面积曲线、生物体或国家能耗总量曲线、扩张繁盛或消隐衰落曲线、血红蛋白氧饱和曲线、物理或化学反应过程曲线、传播扩散或集聚收敛曲线、人生旅行或工作成果总量曲线、化学元素等温热色谱穿透曲线、成分溶解或沉淀过程曲线、发酵过程曲线、共聚反应转化率曲线、化学滴定曲线、颗粒级配曲线、单轴应力应变曲线、套压时程线、蝶阀流量—开度曲线、坝体浸润线、土体崩解过程曲线、混凝土体积膨胀过程曲线、建筑物沉降量时程线、地基强度增长曲线、弹坑尺寸—弹丸初速度曲线、钢材 DWTT 冲击能量随温度变化曲线、材料断裂韧性与屈服强度关系曲线等。

这类现象演化具有阶段或局部区域的极限性、饱和性、相变或等效相变等特征，是开放系统进行多层面物质、能量、信息交换的动态平衡重构过程。

在现象界，过犹不及，适可而止；朴素本真，天成自然。花开未盛、月圆未盈，乃表观佳境；而后随缘转遇，盛极而衰、盈溢而亏。万千气象诸念所幻，沙等世界各趋所适；其从一相对稳态演化到另一相对稳态的转变过程基本可经由参量代换或直接依据方程（1）式的极限解（或饱和解）、波动解（或振荡解）、极限与波动复合解、近似等效解析解及诸解的复合函数等形式予以趋势性描述。其中依据方程（31）式予以趋势描述的部分自然饱和过程曲线如图 34 所示，其 18 种曲线即包含极限情况下方程（15）式中双曲正切函数或描述 S 型曲线的经典 Logistic 函数（19）式的 2 种曲线形态。

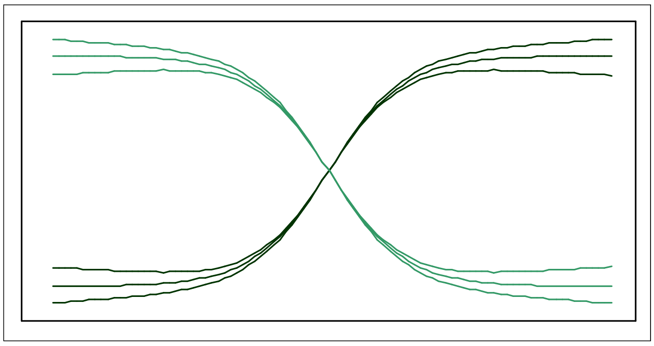

图 34 自然饱和过程趋势方程曲线图
Fig.34 Curves figure of tendency equations of the natural saturation process

一般现象演化在微过程含有小幅值振荡现象，在极限上至少存在一趋势参量乃至饱和参量，非线性科学研究主旨之一即是确定这些参量；而诸多自然饱和过程则是更高层面演化过程的局部构成环节或细化台阶。诸如生物生长过程即是一个动态平衡过程，有单一饱和过程与多阶段饱和过程，其中多阶段饱和过程可由级数方程（58）式或（59）式描述；而对于单一的理想饱和过程，可由方程（15）予以简单描述。

下面以树木生长高度曲线、材料断裂韧性曲线为例，给出二个较为理想的单一过程趋势方程具体形式。

2.4.1 树木生长高度曲线方程

基于方程（15）式，得树木生长高度 H(m) 与时间 t(a) 之间的关系方程（222）式，曲线如图 35 所示，树木（紫果云杉）高度数据来自文献[16]，方程与数据之间的相关系数为 0.9993。

$$H = 22 + 22\tanh[0.02(t-97)]。\quad (222)$$

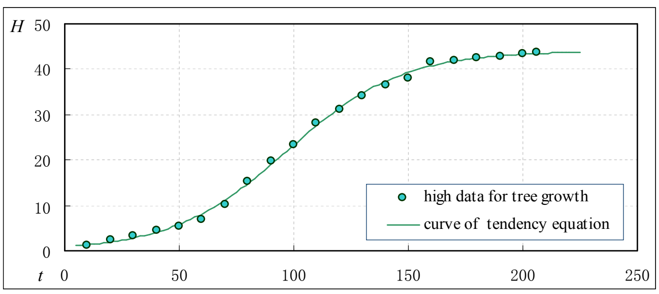

图 35 树木（紫果云杉）生长过程趋势方程曲线图
Fig. 35 Curve figure of tendency equation of the tree(Picea purpurea) growth process

2.4.2 材料断裂韧性曲线方程

基于方程（15）式，可得类如材料断裂韧性 K (MPam$^{0.5}$) 随屈服强度 σ_{Y} (MPa)变化等的趋势方程（223）式

$$K=104-73\tanh[0.005(\sigma_{\mathrm{Y}}-1250)]\text{。} \qquad (223)$$

方程曲线如图 36 所示，图中钢材料 AISI4340 (40CrNiMo)断裂韧性的数据来自文献[17]。

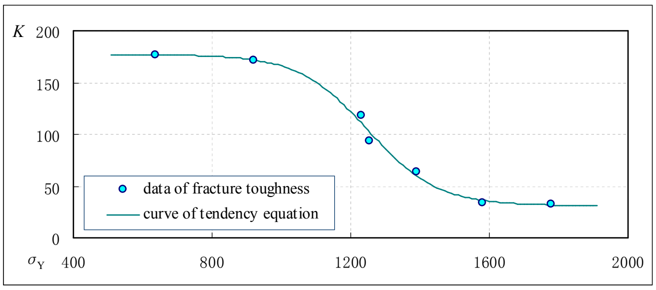

图 36 钢材料断裂韧性趋势方程曲线图
Fig. 36 Curve figure of tendency equation of fracture toughness for steel material

2.5 蠕变过程

对于部分材料蠕变过程曲线、疲劳裂纹扩展速率曲线，以及诸如材料切削走刀抗力（或后刀面磨损宽度）—时间（或切削路程）曲线、生产总成本—总量曲线、二极管 V—A 特性曲线、生物体生住异灭轮转及世界成住坏灭循环过程等，可基于方程（31）式或方程（41）式予以趋势描述；这些曲线的特征是具有初期快速、中期线性平缓、末期急剧演化区域。整体上，卍、卐形曲线可由方程（1）式的近似等效解析解（31）式给出，在此，蠕变过程与饱和过程可由同一方程及其相关扩展形式描述，皆为同类过程的不同形式表现。

对于金属或岩石部分典型蠕变过程曲线[17~20]从材料开始变形、经线性拉伸到断裂点三阶段伸长率 λ 与时间 t 的关系，可用方程（31）式的 $\lambda(t)$ 形式予以趋势性描述，$\lambda(t)$ 方程如下

$$\lambda=\lambda_0+A_{\mathrm{C}}\frac{\exp[\alpha_{\mathrm{C1}}(t-t_0)]-\exp[-\alpha_{\mathrm{C2}}(t-t_0)]}{2\cosh[\alpha_{\mathrm{C3}}(t-t_0)]}, \qquad (224)$$

这里 t_0、A_{C}、α_{C1}、α_{C2}、α_{C3} 为待定常量，$\lambda(t=t_0)=\lambda_0$。

方程（224）式或其坐标置换方程形式的趋势性曲线如图 37 所示。

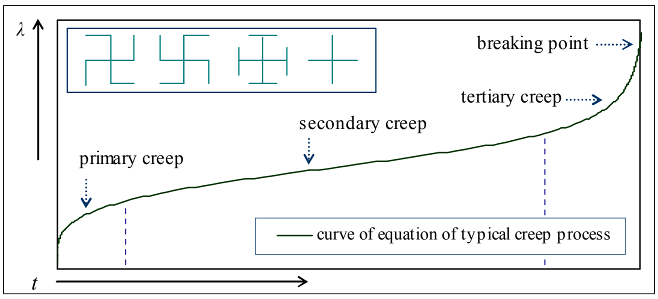

图 37 金属或岩石材料典型蠕变过程趋势方程曲线图
Fig. 37 Curve figure of tendency equation of typical creep process for metal or rock material

依据方程（31）式描述的近于极限状态的饱和过程曲线（如图 34 所示）与蠕变过程趋势性曲线（如图 37 所示），表明在趋势上，饱和或极限过程、蠕变过程等皆是同一类方程的不同体现形式，也即在趋势层面可由方程（31）式及其相应扩展形式统一描述相关的自然饱和过程、材料蠕变等过程；进一步地，饱和极限、材料断裂、电磁击穿、流体湍流等特征具有相通的演化机理，在解析描述方面可相互借鉴参照，其趋势性的起承转合特征可由相近的数学方程（1）式及其等效解析解（31）式或其相应扩展形式、级数方程（58）式等进行统一刻画或一致性描述。

对于伸长率方程（223）式，取时间最大值 $t_{\max}\geq t$，则当

$$\left|\alpha_{\mathrm{C1}}(t_{\max}-t_0)\right|<<1\text{、}\left|\alpha_{\mathrm{C3}}(t_{\max}-t_0)\right|<<1$$

时，方程即可简化为

$$\begin{aligned}\lambda&\approx\lambda_0+A_{\mathrm{C}}\frac{[1+\alpha_{\mathrm{C1}}(t-t_0)]-\exp[-\alpha_{\mathrm{C2}}(t-t_0)]}{[1+\alpha_{\mathrm{C3}}(t-t_0)]+[1-\alpha_{\mathrm{C3}}(t-t_0)]}\\&=\lambda_0+0.5A_{\mathrm{C}}[1+\alpha_{\mathrm{C1}}(t-t_0)]-\exp[-\alpha_{\mathrm{C2}}(t-t_0)]]\\&=\lambda_0+0.5A_{\mathrm{C}}[1-\alpha_{\mathrm{C1}}t_0-\exp(\alpha_{\mathrm{C2}}t_0)]\\&\quad+0.5A_{\mathrm{C}}\exp(\alpha_{\mathrm{C2}}t_0)[1-\exp(-\alpha_{\mathrm{C2}}t)]+0.5A_{\mathrm{C}}\alpha_{\mathrm{C1}}t\,;\end{aligned} \qquad (225)$$

方程（225）式与诸如改进的 Nishihara 模型等方程表述的解[18]

$$\lambda=E_1^{-1}\sigma_{\mathrm{C}}+E_2^{-1}\sigma_{\mathrm{C}}[1-\exp(-\eta_{\mathrm{m1}}^{-1}E_2t)]+\eta_{\mathrm{m2}}^{-1}(\sigma_{\mathrm{C}}-\sigma_{\mathrm{S}})t$$

形式相同；这里 E_1 为弹性模量，E_2 为黏弹性模量，η_{m1}、η_{m2} 为黏性系数，σ_{C} 为材料所受常应力，σ_{S} 为材料长期强度，$\sigma_{\mathrm{C}}>\sigma_{\mathrm{S}}$；即得方程（224）式部分系数与力学参数间关系方程组

$$\begin{cases}\lambda_0+0.5A_{\mathrm{C}}[1-\alpha_{\mathrm{C1}}t_0-\exp(\alpha_{\mathrm{C2}}t_0)]=\sigma_{\mathrm{C}}E_1^{-1},\\\alpha_{\mathrm{C2}}=E_2\eta_{\mathrm{m1}}^{-1},\\0.5A_{\mathrm{C}}\exp(\alpha_{\mathrm{C2}}t_0)=\sigma_{\mathrm{C}}E_2^{-1},\\0.5A_{\mathrm{C}}\alpha_{\mathrm{C1}}=[\sigma_{\mathrm{C}}-\sigma_{\mathrm{S}}]\eta_{\mathrm{m2}}^{-1}.\end{cases} \qquad (226)$$

在整体脉络上，生物生长的饱和过程与材料受力的蠕变过程是同一类数学方程的不同表现形式；而在细节特征上，树木的枝叶扩散与材料的裂纹扩展则具有相近的分维（分形）曲线形态。

在趋势方程描述上，饱和过程与蠕变过程可相互转化，二者具有等效性或相当性；特别地，在进行坐标置换后，饱和过程与蠕变过程在机理及曲线形态上亦具有一致性。

对于一些自然现象，大略趋势上前一阶段性饱和过程或蠕变过程在进入后期的同时，亦开始酝酿下一阶段的饱和过程或蠕变过程，且饱和过程与蠕变过程相互转化或交替呈现，曲线诸段级数项间向前延伸及向后延伸相互影响，由此周期性台阶构成更高层面的非线性演化过程，其包含着多层面、多阶段、诸层嵌套、等效约化、系列相变、动态开放的激励、演化、守恒要旨。

在此广泛意义上，人生浮沉及朝代替亦是相应因缘果递续的自迭代过程。

2.6 趋势性远景脉络及轮廓

在自然现象演化过程，一般趋势上的规律具有阶段性的起承转合特征；这其中引入无穷会导致层面跨越，跨越层面后的性质一般已经发生变化，而仍以原层面的性质细化平均或广域延展描述，仅是一种拟定所需的在原层面的趋势概括。无穷小通过适当降维可展现无穷多的细节及大于零的常量特征，无穷大通过适当升维可整体趋近常量、乃至是无穷小表征。无穷小再小本质上仍为区域，无穷大再大仍有预置的边界本际；适当变化维数，诸多无穷小与无穷大皆可转化为非零的常量。

自然现象（广义上包括社会现象）演化过程纷繁复杂，多背景、多层面、多变量等诸多因素参与嵌套其中；线性缓慢增长是否一定会带来非线性快速增长，非线性快速增长是否一定会以某种极限形式作为阶段性的后期状态，则是由现象演化过程与环境之间所进行的物质、能量、信息等因素交换的动态平衡决定的；其一是线性缓慢增长是否会引起积累的释放，其二是非线性快速增长之后进入新的平衡状态，然后分岔，或缓慢变化成为下一次非线性快速变化的前期线性台阶，或在极少数情况下导致断崖式衰减（衰落），即单因素增长过冲导致失调失控；所以，有效控制增长模式，是这方面的重要研究方向。

在构造层面并同时兼顾解析及计算层面的研究方向，首先建立较为普适而又相对具体的现象演化过程方程组，然后进行适当理想简化处理，给出其解析解；将该解析解根据讨论方向进行形式拓展，再代回原来未简化的方程组中进行试探性确定近似解的初步形式；经过若干次近似解的形式拓展修改、试探性回代，最终确定方程组近似解在探讨方向的具体形式，直至构造出更高层次的方程组，乃至拓展出更普适基础的数学框架；这也是在构造层面数学家工作的内涵精要所在。

在解析构造上，定义了 0（空元）及 1（或单位元），约定了加法运算及其逆运算规则（包括衍生出单位逆元），则几乎全部数学可由此构建起来。简略上，大的数学在于框架构造，小的数学在于解析计算；整体上，框架构造与解析计算相辅相成，即脉络上数学的大与小相融无别。

数学发展到今天，机械论的内核思想仍然在起着主导作用，并在未来的一段时期仍将继续下去。机械论思想有其显著的直观朴素的优势，拆解重组、变换叠加、进退有据。在机械论方向，连续是可以由离散单元的组合予以描述的，而离散单元本身又具有连续的属性；阶跃具有连续的内秉特征，连续具有可分割离散的等效性质；在同一层面上线性是非线性的特例，而在跨层面上某一层面的非线性又是另一层面线性的近似表述。

在一般意义上，数学不同于哲学，但具有细化哲学的特质；数学不完全是科学，但框架构造往往需要解析计算数值验证；数学有别于通常知识，但可以改善知识结构并相互促进；数学并行于传统宗教，但从大千世界抽象出的构造延展有效性及方程描述的简略普适性却可以生成由衷的理体信仰。

数学是人类发明与发现相交织的逻辑解析混合体，既有貌似纯天然的脉络投影，更有人工搭建加固及雕琢打磨的痕迹，甚至在分支方向还带有构造者的风格；其基础不能自证，逻辑演绎排它不完备，诸层面构造深隐矛盾及自颠覆悖论；若学者以为所从事研究的学科完备性远优于其它学科，则是综合智力有待大幅提高的表现。

诸多情况下，某一层面的待解问题，其答案或解决途径往往在相邻层面或在更远更深的背景层面中，乃至其指引及关联就在即下的平素日常生活里，在经意或不经意的举手投足及展眉瞬目间，而究竟并没有最终答案或根本解决途径，存留的仅是学者的阶段性努力意愿及探索朝向。尤为重要的是，若经年累月的理论研究及实践探索没有助力消解我执和法执、以及勘透生灭并获得稳定开放的实证检验，则人生无论如何还是近于虚度了。

一般方程建立都是有其相应抽象前提基础及理想边界条件的；随着建立方程的前提基础及边界条件的变化，原来建立的方程将逐渐失效，需要在新的前提基础及边界条件下建立新的方程形式，进而给出新阶段的演化规律。譬如一组动力学微分方程，当前提基础及边界条件发生变化时，一般不再严格有效；诸如曾经的山盟海誓一般多是阶段性的、乃至是暂态的表现，不具有长程动态的内涵属性，悲欢聚散、成住坏空皆是因缘果的延续代换演进；当现象演化从一个稳定状态向另一稳定状态过渡时，则描述现象演化的微分方程就需要作出相应的形式调整，乃至重新建立方程组，给出新的规律刻画。

单一的、局部的饱和过程构成更高层面多变量演化过程的一个阶段性剖面投影台阶，在前一个接近相对缓慢变化的饱和区域，转育下一个模式的饱和发展过程，其脉络上在传续中突破、在更迭中演进；分析中于整体层面进行多阶段、多台阶、多模式、系列相变的联合描述，综合平衡局部细节精度与动态整体演化趋势的关系，机理分析与趋势计算相结合，将预言的解析数据与实际将生成的基础数据进行比较，然后根据比较结果，对趋势性方程进行相应调整或继续保持，包括方程中的待定系数，乃至构造新的方程形式，形成趋势方程库，继而实现从基础数据库，经趋势方程库，到解析数据库，再返回与基础数据库对比，调整趋势方程形式，补充趋势方程库，导出更新的解析数据库，形成动态的自循环、自提升的三库联动数据体系。

对于封闭系统或开放系统，激励、演化及守恒，这三个紧密联系的要素对应着系统参量线性方程或非线性方程的作用项、微分及积分运算，在微元与整体之间的可逆演绎或局部可逆演绎是动力学方程的主旨内涵，是自 Newton 自然哲学以来的数理框架根基，根本上具有机械论或还原论的思想内核；这其中，往往一个简单而又典型的非线性微分方程，却可能没有严格解析解。建立与微积分方程相并行、同时可相互变换的体系，将是含融并超越目前线性方程及非线性方程，尤其是经典几何与代数结合模式及复变函数阶微积分方程形式、进而实现多层面解析刻画的重要探索方向。描述现象演化过程的数理方程具有相应的逻辑延展性，延展方向及延展程度由哲学思辨融合予以甄别确认。

在更为深刻的层面上，数理方程及逻辑框架是舟楫、是桥梁、是台阶，同时亦是藩篱、是束缚、是障碍；轻视数理逻辑显然是不合适的，但离开数理逻辑及模型方程就难以理解自然及本身，则毫无疑问是步入歧途了；当然，在思议的极限层面，歧途与大道不一不异。

极致上，数理方程及哲学论述，构成了次第理解世界成住坏空演化机理的步进台阶。在近于究竟层面，科学技术、文学艺术、政论治国等，皆具有理想抽象、实践混叠、动态适应的操作，虽基本面向相异，然框架延伸相通相容，内涵旨趣连绵一体。

自然含容逻辑，自然超越逻辑，自然具有无限的创造性。

2.7 自然现象演化过程的趋势性大体分类

对广泛的自然现象进行深入分析，其演化过程可有多种分类途径和方法；其中从饱和过程及蠕变过程的角度考察，可以初步确定自然现象（也包括社会现象）演化过程在趋势上大体分为如下三类：

第一类，饱和过程；严格的饱和过程在整体远景上趋于一定值，广义的饱和过程趋于确定的规律或方程形式，定演化规律之间的跳转，乃至定非定；

第二类，蠕变过程；严格的蠕变过程，在远景上迅速趋于无限；广义的蠕变过程，经过快速的增长后又趋于较为平缓的变化，即短期的快速增长后没有进入无限状态，而是进入另一阶段的演化过程；

第三类，除上面单一饱和过程及蠕变过程的其它演化形式；这类演化过程部分地或是具有饱和过程及蠕变过程二者兼容或叠加的混合模式，或是几乎完全不同于饱和过程及蠕变过程的演化形式。

较为理想的饱和过程及蠕变过程，可依据方程（1）式及其近似解（31）式或相应扩展形式予以趋势性描述；对于较为复杂的演化过程，可划分为若干阶段性区域，然后分解为一系列的相互连接的单一饱和过程及蠕变过程，依据级数（58）式、（59）式等予以趋势性或轮廓层面的相变系列描述。显著地，生物生长在整体上为一广义饱和过程，其包含若干阶段性的子饱和过程及等效子蠕变过程；特别地，植物种子在萌发过程中从吸胀开始，经萌动及发芽，到幼苗初成，即接近一等效蠕变过程。

其中，可依据级数（59）式描述的多阶段饱和过程如图 38 所示，在后期呈现出蠕变状态的多阶段演化过程如图 39 所示。在多阶段饱和过程或蠕变演化过程中，局部或阶段性的饱和过程与蠕变过程可相互转化及构成。

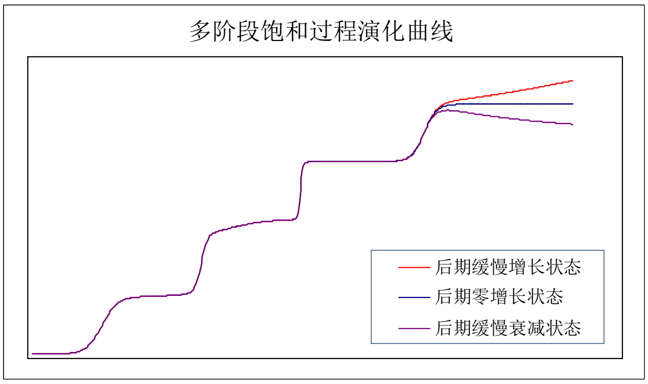

图 38 可由级数方程描述的多阶段饱和过程演化曲线
Fig. 38 Curve figure of the evolution characteristics of a multi-stage saturation process that can be described by the series equation

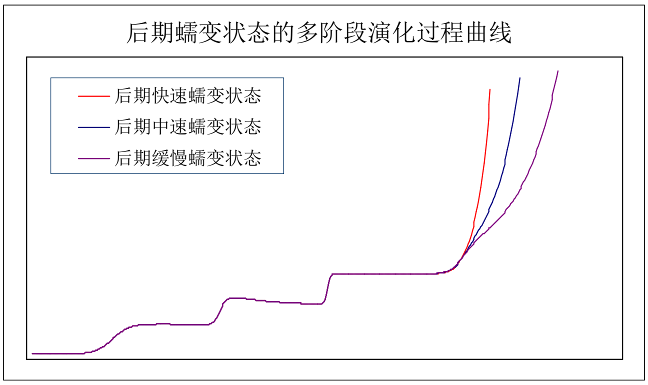

图 39 可由级数方程描述的后期蠕变状态的多阶段演化过程曲线
Fig. 39 Curve figure of a multi-stage evolution process with the creep state in the later stage that can be described by the series equation

2.8 自然现象演化过程的规律谱系—简学或维学纲要大略

将具有自嵌套结构特征的方程（1）式及其近似等效解析解（31）式作为描述自然现象演化过程一方程组的理想简化形式或趋势近似解，可初步对诸多现象予以一个较为完整的阶段性描述，进而对于多阶段饱和或蠕变过程，依据（58）式、（59）式趋势描述次序连接的演化子过程。

诸多方程都嵌套着相应层面的等效基本常数，而系列规律之间的连接纽带即多以这些基本常数解析展开为包括更基本常数的方程为核心环节，通过规律中的基本常数诸级解析展开实现规律之间的转化过渡及跳转迁移，即一过程规律中的基本常数是包含着更细微或更广阔层面基本常数的局部能量时空尺度方程数值形式近似表示的归化量，其背后还隐含着无尽的大略趋势与无穷的纷繁嵌套细节。在相邻演化规律之间，表现为规律的串联方式及并联方式；其中串联方式主要是逻辑延展递进关系，并联方式主要是逻辑补充关系，如此形成演化规律分布谱系（或谱阵），在构造上具有多维数（或维度，包括整数维、分数维、函数维等）本质属性；每一规律都有相应具体内容，诸规律联合起来成为阶段性较为完整的描述内容，如此动态的规律谱系（谱阵）逐步接近所描述的目标现象演化过程，且相邻现象演化规律谱系（谱阵）之间亦相互影响。

将关于上述构造方式的自然现象演化过程规律分布谱系（谱阵）及连接延展纽带的学问称为简学（Jiansics, Jiansism）或维学（Dimennics, Dimennism），其包含现象系列相变演化规律的描述，纲要大略主要有下面三个定则：

A 由自然现象演化系列相邻过程的系列规律形成具有相应分布特征的规律谱系（谱阵），一方向是一规律谱系（谱阵）可在趋势上凝聚成极少数规律、乃至凝聚为一个嵌套式规律或方程组，另一方向是规律谱系中的单一规律亦可进一步细化分解为更细微的规律谱系（谱阵）；

B 规律谱系（谱阵）中的规律分布通过基本常数的次第解析展开（包括更基本常数的方程）或凝聚归化予以连接并延展，在谱系（谱阵）范围内基本常数的数量可数；

C 不同自然现象演化规律谱系（谱阵）之间通过等效的基本常数交互重叠及纽带连接形成动态的规律谱系（谱阵）簇，诸规律谱系（谱阵）簇之间亦通过基本常数相互混叠连接，形成多维动态规律系统；特别地，规律谱系及其演替脉络亦具有周期性或准周期性特征。

其中规律谱系（谱阵）之间及规律谱系（谱阵）簇之间延展的交叉重叠是表现形式，基本常数的次第解析展开与凝聚归化及其之间的相互交织是纽带内涵。

如此，简学或维学作为一门研究自然现象演化规律谱系（谱阵）及其延展的学问，研究内容包括规律之间递进演化、规律的展开与规律的凝聚、规律与伴生悖论的转化、规律的分布、规律谱系（谱阵）特征、规律谱系（谱阵）之间及规律谱系（谱阵）簇之间重叠交叉及纽带关联等。

对于科学技术中的解析理论及唯象经验描述框架，一般的单一方程是与更广泛的多层面方程相联系的，甚至是一多层面联立方程组的理想简化形式或多变量广义守恒解；而诸常数则贯穿其中，亦都具有相应的包含着更基础常数的解析方程表述形式，诸层面相互交叉、混叠、嵌套；从定性描述开始，到定量描述，再到新的定性描述，周而复始循环渐近；涵覆整体大略协调，兼容局部关联各异。

根本上，解析仅是一种理想，解析的基础一般仍然是唯象的嵌套式构造，而构造则与悖论伴生。规律是自然的理想简化衍生品，其当与自然同步演进，前人留下的经典及义理多为后续者的探索指向及行进台阶。

世人心系于繁衍的后代，学者倾顾于创建的理论，帝王恩威于新开辟的疆域，圣者幻现于所教化的诸多世界。

3 自适应连接方程参数计算的预置迭代方法

连接方程（31）式及映射方程（42）式～（45）式，是以逻辑解析为内核的普适构造方法建立的。

数学的逻辑解析和普适构造，与生物学的遗传和变异相当。在相邻层面，普适构造以逻辑解析为内核，构造过程框架新远兼顾继承；逻辑解析以普适构造为本底，解析过程脉络严谨兼顾开拓，如此既可避免普适构造的随意性，又可使得逻辑解析具有灵活的开放适应性，保证数学理论框架体系相对自洽、适时突破、转折跃进。

下面从连接方程（31）式的构造特征方程（20）式～（36）式开始，给出数据曲线间断区域自适应连接方程中参数确定的预置迭代计算方法，其尤适于饱和过程曲线的自适应连接。对于较复杂的曲线间断区域，包括位错间断、回转间断等，可依据映射方程（42）式～（45）式予其虚拟端点分段连接、端点数据段平移或旋转等方式计算；对于部分蠕变过程及方程（41）、（45）式的形式，亦可参照计算。

3.1 自适应连接方程在三个局部区域的线性形式

根据连接方程（31）式

$$y = y_0 + A\frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2\cosh[\alpha_3(x-x_0)]},$$

其一等效形式为

$$y = y_0 + A\exp[-\alpha_3(x-x_0)] \times \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{1+\exp[-2\alpha_3(x-x_0)]};\quad(227)$$

则在 $x < x_0$ 区域，当 $\exp[-2\alpha_3(x-x_0)] >> 1$ 时，得

$$\begin{aligned} y &\approx y_0 + A\exp[-\alpha_3(x-x_0)] \\ &\quad\times[\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]] \\ &\quad\times\exp[2\alpha_3(x-x_0)] \\ &= y_0 - A\exp[(\alpha_3-\alpha_2)(x-x_0)] \\ &\quad + A\exp[(\alpha_1+\alpha_3)(x-x_0)];\quad(228) \end{aligned}$$

进而在 $x << x_0$ 区域，当 $\exp[(\alpha_1+\alpha_3)(x-x_0)] << 1$ 时，得方程（31）式的局部区域方程及其斜率 η_1 方程分别为

$$y = y_0 - A\exp[(\alpha_3-\alpha_2)(x-x_0)],\quad(229)$$

$$\eta_1 = -A(\alpha_3-\alpha_2)\exp[(\alpha_3-\alpha_2)(x-x_0)];\quad(230)$$

在极限状态，当 $\mathrm{abs}[(\alpha_3-\alpha_2)(x-x_0)] << 1$ 时，由方程（229）、（230）二式得方程（31）式在 $x << x_0$ 区域的局部线性方程形式及其斜率分别为

$$y = y_0 - A - A(\alpha_3-\alpha_2)(x-x_0)],\quad(231)$$

$$\eta_1 = -A(\alpha_3-\alpha_2)。\quad(232)$$

在平衡点 $x \approx x_0$ 邻近区域，当

$$\max[\mathrm{abs}[\alpha_1(x-x_0), \alpha_2(x-x_0), \alpha_3(x-x_0)]] << 1$$

时，则方程（31）式在 $x \approx x_0$ 邻近区域的线性方程形式及其斜率 η_2 分别为

$$\begin{aligned} y &\approx y_0 + A\frac{[1+\alpha_1(x-x_0)] - [1-\alpha_2(x-x_0)]}{[1+\alpha_3(x-x_0)] + [1-\alpha_3(x-x_0)]} \\ &= y_0 + 0.5A(\alpha_1+\alpha_2)(x-x_0),\quad(233) \end{aligned}$$

$$\eta_2 = 0.5A(\alpha_1+\alpha_2)。\quad(234)$$

根据方程（31）式，其另一等效形式为

$$y = y_0 + A\exp[(\alpha_1-\alpha_3)(x-x_0)] \times \frac{1-\exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(x-x_0)]}{1+\exp[-2\alpha_3(x-x_0)]};\quad(235)$$

则在 $x > x_0$ 区域，当 $\exp[-2\alpha_3(x-x_0)] << 1$ 时，得连接方程（31）式的局部区域近似形式为

$$\begin{aligned} y &\approx y_0 + A\exp[(\alpha_1-\alpha_3)(x-x_0)] \\ &\quad\times[1-\exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(x-x_0)]] \\ &\quad\times[1-\exp[-2\alpha_3(x-x_0)]] \\ &= y_0 + A\exp[(\alpha_1-\alpha_3)(x-x_0)] \\ &\quad\times[1-\exp[-2\alpha_3(x-x_0)] \\ &\quad -\exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(x-x_0)] \\ &\quad +\exp[-(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)(x-x_0)]]。\quad(236) \end{aligned}$$

进一步地，在 $x >> x_0$ 区域，当

$$\exp[-(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)(x-x_0)] << 1$$

时，方程（236）式成为

$$\begin{aligned} y &= y_0 + A\exp[(\alpha_1-\alpha_3)(x-x_0)] \\ &\quad\times[1-\exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(x-x_0)] \\ &\quad -\exp[-2\alpha_3(x-x_0)]];\quad(237) \end{aligned}$$

当

$$\exp[-(\alpha_1+\alpha_2)(x-x_0)] << 1、$$

$$\exp[-2\alpha_3(x-x_0)]] << 1$$

时，由方程（237）式得方程（31）式的局部方程形式及其斜率 η_3 分别为

$$y = y_0 + A\exp[(\alpha_1-\alpha_3)(x-x_0)],\quad(238)$$

$$\eta_3 = A(\alpha_1-\alpha_3)\exp[(\alpha_1-\alpha_3)(x-x_0)];\quad(239)$$

继而在极限状态，当

$$\mathrm{abs}[(\alpha_1-\alpha_3)(x-x_0)] << 1$$

时，由方程（238）、（239）式即得方程（31）式在 $x >> x_0$ 区域的局部线性方程形式及其斜率分别为

$$y = y_0 + A + A(\alpha_1-\alpha_3)(x-x_0),\quad(240)$$

$$\eta_3 = A(\alpha_1-\alpha_3)。\quad(241)$$

3.2 自适应连接方程参数计算的预置迭代方法

根据数据曲线间断区域性质及方程（31）式的三个线性方程（229）~（232）式、（238）、（241）式，得方程组

$$\begin{cases} k_S = \eta_1 = -A(\alpha_3-\alpha_2)\exp[(\alpha_3-\alpha_2)(x_S-x_0)], \\ \rho k_{SE} = \eta_2 = 0.5A(\alpha_1+\alpha_2), \\ k_E = \eta_3 = A(\alpha_1-\alpha_3)\exp[(\alpha_1-\alpha_3)(x_E-x_0)]; \end{cases}\quad(242)$$

$$\begin{cases} k_S = \eta_1 = -A(\alpha_3-\alpha_2), \\ \rho k_{SE} = \eta_2 = 0.5A(\alpha_1+\alpha_2), \\ k_E = \eta_3 = A(\alpha_1-\alpha_3); \end{cases}\quad(243)$$

式中 ρ 为连接方程曲线在平衡点附近区域的斜率倍数。

ρ 值一般可取在 0.5～3.0 之间；其中对于缓变数据曲线阶跃间断区域，$\rho = 1.5～2.5$；而当 k_{S}、k_{SE}、k_{E} 三个斜率值接近时，$\rho = 1.0$。与方程（242）式比较，方程（243）式适于缓慢变化情况。

当拟合连续区域，由始点以右点、终点以左点之间的连线、或对阶跃折线进行光滑处理时，ρk_{SE} 等于连线在平衡点局部区域趋势变化的平均斜率。

根据方程（229）及（230）式、方程（238）及（239）、（242）式，可预置

$$x_0 = g_1(x_{\mathrm{S}} + x_{\mathrm{E}}), \tag{244}$$

$$y_{0\mathrm{pv}} = g_2(y_{\mathrm{S}} + y_{\mathrm{E}}); \tag{245}$$

得

$$\begin{cases} \alpha_3 - \alpha_2 = k_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{S}} - y_{0\mathrm{pv}})^{-1}, \\ \alpha_1 - \alpha_3 = k_{\mathrm{E}}(y_{\mathrm{E}} - y_{0\mathrm{pv}})^{-1}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2\rho k_{\mathrm{SE}} A^{-1}; \end{cases} \tag{246}$$

将上式中的前二式分别代入方程（229）、（238）二式得

$$\begin{cases} y_{\mathrm{S}} = y_0 - A\xi_{\mathrm{S}}, \\ y_{\mathrm{E}} = y_0 + A\xi_{\mathrm{E}}; \end{cases} \tag{247}$$

式中

$$\xi_{\mathrm{S}} = \exp[k_{\mathrm{S}}(x_{\mathrm{S}} - x_0)(y_{\mathrm{S}} - y_{0\mathrm{pv}})^{-1}],$$

$$\xi_{\mathrm{E}} = \exp[k_{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - x_0)(y_{\mathrm{E}} - y_{0\mathrm{pv}})^{-1}]。$$

可解得 y_0 与 A 的初始试算值 $y_{0\mathrm{p}0}$ 与 $A_{\mathrm{p}0}$ 分别为

$$\begin{cases} y_{0\mathrm{p}0} = y_{\mathrm{S}} + \xi_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{S}})(\xi_{\mathrm{E}} + \xi_{\mathrm{S}})^{-1}, \\ A_{\mathrm{p}0} = (y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{S}})(\xi_{\mathrm{E}} + \xi_{\mathrm{S}})^{-1}。 \end{cases} \tag{248}$$

将方程（248）式中 $y_{0\mathrm{p}0}$ 及 $A_{\mathrm{p}0}$ 作为 $y_{0\mathrm{pv}}$ 及 A 代入到方程（246）式中，即解得 α_1、α_2、α_3 的第一次试算值分别为

$$\begin{cases} \alpha_{1\mathrm{p}1} = \rho k_{\mathrm{SE}} A_{\mathrm{p}0}^{-1} + 0.5[R_{\mathrm{E}} + R_{\mathrm{S}}], \\ \alpha_{2\mathrm{p}1} = \rho k_{\mathrm{SE}} A_{\mathrm{p}0}^{-1} - 0.5[R_{\mathrm{E}} + R_{\mathrm{S}}], \\ \alpha_{3\mathrm{p}1} = \rho k_{\mathrm{SE}} A_{\mathrm{p}0}^{-1} - 0.5[R_{\mathrm{E}} - R_{\mathrm{S}}], \end{cases} \tag{249}$$

式中 $R_{\mathrm{E}} = k_{\mathrm{E}}(y_{\mathrm{E}} - y_{0\mathrm{p}0})^{-1}$，$R_{\mathrm{S}} = k_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{S}} - y_{0\mathrm{p}0})^{-1}$。

对于缓慢变化曲线，由方程（231）、（238）、（243）三式，可直接预置

$$x_0 = g_1(x_{\mathrm{S}} + x_{\mathrm{E}}), \tag{250}$$

不需再预置 $y_{0\mathrm{pv}}$；得

$$\begin{cases} y_{\mathrm{S}} = y_0 - A + k_{\mathrm{S}}(x_{\mathrm{S}} - x_0), \\ y_{\mathrm{E}} = y_0 + A + k_{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - x_0); \end{cases} \tag{251}$$

故解得 y_0 及 A 的初始试算值为

$$\begin{cases} y_{0\mathrm{p}0} = 0.5[[y_{\mathrm{E}} - k_{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - x_0)] + [y_{\mathrm{S}} - k_{\mathrm{S}}(x_{\mathrm{S}} - x_0)]], \\ A_{\mathrm{p}0} = 0.5[[y_{\mathrm{E}} - k_{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - x_0)] - [y_{\mathrm{S}} - k_{\mathrm{S}}(x_{\mathrm{S}} - x_0)]]。 \end{cases} \tag{252}$$

将方程（252）式的 $A_{\mathrm{p}0}$ 作为 A 代入到方程（243）式中，解得 α_1、α_2、α_3 的第一次试算值分别为

$$\begin{cases} \alpha_{1\mathrm{p}1} = 0.5A_{\mathrm{p}0}^{-1}[2\rho k_{\mathrm{SE}} - k_{\mathrm{S}} + k_{\mathrm{E}}], \\ \alpha_{2\mathrm{p}1} = 0.5A_{\mathrm{p}0}^{-1}[2\rho k_{\mathrm{SE}} + k_{\mathrm{S}} - k_{\mathrm{E}}], \\ \alpha_{3\mathrm{p}1} = 0.5A_{\mathrm{p}0}^{-1}[2\rho k_{\mathrm{SE}} - k_{\mathrm{S}} - k_{\mathrm{E}}]。 \end{cases} \tag{253}$$

在始点 $\mathrm{P_S}(x_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{S}})$ 及终点 $\mathrm{P_E}(x_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{E}})$ 位置，根据连接方程（31）式及（246）式或缓慢变化曲线时的方程（253）式得

$$y_{\mathrm{S}} = y_0 + A\varphi_{\mathrm{S}}, \tag{254}$$

$$y_{\mathrm{E}} = y_0 + A\varphi_{\mathrm{E}}; \tag{255}$$

式中

$$\varphi_{\mathrm{S}} = \frac{\exp[\alpha_{1\mathrm{p}1}(x_{\mathrm{S}} - x_0)] - \exp[-\alpha_{2\mathrm{p}1}(x_{\mathrm{S}} - x_0)]}{2\cosh[\alpha_{3\mathrm{p}1}(x_{\mathrm{S}} - x_0)]}, \tag{256}$$

$$\varphi_{\mathrm{E}} = \frac{\exp[\alpha_{1\mathrm{p}1}(x_{\mathrm{E}} - x_0)] - \exp[-\alpha_{2\mathrm{p}1}(x_{\mathrm{E}} - x_0)]}{2\cosh[\alpha_{3\mathrm{p}1}(x_{\mathrm{E}} - x_0)]}。 \tag{257}$$

可解得 y_0 与 A 的第一次试算值 $y_{0\mathrm{p}1}$ 与 $A_{\mathrm{p}1}$ 分别为

$$\begin{cases} y_{0\mathrm{p}1} = [y_{\mathrm{E}}\varphi_{\mathrm{S}} - y_{\mathrm{S}}\varphi_{\mathrm{E}}][\varphi_{\mathrm{E}} - \varphi_{\mathrm{S}}]^{-1}, \\ A_{\mathrm{p}1} = [y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{S}}][\varphi_{\mathrm{E}} - \varphi_{\mathrm{S}}]^{-1}。 \end{cases} \tag{258}$$

将方程（258）式的 $y_{0\mathrm{p}1}$ 及 $A_{\mathrm{p}1}$ 作为 $y_{0\mathrm{p}0}$ 及 $A_{\mathrm{p}0}$ 代入到方程（249）式或缓慢变化曲线时的（245）式，再运算到（252）式，得第二次试算参数值；如此迭代运算 J 次后，得诸参数 $\alpha_{1\mathrm{p}J}$、$\alpha_{2\mathrm{p}J}$、$\alpha_{3\mathrm{p}J}$、$y_{0\mathrm{p}J}$、$A_{\mathrm{p}J}$，即得数据曲线间断区域自适应连接方程（31）式的具体形式。

当 $k_{\mathrm{S}} + k_{\mathrm{E}} \neq 0$ 时，可直接取

$$y_{0\mathrm{p}0} = g_2[y_{\mathrm{S}} + y_{\mathrm{E}}] \tag{259}$$

作为初始试算值，有

$$x_{0\mathrm{p}1} = [2y_{0\mathrm{p}0} + k_{\mathrm{S}}x_{\mathrm{S}} + k_{\mathrm{E}}x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{S}} - y_{\mathrm{E}}][k_{\mathrm{S}} + k_{\mathrm{E}}]^{-1}。 \tag{260}$$

当 $k_{\mathrm{S}} + k_{\mathrm{E}} = 0$ 且 $k_{\mathrm{S}} \neq 0$ 时，可取

$$A_{\mathrm{p}0} = g_3[y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{S}}] \tag{261}$$

为初始试算值，有

$$x_{0\mathrm{p}1} = 0.5[y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{S}} - 2A_{\mathrm{p}0} + k_{\mathrm{S}}(x_{\mathrm{S}} + x_{\mathrm{E}})]k_{\mathrm{S}}^{-1}。 \tag{262}$$

当 $k_{\mathrm{S}} = k_{\mathrm{E}} = 0$ 时，由方程（245）、（246）或（248）、（249）式可直接得到（31）式的特殊形式双曲正切方程

$$y = y_0 + A\tanh[\alpha(x - x_0)], \quad x_0 = 0.5[x_{\mathrm{S}} + x_{\mathrm{E}}]$$

此式中

$$A_{\mathrm{p}0} = 0.5[y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{S}}], \quad \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \rho k_{\mathrm{SE}} A_{\mathrm{p}0}^{-1},$$

$$\varphi_{\mathrm{S}} = \tanh[\alpha(x_{\mathrm{S}} - x_0)], \quad \varphi_{\mathrm{E}} = \tanh[\alpha(x_{\mathrm{E}} - x_0)],$$

$$\varphi_{\mathrm{S}} = -\varphi_{\mathrm{E}}, \; y_0 = 0.5[y_{\mathrm{S}} + y_{\mathrm{E}}], \; A = 0.5[y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{S}}]\varphi_{\mathrm{E}}^{-1}。$$

将方程（260）式 $x_{0\mathrm{p}1}$ 作为初始试算值，或调节 g_1、g_2 改变（31）式预置平衡点 $(x_{0\mathrm{pv}}, y_{0\mathrm{pv}})$ 位置，及以连接

曲线路径长度作为约束条件，可得到更好的连接曲线形态。当以 k_S 和 k_E 代替 $P_S(x_S, y_S)$ 和 $P_E(x_E, y_E)$ 作为试算值主指标时，会减少连接曲线在延伸段与原曲线的偏差。

对部分现象，当待定参量数目略大于条件数目时，可经预置迭代方法自适应求解，融合毛估与准确为一体。

在计算中，需比较连接方程在 J 次与 $J+1$ 次或在起始点 η_1 与 k_S 及结束点 η_3 与 k_E 的相对误差。其中对于数据曲线阶跃间断区域，在 $J=1$ 时得到的自适应连接方程可基本满足连接要求，一次试算即确定方程具体形式。

4 自适应连接方程实例计算

图 40 所示数据曲线顺序间断区域，坐标数据分别为：
始点 $P_a(30, 6.0)$，左邻域一点 $P_{a-}(27, 6.6)$；
终点 $P_b(50, 21.40)$，右邻域一点 $P_{b+}(53, 21.88)$；
始点 $P_c(70, 24.60)$，左邻域一点 $P_{c-}(67, 24.12)$；
终点 $P_d(85, 9.55)$，右邻域一点 $P_{d+}(88, 10.12)$。
运算过程直接取

$$x_0 = 0.5[x_S + x_E]，\ J=1，\ \rho = 2.5。$$

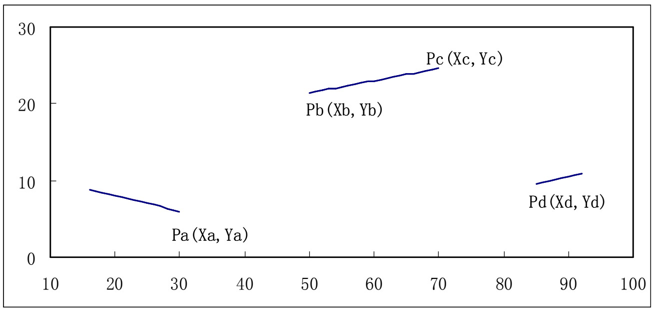

图 40 数据曲线间断区域图
Fig.40 Figure of discontinuous areas in data curve

在 $P_a \sim P_b$ 间断区域，依据曲线间断区域性质得

$$k_S = -0.20，\ k_E = 0.16，\ k_{SE} = 0.77，\ x_0 = 40；$$

其属于缓慢变化曲线，可直接根据方程（252）、（253）、（258）式依次求得

$$y_{0p0} = 11.90，\ A_{p0} = 7.90；$$

$$\alpha_{1p1} = 0.2665，\ \alpha_{2p1} = 0.2209，\ \alpha_{3p1} = 0.2462；$$

$$y_{0p1} = 11.9754，\ A_{p1} = 7.8125；$$

即得在 $P_a \sim P_b$ 间断区域的自适应连接方程为

$$y = 11.9754 + 7.8125 \times \frac{\exp[0.2665(x-40)] - \exp[-0.2209(x-40)]}{2\cosh[0.2462(x-40)]}。 \tag{263}$$

同样计算得在 $P_c \sim P_d$ 间断区域的自适应连接方程为

$$y = 16.9792 - 8.9476 \times \frac{\exp[0.2821(x-77.5)] - \exp[-0.2855(x-77.5)]}{2\cosh[0.3036(x-77.5)]}。 \tag{264}$$

当由方程（248）、（239）、（258）式计算 $P_a \sim P_b$ 间断区域时，预置 $y_{0pv} = 0.5(y_S + y_E)$，即得方程（31）式中诸参量

$$y_{0p0} = 11.8308，\ A_{p0} = 7.5991；$$

$$\alpha_{1p1} = 0.2736，\ \alpha_{2p1} = 0.2231，\ \alpha_{3p1} = 0.2574；$$

$$y_{0p1} = 11.6837，\ A_{p1} = 8.1124；$$

方程（31）式的具体形式为

$$y = 11.6837 - 8.1124 \times \frac{\exp[0.2736(x-40)] - \exp[-0.2231(x-40)]}{2\cosh[0.2574(x-40)]}。 \tag{265}$$

连接方程（263）、（264）二式在数据曲线间断区域的自适应连接曲线（红色）如图 41 所示。

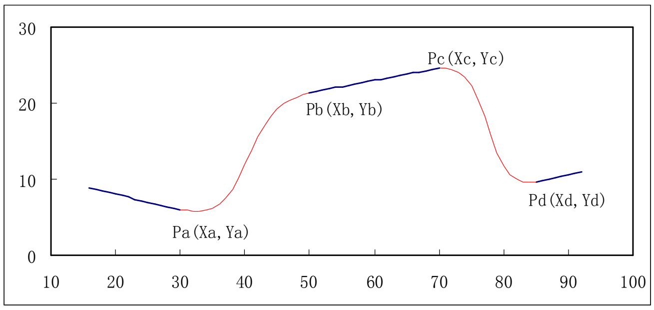

图 41 数据间断区域自适应连接方程曲线图
— 数据段曲线 — 连接方程曲线
Fig. 41 Curves figure of adaptive connection equations in discontinuous areas of data
— curves of data segments — curves of adaptive connection equations

当运算取 $J=3$ 时，根据方程（252）、（253）、（258）式得在 $P_a \sim P_b$ 之间的间断区域自适应连接方程具体形式

$$y = 11.9546 + 7.8030 \times \frac{\exp[0.2698(x-40)] - \exp[-0.2236(x-40)]}{2\cosh[0.2493(x-40)]}； \tag{266}$$

其曲线如图 42 所示；表明 $J=3$ 时曲线（绿色）与 $J=1$ 时曲线（红色）基本重合，相对误差绝对值小于 0.7%。对 $y_E > y_S$ 与 $y_E < y_S$ 情况，可预置 x_{0pv}、y_{0pv} 分别偏向 k_S 和 k_E 中低值与高值的曲线端，以获得较好曲线形态。

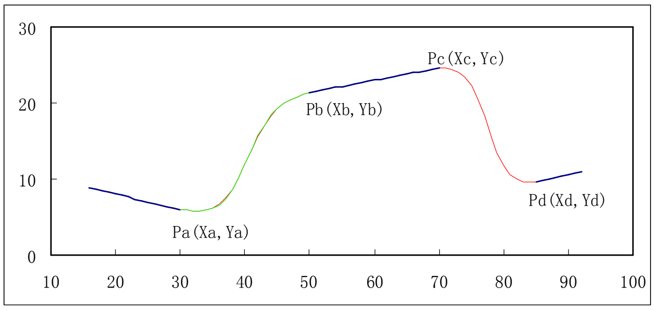

图 42 P_a 到 P_b 间断区域自适应连接方程曲线对比图
— 方程曲线 ($J=1$) — 方程曲线 ($J=3$)
Fig. 42 Comparison result figure of curves between adaptive connection equations when $J=1$ and $J=3$ in discontinuous area from points P_a to P_b
— curve of the equation when $J=1$ which covered by curve when $J=3$
— curve of the equation when $J=3$

上述分析计算给出了数据曲线间断区域的自适应连接方程及其曲线特征；数据曲线间断区域的端点呈现前后序列分布，依据方程（31）式可进行自适应连接分析。

下面仍以方程（31）式为基础，依据映射方程（参量方程）方法（42）～（44）式，给出一般曲线在位错间断、回转间断时的连接方程形式及其曲线形态特征。

图 43 中所示的位错间断区域，坐标数据分别为：

始点 $P_a(53.0, 6.0)$，左邻域一点 $P_{a-}(50.0, 5.4)$；

终点 $P_b(50.0, 21.4)$，右邻域一点 $P_{b+}(54.0, 22.0)$。

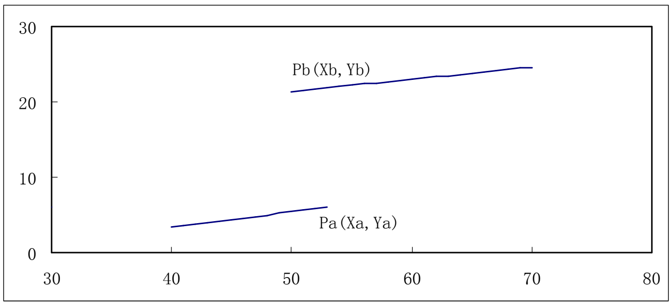

图 43 曲线位错间断区域图

Fig. 43 Figure of discontinuous area with the dislocation of curve

将 P_a 段曲线向左平移生成 P_c 段曲线，P_c 点坐标 $x_c < x_b$、$y_c = y_a$，这里 $P_c(30.0,\ 6.0)$，取左邻域一点 $P_{c-}(27.0, 5.4)$；其如图 44 所示；由方程（31）式得新的间断区域 P_c 与 P_b 之间自适应连接方程（42）式具体形式

$$y = 13.9609 + 5.7240 \times \frac{\exp[0.2837(x-40)] - \exp[-0.2905(x-40)]}{2\cosh[0.2566(x-40)]}\text{。}\quad (267)$$

自适应连接方程（267）式曲线如图 45 所示。

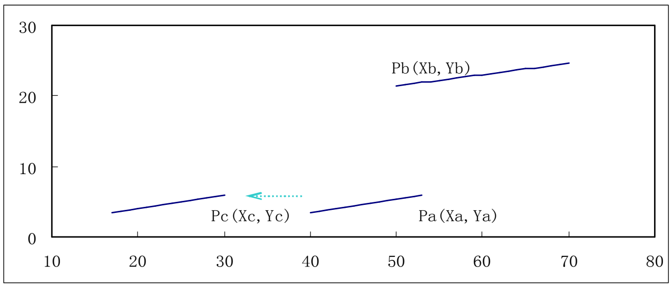

图 44 向左平移 P_a 段曲线生成 P_c 段曲线的间断区域图

Fig. 44 Figure of discontinuous area of the curve of P_c data segment generated by the translation of P_a data segment to the left

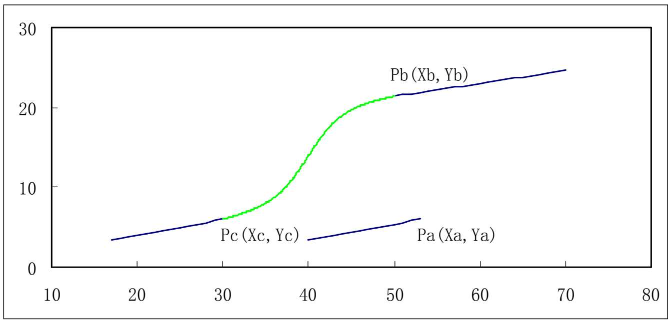

图 45 P_c 到 P_b 间断区域自适应连接方程曲线图

— P_c 与 P_b 之间方程曲线

Fig. 45 Curves figure of adaptive connection equation in discontinuous area from points P_c to P_b

— curve of equation in discontinuous area from points P_c to P_b

由图 43 中位错间断特征，可得映射方程一形式为

$$x = (1-\rho_D)x_a + \rho_D x_b + x_{\tau 1}\sin[\omega_\tau[\tau - 0.5(x_c + x_b)]] + x_{\tau 2}(\rho_D - 0.5)(\tau - x_c)\text{，}\quad (268)$$

式中 $x_{\tau 1}$、$x_{\tau 2}$、ω_τ 为待定系数，τ 为中间参量，$x_c \le \tau \le x_b$；ρ_D 为位错间断连接映射系数，当 $\rho_D \le 0$ 时为折线及尖角连接，当 $\rho_D > 0$ 时为近于折线、近于光滑及光滑连接，光滑连接一般取 $0.2 \le \rho_D \le 0.8$ 一值即可。

对于映射方程（268）式，待定系数 $x_{\tau 1}$、$x_{\tau 2}$、ω_τ 之间的关系方程组为

$$\begin{cases} x_a = (1-\rho_D)x_a + \rho_D x_b \\ \qquad + x_{\tau 1}\sin[0.5\omega_\tau(x_c - x_b)],\ \ \tau = x_c \\ \omega_\tau[x_a - x_c] = 2\pi, \\ x_b = (1-\rho_D)x_a + \rho_D x_b + x_{\tau 1}\sin[0.5\omega_\tau(x_b - x_c)] \\ \qquad + x_{\tau 2}(\rho_D - 0.5)(x_b - x_c);\ \ \tau = x_b. \end{cases}\quad (269)$$

由方程组（269）式解得诸待定系数

$$\begin{cases} \omega_\tau = 2\pi[x_a - x_c]^{-1} = 0.2732, \\ x_{\tau 1} = \dfrac{x_a - [(1-\rho_D)x_a + \rho_D x_b]}{\sin[0.5\omega_\tau(x_c - x_b)]} = \dfrac{x_a - x_b}{\sin(-2.732)}\rho_D \\ \qquad = -7.5332\rho_D, \\ x_{\tau 2} = \dfrac{x_a + x_b - 2[(1-\rho_D)x_a + \rho_D x_b]}{(\rho_D - 0.5)(x_b - x_c)} = \dfrac{2(x_a - x_b)}{x_b - x_c} \\ \qquad = 0.3. \end{cases}\quad (270)$$

简单地当 $\rho_D = 0.5$ 时，得方程（268）式具体形式为

$$x = 51.5 - 3.7666\sin[0.2732(\tau - 40)]\text{。}\quad (271)$$

由（267）、（271）二式即得参量方程（44）式具体形式

$$\begin{cases} y = 13.9609 + 5.7240 \\ \qquad \times \dfrac{\exp[0.2837(\tau-40)] - \exp[-0.2905(\tau-40)]}{2\cosh[0.2566(\tau-40)]}, \\ x = 51.5 - 3.7666\sin[0.2732(\tau-40)];\ 30 \le \tau \le 50\text{。} \end{cases}\quad (272)$$

通过方程（272）式将 P_c 与 P_b 之间的自适应连接曲线映射到 P_a 与 P_b 之间的位错间断区域，曲线如图 46 所示。

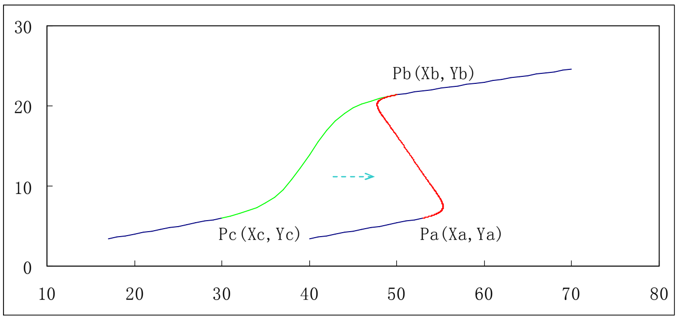

图 46 间断区域的映射方程连接曲线图($\rho_D = 0.5$)

— P_c 与 P_b 之间方程曲线　— P_a 与 P_b 之间方程曲线

Fig. 46 Curve figure of mapping equation between two connecting curves in the discontinuous areas ($\rho_D = 0.5$)

— curve of equation in discontinuous area from points P_c to P_b

— curve of equation in discontinuous area from points P_a to P_b

将图 46 中的 P_c 段曲线及其与 P_b 之间的自适应连接方程曲线去除，即得图 43 中的位错间断区域 P_a 与 P_b 之间的连接方程（272）式光滑曲线如图 47 所示。

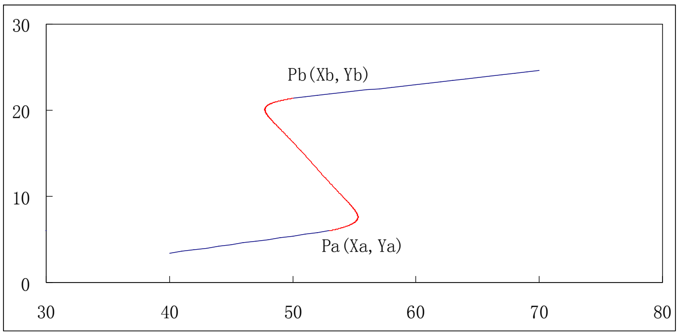

图 47 位错间断区域连接方程曲线图(ρ_D= 0. 5)
— 数据段曲线 — 连接方程曲线
Fig. 47 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the dislocation of the curve (ρ_D= 0. 5)
— curve of data segments — curve of connection equation

当 $\rho_D = 0.25$ 时，得方程（268）式具体形式为

$$x = 52.25 - 1.8833\sin[0.2732(\tau - 40)] - 0.075(\tau - 30)\text{。} \quad (273)$$

由（267）、（273）二式即得映射方程组或参量方程

$$\begin{cases} y = 13.9609 + 5.7240 \\ \quad \times \dfrac{\exp[0.2837(\tau - 40)] - \exp[-0.2905(\tau - 40)]}{2\cosh[0.2566(\tau - 40)]}, \\ x = 52.25 - 1.8833\sin[0.2732(\tau - 40)] \\ \quad - 0.075(\tau - 30);\ 30 \le \tau \le 50\text{。} \end{cases} \quad (274)$$

通过映射方程组（274）式将图 45 中 P_c 与 P_b 之间的连接曲线映射到间断区域 P_a 与 P_b 之间，即得图 43 中位错间断区域 P_a 与 P_b 之间的连接曲线如图 48 所示。

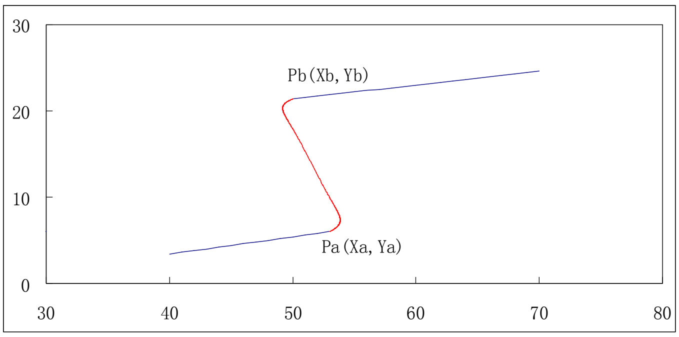

图 48 位错间断区域连接方程曲线图(ρ_D= 0. 25)
— 数据段曲线 — 连接方程曲线
Fig. 48 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the dislocation of the curve (ρ_D= 0. 25)
— curve of data segments — curve of connection equation

特别地，在映射系数 $\rho_D = 0$ 时的临界状态，得待定系数 $x_{\tau 1} = 0$，方程（268）式具体形式为

$$x = 53.0 - 0.15(\tau - 30)\text{。} \quad (275)$$

由（267）、（275）二式即得映射方程组或参量方程

$$\begin{cases} y = 13.9609 + 5.7240 \\ \quad \times \dfrac{\exp[0.2837(\tau - 40)] - \exp[-0.2905(\tau - 40)]}{2\cosh[0.2566(\tau - 40)]}, \\ x = 53.0 - 0.15(\tau - 30);\quad 30 \le \tau \le 50\text{。} \end{cases} \quad (276)$$

通过映射方程组（276）式将图 44 中 P_c 与 P_b 之间的连接曲线映射到间断区域 P_a 与 P_b 之间，即得图 43 中位错间断区域 P_a 与 P_b 之间的折线连接曲线如图 49 所示。

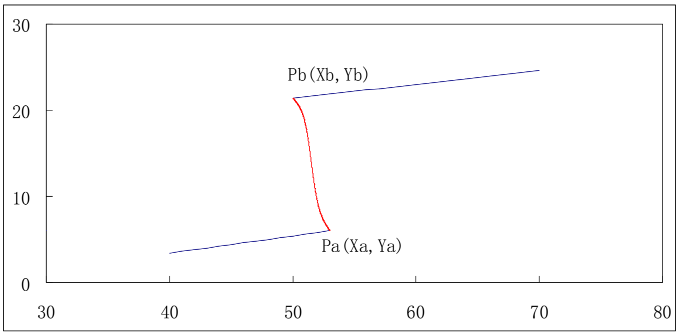

图 49 位错间断区域连接方程曲线图(ρ_D= 0)
— 数据段曲线 — 连接方程曲线
Fig. 49 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the dislocation of the curve (ρ_D= 0)
— curve of data segments — curve of connection equation

当 $\rho_D = -0.5$ 时，得方程（268）式具体形式为

$$x = 54.5 + 3.7666\sin[0.2732(\tau - 40)] - 0.3(\tau - 30)\text{。} \quad (277)$$

由（267）、（277）二式即得映射方程组或参量方程

$$\begin{cases} y = 13.9609 + 5.7240 \\ \quad \times \dfrac{\exp[0.2837(\tau - 40)] - \exp[-0.2905(\tau - 40)]}{2\cosh[0.2566(\tau - 40)]}, \\ x = 54.5 + 3.7666\sin[0.2732(\tau - 40)] \\ \quad - 0.3(\tau - 30);\ 30 \le \tau \le 50\text{。} \end{cases} \quad (278)$$

通过映射方程组（278）式将图 45 中 P_c 与 P_b 之间的连接曲线映射到间断区域 P_a 与 P_b 之间，即得图 434 中位错间断区域 P_a 与 P_b 之间的尖角连接曲线如图 50 所示。

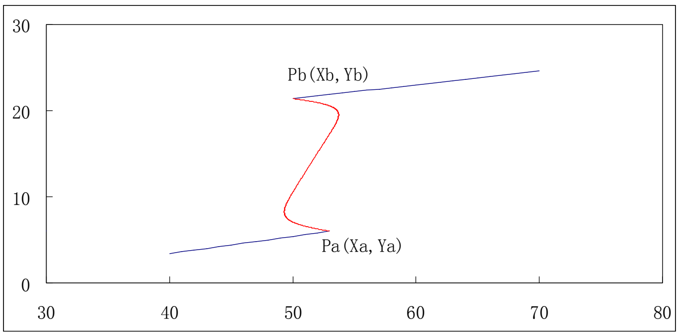

图 50 位错间断区域连接方程曲线图(ρ_D= −0.5)
— 数据段曲线 — 连接方程曲线
Fig. 50 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the dislocation of the curve (ρ_D= −0. 5)
— curve of data segments — curve of connection equation

下面图 51 所示的曲线间断区域为回转间断区域，端点坐标数据分别为：

始点 $P_a(30.0, 7.20)$，左邻域一点 $P_{a-}(27.0, 6.84)$；

终点 $P_b(24.0, 21.48)$，左邻域一点 $P_{b-}(21.0, 21.87)$。

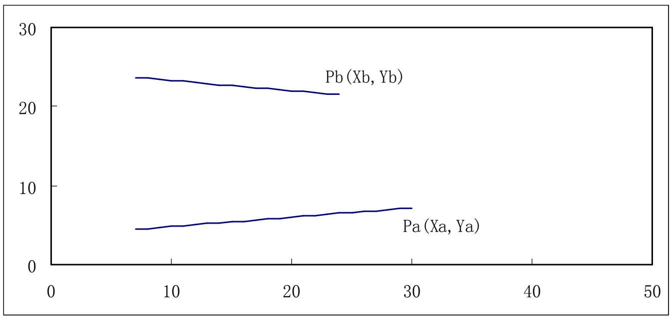

图 51 曲线回转间断区域图

Fig. 51 Figure of discontinuous area with the turn-back in curve

与图 43 所示的位错间断区域性质类似，图 51 所示的回转间断区域亦不能直接应用方程（31）式进行自适应连接描述，需要将其一个端点开始的数据段或二个端点的数据段进行移动，生成新的端点前后次序排列的间断区域，再依据方程（42）式、映射方程（43）式及参量方程（44）式得到回转间断区域的连接曲线。

在回转间断区域图 51 中，因 $x_a > x_b$，故可考虑将 P_b 段曲线以 $x = x_a = 30.0$ 为轴线向右旋转对称生成以 P_c 为端点的对称曲线，使得端点 P_c 的坐标 $x_c > x_a$、$y_c = y_b$；这里端点 $P_c(36.0, 21.48)$，在新生成的 P_a 与 P_c 之间的间断区域，有

$$x_{m0} = 0.5(x_a + x_c) = 33.0\,;$$

并取端点 P_c 右邻域一点 $P_{c+}(39.0, 21.87)$；旋转之后生成的间断区域如图 52 所示。

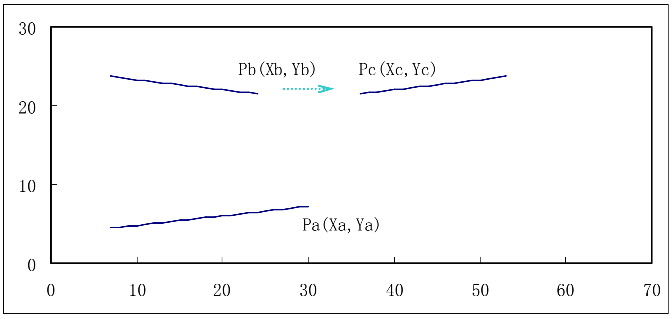

图 52 P_b 段曲线向右旋转生成 P_c 段曲线的间断区域图

Fig. 52 Figure of discontinuous area of the curve of P_c data segment generated by rotating the curve of P_b data segment to the right

由方程（31）式得新间断区域 P_a 与 P_c 之间的自适应连接方程（42）式的具体形式为

$$y = 14.3217 + 6.7490 \times \frac{\exp[0.9366(x-33)] - \exp[-0.9349(x-33)]}{2\cosh[0.9144(x-33)]}\,; \tag{279}$$

连接方程（279）式的曲线如图 53 所示。

依据图 51 所示的回转间断区域特征，相应的映射方程（43）式有多种表述形式，其一简洁的多项式形式为

$$x = \mu_{\tau 2}\tau^2 + \mu_{\tau 1}\tau + \mu_{\tau 0}\,, \tag{280}$$

式中 τ 为中间参量，$x_a \le \tau \le x_c$；$\mu_{\tau 0}$、$\mu_{\tau 1}$、$\mu_{\tau 2}$ 为待定系数。

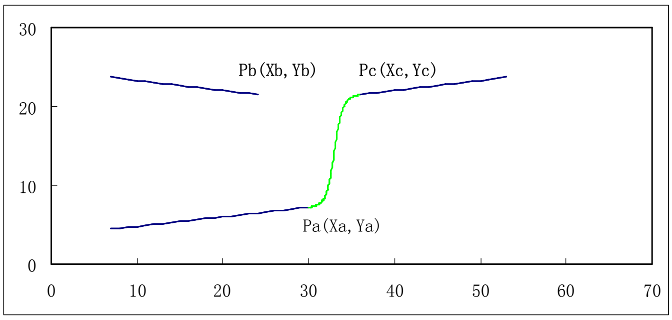

图 53 P_a 到 P_c 间断区域自适应连接方程曲线图

— P_a 与 P_c 之间方程曲线

Fig. 53 Curves figure of adaptive connection equation in discontinuous area from points P_a to P_c

— curve of equation in discontinuous area from points P_a to P_c

映射方程（280）式中诸待定系数的关系方程组为

$$\begin{cases} x_a^2\mu_{\tau 2} + x_a\mu_{\tau 1} + \mu_{\tau 0} = x_a\,, & \tau = x_a \\ x_c^2\mu_{\tau 2} + x_c\mu_{\tau 1} + \mu_{\tau 0} = x_b\,, & \tau = x_c \\ x_{m0}^2\mu_{\tau 2} + x_{m0}\mu_{\tau 1} + \mu_{\tau 0} = x_a + \rho_{TB}(x_{m0} - x_a), & \tau = x_{m0} \end{cases} \tag{281}$$

这里 ρ_{TB} 为回转间断连接映射系数；当 $\rho_{TB} < -0.2$ 时为近于折线及尖角连接，当 $\rho_{TB} \ge -0.2$ 时为近于光滑及光滑连接，光滑连接取 $-0.20 < \rho_{TB} \le 1.0$ 中一值即可。

由方程组（281）式解得（280）式中诸待定系数

$$\begin{cases} \mu_{\tau 2} = [x_{m0} - x_c]^{-1}[\rho_{TB} - (x_b - x_a)(x_c - x_a)^{-1}] \\ \quad = -3^{-1}(1 + \rho_{TB}), \\ \mu_{\tau 1} = \rho_{TB} - (x_{m0} + x_a)\mu_{\tau 2} = 21 + 22\rho_{TB}\,, \\ \mu_{\tau 0} = x_a[1 - \mu_{\tau 1} - x_a\mu_{\tau 2}] = -300 - 360\rho_{TB}\,. \end{cases} \tag{282}$$

当映射系数 $\rho_{TB} = 0.36$ 时，得方程(280)式具体形式

$$x = -0.4533\tau^2 + 28.92\tau - 429.60\,。 \tag{283}$$

由方程(259)、(263)二式即得映射方程组或参量方程为

$$\begin{cases} y = 14.3217 + 6.7490 \\ \qquad \times \dfrac{\exp[0.9366(\tau-33)] - \exp[-0.9349(\tau-33)]}{2\cosh[0.9144(\tau-33)]}, \\ x = -0.4533\tau^2 + 28.92\tau - 429.60\,; \quad 30 \le \tau \le 36\,。 \end{cases} \tag{284}$$

通过映射方程组（284）式将 P_a 与 P_c 之间的连接曲线映射到回转间断区域 P_a 与 P_b 之间，曲线如图 54 所示。

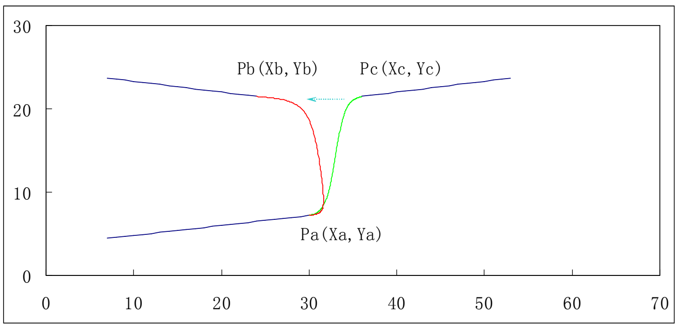

图 54 间断区域的映射方程连接曲线图($\rho_{TB} = 0.36$)

— P_a 与 P_c 之间方程曲线 — P_a 与 P_b 之间方程曲线

Fig. 54 Curve figure of mapping equation between two connecting curves in the discontinuous areas ($\rho_{TB} = 0.36$)

— curve of equation in discontinuous area from points P_a to P_c

— curve of equation in discontinuous area from points P_a to P_b

将图 54 中的 P_c 段曲线及 P_a 与 P_c 之间的连接方程曲线去除，即得图 51 中回转间断区域 P_a 与 P_b 之间的连接方程（284）式曲线如图 55 所示。

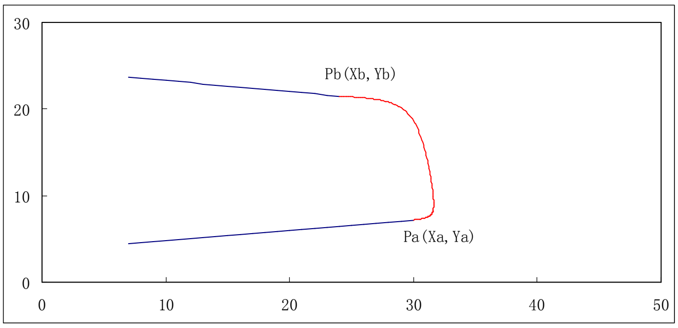

图 55 回转间断区域连接方程曲线图(ρ_{TB} = 0. 36)

— 数据段曲线 — 连接方程曲线

Fig. 55 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the turn-back of the curve (ρ_{TB} = 0. 36)

— curve of data segments — curve of connection equation

当映射系数 $\rho_{TB} = -0.2$ 时，得方程(280)式的具体形式为

$$x = -0.2667\tau^2 + 16.60\tau - 228.00\,; \qquad (285)$$

由方程(279)、(285)二式即得映射方程组或参量方程为

$$\begin{cases} y = 14.3217 + 6.7490 \\ \qquad \times \dfrac{\exp[0.9366(\tau-33)] - \exp[-0.9349(\tau-33)]}{2\cosh[0.9144(\tau-33)]}, \\ x = -0.2667\tau^2 + 16.60\tau - 228.00; \quad 30 \le \tau \le 36。 \end{cases} \qquad (286)$$

通过映射方程组（286）式将图 53 中 P_a 与 P_c 之间的连接曲线映射到回转间断区域 P_a 与 P_b 之间，然后将 P_c 段曲线及 P_a 与 P_c 之间的连接方程曲线去除，即得图 51 中回转间断区域 P_a 与 P_b 之间的连接曲线如图 56 所示。

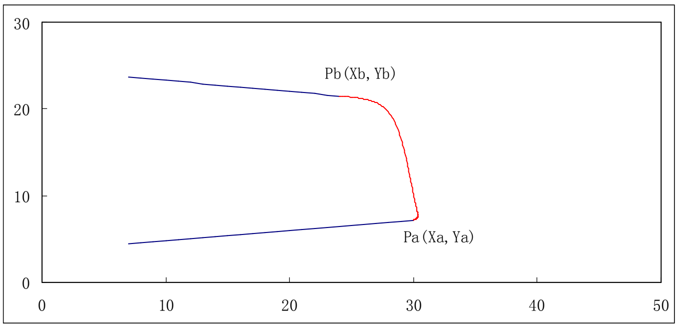

图 56 回转间断区域连接方程曲线图 (ρ_{TB} = −0.2)

— 数据段曲线 — 连接方程曲线

Fig.56 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the turn-back of the curve (ρ_{TB} = −0. 2)

— curve of data segments — curve of connection equation

当映射系数 $\rho_{TB} < -0.2$ 时，连接曲线与数据段曲线在连接端点处或连接点附近将出现从光滑连接及近于折线形态向折线、单尖角及双尖角形态发展。其中当 $\rho_{TB} = -1.2$ 时，得方程(280)式的具体形式为

$$x = 0.0667\tau^2 - 5.4\tau + 132.00\,; \qquad (287)$$

由方程(279)、(287)二式即得映射方程组或参量方程为

$$\begin{cases} y = 14.3217 + 6.7490 \\ \qquad \times \dfrac{\exp[0.9366(\tau-33)] - \exp[-0.9349(\tau-33)]}{2\cosh[0.9144(\tau-33)]}, \\ x = 0.0667\tau^2 - 5.4\tau + 132.00\,; \quad 30 \le \tau \le 36。 \end{cases} \qquad (288)$$

通过映射方程组或参量方程（288）式即得图 51 中回转间断区域 P_a 与 P_b 之间的连接曲线如图 57 所示；连接曲线与二数据段在端点连接处呈现显著的单尖角形态。

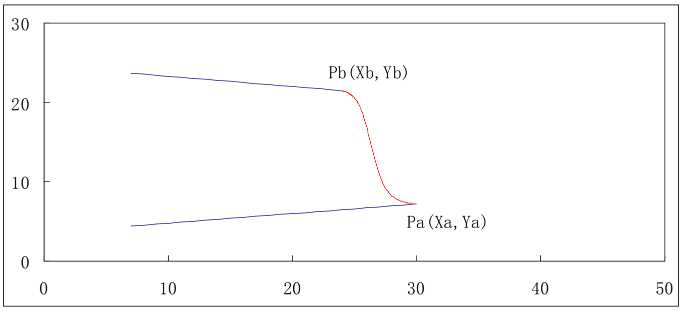

图 57 回转间断区域连接方程曲线图(ρ_{TB} = −1.2)

— 数据段曲线 — 连接方程曲线

Fig. 57 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the turn-back of the curve (ρ_{TB} = −1.2)

— curve of data segments — curve of connection equation

当映射系数 $\rho_{TB} = -3$ 时，得方程(280)式的具体形式为

$$x = 0.6667\tau^2 - 45.00\tau + 780.00\,; \qquad (289)$$

由方程(279)、(289)二式即得映射方程组或参量方程为

$$\begin{cases} y = 14.3217 + 6.7490 \\ \qquad \times \dfrac{\exp[0.9366(\tau-33)] - \exp[-0.9349(\tau-33)]}{2\cosh[0.9144(\tau-33)]}, \\ x = 0.6667\tau^2 - 45.00\tau + 780.00\,; \quad 30 \le \tau \le 36。 \end{cases} \qquad (290)$$

通过映射方程组或参量方程（290）式，即得图 51 中回转间断区域 P_a 与 P_b 之间的连接曲线如图 58 所示；连接曲线与二数据段在连接端点处呈现显著的双尖角形态。

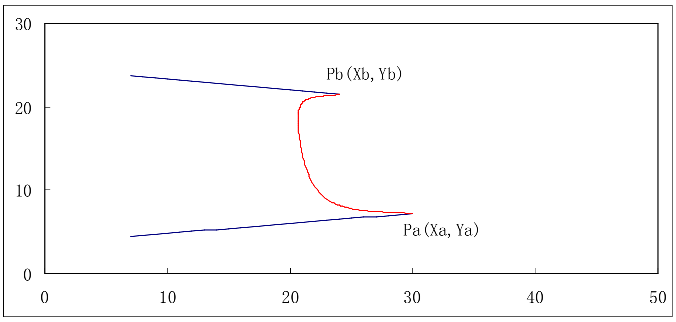

图 58 回转间断区域连接方程曲线图(ρ_{TB} = −3)

— 数据段曲线 — 连接方程曲线

Fig. 58 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the turn-back of the curve (ρ_{TB} = −3)

— curve of data segments — curve of connection equation

以数据曲线间断区域的自适应连接方程（31）式为基础，对一般曲线间断区域一个端点或二个端点数据段进行平移或旋转操作，生成新端点先后序列的间断区域，即可根据映射方程方法（42）～（45）式，对较为广泛的曲线间断区域或等效间断区域予以趋势性连接描述，为多维空间数据组间断区域的光滑连接提供运算基础。

在势的导引或拟局方向，图 41 所示为顺势导引，图 47、图 48 所示为移势导引，图 55、图 56 所示为转势导引；移势与转势皆蕴含借势、造势和隐化的成分。

数据曲线间断区域的连接构造，一是可以光滑连接间断区域，二是可以在趋势层面补充缺失数据或内插数据，三是可以穿过曲线折线或缠绕区域进行趋势性拟合，进而建立解析或半解析动力学方程并予以短程趋势性预测。根据间断区域特征研究建立具有针对性的连接方程类，与各种连接方法联合研究，核心参数求解算法相互促进，发展形成通用的开放性工具软件，构造、解析、计算三位一体，具有深刻的理论意义及广阔的应用前景。

5 结 论

本文通过对一简洁非线性动力学方程自嵌套结构、近似等效解析解及数据曲线间断区域性质的分析，给出了自适应连接方程的构造形式及其参数确定的预置迭代计算方法，进而给出一般曲线间断区域的映射方程组连接方法，实例计算表明连接效果很好，对饱和过程及蠕变过程的趋势描述、位错间断及回转间断的映射连接等都有较好的适应性；提出了现象演化状态间转变方程，其一般遵循最优路径光滑曲线方程的原则；文中给出了非线性 Newton 动力学方程、RLCNG 串联电路方程、现象演化系列相变特征函数的扩展型双曲正切级数形式及自然演化平衡法则、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势方程、稳定核素比结合能方程、核素结合能的理论最大值及相应质子数、太阳系元素丰度趋势方程、分子势能方程及材料蠕变方程等相关内容。

本文给出的分析计算及预置迭代方法虽然较为简洁，但仍有其局限性，仅供自然科学及工程技术中数据曲线间断区域或等效间断区域的自适应连接、时间序列与饱和及蠕变过程非线性动力学方程等效解析解分析及拟合或连接方程形式构造、趋势性极限与细节波动复合过程描述、极端瞬变与缓变过程刻画、人工神经网络模型中的一般性或广义激活函数构造、数据主曲线优化与回归分析融合、曲线缺失数据的趋势性填充、数据库中部分参量间的关联性探索等方向深入研究时参考。

对非线性动力学微分方程自嵌套特征及近似等效解析解的深入分析表明，未来宜建立一套与现有 Newton 微积分理论并行的数学理论框架，在 Newton 微积分理论中没解析解的演化方程，部分地在新理论中直接有解析解，实现多层面开放式的激励、演化、守恒方程阐释，虽然在根本上新理论仍是近似性、趋势性及过渡性的体系。

参考文献（References）:

[1] 阎坤. 60年来大气中二氧化碳浓度数据的趋势方程研究[J]. 地球物理学进展, 2009, 24(5):1665～1670.
YAN Kun. Research on tendency equation about the concentration data of carbon dioxide in the atmosphere over the past 60 years[J]. Progress in Geophys(in Chinese), 2009,24(5):1665～1670.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/co2concentration-pdf.pdf

[2] 朱春钢, 王仁宏. 空间曲线几何Hermite插值的B样条方法[J]. 软件学报, 2005, 16(04):634～642.
ZHU Chun-gang, WANG Ren-hong. Geometric Hermite interpolation for space curves by B-spline[J]. Journal of Software, 2005, 16(04): 634～642.

[3] Gerald Farin. Class A Bézier Curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(7): 573～581.

[4] WEI Xiang-jiang, TIE Jun-cui, QIANG Cheng, *et al*. Design of arbitrarily shaped concentrators based on conformally optical transformation of nonuniform rational B-spline surfaces[J]. Appled Physics Letters, 2008, 92(26): 264101(3 pages).

[5] 阎坤. 天体运行轨道的背景介质理论导引与自相似分形测度计算的分维微积分基础[J]. 地球物理学进展，2007，22(2)：451～462.
YAN Kun. Introduction on background medium theory about celestial body motion orbit and foundation of fractional-dimension calculus about self-similar fractal measure calculation[J]. Progress in Geophys (in Chinese with abstract in English), 2007, 22(2): 451～462.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/celestialandmaths-pdf.pdf

[6] 阎坤. 关于对无穷予以虚数形式标记的初步注释[R]. 西安：西安现代非线性科学应用研究所, 2009-03-18.
YAN Kun. Primary annotation of symbol basing on imaginary form about infinity[R]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 18 March 2009.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/spirit-pdf.pdf

[7] A J Zambano, H Oguchi, I Takeuchi, *et al*. Dependence of exchange coupling interaction on micromagnetic constants in hard/soft magnetic bilayer systems[J]. Physical Review B, 2007, 75(14):144429(7 pages).

[8] Einstein A, Stern O. Einige Argumente für die Annehme einer molekularen Agitation bein absoluten Nullpunkt (Some arguments in support of the assumption of molecular vibration at the absolute zero) [J]. Annalen der Physik, 1913, 40: 551～560.

[9] 于长丰. 相位力学原理[M]. 北京：国防工业出版社，2007.
YU Chang-feng. Principle of Phase Mechanics[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007.

[10] http://www.nndc.bnl.gov
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_elements_by_stability_of_isotopes

[11] 阎坤. 地球空间稳定核素的趋势分析方程与物质的超光速运动规律[J]. 地球物理学进展，2006, 21(1):38～47.
YAN Kun. The tendency analytical equations of stable nuclides and the superluminal velocity motion laws of matter in geospace[J]. Progress in Geophysics (in Chinese with abstract in English), 2006, 21(1):38～47.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/vacuumenergy-pdf.pdf

[12] Edward Anders, Nkolas Grevesse. Abundances of the Elements: Meteoritic and Solar[J]. Geochimica et Cosmochimica Acta, 1989, 53(1): 197～214.

[13] XIE Rui-hua, GONG Jiang-bin. Simple three-parameter model potential for diatomic systems: from weakly and strongly bound molecules to metastable molecular ions[J]. Phys Rev Lett，2005，95(26): 263202(4 pages).

[14] 孙卫国，樊群超，任维义. 双原子分子离解能的精确研究[J]. 中国科学(G辑)，2007, 37(5)：590～599.
SUN Wei-guo, FAN Qun-chao, REN Wei-yi.Accurate studies on dissociation energies of diatomic molecules[J].Science in China (Series G), 2007, 50(5): 611～621.

[15] Julien Toulouse, C J Umrigar. Full optimization of Jastrow-Slater wave functions with application to the first-row atoms and homonuclear diatomic molecules[J]. J Chem Phys, 2008, 128(17): 174101(14 pages).

[16] http://jpkc.nefu.edu.cn/csx/jpkc/doc/jiaoan/capter7.doc

[17] 石德珂, 金志浩. 材料力学性能[M]. 西安：西安交通大学出版社, 1998.
SHI De-ke, JIN Zhi-hao. Mechanical Behavior of Materials[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1998.

[18] 王来贵，何峰，刘向峰，于永江. 岩石试件非线性蠕变模型及其稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报，2004，23(10)：1640-1642.
WANG Laigui, HE Feng, LIU Xiangfeng, YU Yongjiang. Nonlinear creep model and stability analysis of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(10): 1640-1642.

[19] 孙钧. 岩石流变力学及其工程应用研究的若干进展[J]. 岩石力学与工程学报，2007, 26(6)：1081～1106.
SUN Jun. Rock rheological mechanics and its advance in engineering applications[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2007,26(6):1081～1106.

[20] Gerya Taras V, Yuen David A. Robust characteristics method for modeling multiphase visco-elasto-plastic thermo-mechanical problems[J]. Physics of The Earth and Planetary Interiors, 2007, 163(4): 83～105.

研究报告[Research Report]

关 于 连 接 方 程 的 简 略 注 释

阎 坤

（ 西安现代非线性科学应用研究所　西安 710061 ）

摘　要：本文给出了连接方程的构造过程及其若干应用的简略注释，进而给出了前偏对称(欠对称或弱对称)方程及后偏对称方程的简洁构造形式，讨论了连接方程是一自嵌套非线性动力学方程形式的近似等效解析解的分析方法，分析了一类简单非线性微分方程的基本解析解表示形式，探讨了自然现象演化过程的规律谱系（或谱阵）及连接纽带大略一简学或维学研究方向，提出了现象在演化过程的状态转变方程，其在一般情况下遵循最优或最简洁路径光滑曲线方程形式这一自然最优原则或自然简洁原则，构建了现象演化系列相变特征函数的一种扩展型双曲正切级数近似表示形式，继而提出了自然演化平衡法则，给出了生物生长曲线趋势性方程；依据连接方程的非线性动力学方程近似形式，预言了二个基于非线性动力学方程的电路元件－电存器(nonlinstor)和电敏器(geomsentor)，其皆为深化型电容器的电路器件，分析了 RLCNG 串联电路微分方程的性质；给出了广义分布函数及广义分布密度函数的延展方向与粒子统计分布趋势性方程及其若干条件解，讨论了 Planck 量子方程的频率区间性质，探讨了具有近似线性变频解的非线性微分方程形式及在负频率情况下变频波动方程的曲线形态特征，讨论了数据库理论构架（此构架由基础数据库、趋势性方程、解析数据库构成）的一种简洁模式，建立了美国年度能源消费量与 GDP 关系方程及英国年度人口数量与 GDP 关系方程，并计算预测了美国年度能源消费极限值与英国年度人口极限值；随后探讨了岩石及单晶高温材料的蠕变过程曲线、半导体分立器件 V－A 特性曲线、超导材料电阻 R（或电阻率 ρ）－绝对温度 T 曲线方程，双晶 Josephson 结直流特性曲线及 Shapiro 台阶电流阶跃幅值曲线的趋势拟合方程，机械系统或伺服系统摩擦力－速度特性曲线（包括 Coulomb 摩擦、Stribeck 摩擦、黏性摩擦、摩擦迟滞及反常摩擦迟滞效应）的趋势拟合方程，Newton 冷却定律的扩展方程形式，高聚物熔体流动曲线剪切应力－剪切速率（包括第一 Newton 区、假塑性区、第二 Newton 区、胀流区、湍流及反常剪切效应）的趋势性方程等。在唯象及趋势层面，指出了材料蠕变过程曲线与高聚物熔体流动曲线具有类似性质，及材料断裂裂纹扩展结构与流体湍流漩涡嵌套结构这二种现象演化在分形测度表述上具有相通性的研究方向；最后讨论了连接方程在数据拟合及长程预测方面的局限性。

关键词：连接方程，自嵌套非线性动力学方程，规律谱阵，简学或维学，状态转化方程，自然简洁原则，自然演化平衡法则

Brief annotation of the connection equation

YAN Kun

(Xi’an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi’an 710061, China)

Abstract In this paper, brief annotation of a constructing procedure and the applications of connection equation are given, then the simple constructing forms of forward partial-symmetrical equation(or weak-symmetrical equation) and backward partial-symmetrical equation are given too. An analytical method of the connection equation as an approximate equivalent analytical solution of a self-nested nonlinear dynamics equation is discussed. The expressions of the basic analytical solution of a class of simple nonlinear differential equations are analyzed. Research direction of Jiansics or Dimennics about spectrum(spectrum array) formed by series of laws and their connections in evolution processes of natural phenomena are explored, an equation of the transformation of the phenomena between the states in evolutionary process is presented, that it follows a natural optimum principle or a natural conciseness principle in general, which having an equation form of the smooth curve with the optimal path or the most concise path. An approximate expression of extended hyperbolic tangent series for the characteristic function of the series phases transition of the evolution of phenomena is constructed, then natural evolution-balance rule is presented, and tendency equation of biological growth process is given too. According to approximate form of the nonlinear dynamics equation of the connection equation, two new electronic circuit elements(nonlinstor and geomsentor) with deepening charge-controlled capacitor properties based on form of the nonlinear differential equation is predicted, and the nonlinear differential equation for a RLCNG series circuit is also analyzed, extended direction of the general distribution function and the general distribution density function, tendency equation and its conditional solutions of the statistical distributions of the particles are given, properties of the frequency interval of Planck’s quantum equation are explored, nonlinear differential equation expressions with solution of approximate linear frequency conversion and their characteristics of curve shapes of frequency conversion wave equations at negative frequency are discussed, a concise model of database theoretical framework (this framework to be made up of foundation database, tendency equation, and analytic database) is explored, an equation of relationship between the total annual energy consumption with the annual GDP in the United States, and an equation of relationship between the annual population with the annual GDP in the United Kingdom are established, and limit values of the total annual energy consumption in the United States and the annual population in the United Kingdom are calculated and predicted. Subsequently, tendency fitting equations of curves are explored, which included the creep process curve of the rock and single-crystal superalloy, the Volt-Ampere characteristic curve of the discrete semiconductor device, the resistance(or resistivity)-absolute temperature curve of the superconducting material, the direct current *I-U* characteristic curve of the bicrystal Josephson junction, and the current step amplitude of Shapiro steps, the friction-speed characteristic curve (that included the stages of Coulomb friction, Stribeck friction, viscous friction, friction hysteresis, and anomalous friction hysteresis effect) in mechanical system or servo system, an expanded equation form of the Newton's law of cooling, the shear stress-shear rate in the flow curve (that included the sections of first Newtonian fluid-flow, pseudoplastic flow, second Newtonian fluid-flow, dilatant flow, turbulent flow, and anomalous shearing effect) of the polymer melts, etc. On phenomenological and tendency levels, research directions of similar property of creep curves of materials with the flow curves of polymer melt, and similarity in the fractal measure of the evolutions of fracture cracks growth structure and fluid turbulent eddies nested structure are pointed out. At the end, limitations of the connection equation in data fitting and long-range forecasting are discussed.

Keywords connection equations, self-nested nonlinear dynamics equation, spectrum array of laws, Jiansics or Dimennics, states transforming equation, natural conciseness principle, natural evolution-balance rule

http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/ConnectionEquation-pdf.pdf