

本文框架内容发表在:

阎坤. 数据曲线间断区域的自适应连接方程研究[J]. 地球物理学进展, 2011, 26(1):162~171.

YAN Kun. Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve[J]. Progress in Geophys(in Chinese with abstract in English), 2011,26(1): 162~171; DOI:10.3969/j.issn.1004-2903.2011.01.018.

数据曲线间断区域的自适应连接方程研究

阎坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘要: 通过讨论非线性动力学方程的近似等效解析解及数据曲线间断区域的性质, 给出间断区域的自适应连接方程形式及其参数确定的预置迭代方法, 随后给出计算实例。此连接方程, 可以作为 S 型曲线方程或 Logistic 函数的一般扩展形式(扩展型双曲正切函数)予以应用; 其中对于缓变数据曲线阶跃间断区域, 可自动计算生成连接方程形式。文中基于自适应连接方程探讨了数据曲线或部分连续函数的一种扩展型双曲正切级数近似表示形式、磁性材料磁滞回线方程、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程、稳定核素比结合能方程、势能函数曲线方程(诸如双原子分子势能函数曲线方程)、自然饱和过程方程(诸如钢材材料断裂韧性方程)及金属或岩石蠕变过程方程。

关键词: 非线性动力学方程, 数据曲线间断区域, 自适应连接方程, 磁滞回线方程, 粒子统计分布方程, 比结合能方程, 势能函数曲线方程, 自然饱和过程方程, 蠕变过程方程

Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve

YAN Kun

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, by discussing the approximate equivalent analytical solution of the nonlinear dynamics equation and the properties in discontinuous area of data curve, a form of adaptive connection equation and the preset iteration method determining parameters in discontinuous area are given. Subsequently, a computing example is given too. This connection equation can be applied as a general form of expansion (extended hyperbolic tangent function) of the S-curve (sigmoid curve) equation or Logistic function, and for the step discontinuous area of slowly varying data curve, its form of the adaptive connection equation can be obtained by automatic calculating. And in this paper, basing on the form of the adaptive connection equation, an approximate expression of extended hyperbolic tangent series for the data curve or the partial continuous functions, the equations of magnetic hysteresis loop for magnetic material, the extended form of average energy equation and the tendency differential equation of the average particle number for the statistical distributions of the particles, the equation of average binding energy per nucleon in stable nuclide, the curvilinear equation of potential energy function (such as curvilinear equation of potential energy function of diatomic molecule, etc), the equation of natural saturation process (such as tree growth and physical reaction or chemical reaction process, the equation of fracture toughness for steel material, etc) and the equation of typical creep process for metal or rock material are explored and analyzed tentatively.

Keywords nonlinear dynamics equation, discontinuous area of data curve, adaptive connection equation, equations of magnetic hysteresis loop, equation of statistical distributions of the particles, equation of average binding energy per nucleon, curvilinear equation of potential energy function, equation of natural saturation process, equation of creep process

0 引言

在自然科学及工程技术的诸多领域, 对数据曲线间断区域或等效间断区域予以描述是很重要的研究方向, 其中以确定连接方程形式及参数计算方法较为关键。

本文通过对非线性动力学方程近似等效解析解及数据曲线在间断区域的性质讨论, 采用趋势分析途径^[1], 给出自适应连接方程及其参数确定的预置迭代计算方法, 实例计算表明自适应连接效果很好。本文给出并分析了非线性 Newton 动力学方程、包含一种新的非线性电路元件—电存储器 (Nonlinstor) 的 RLCN 串联电路方程、数据曲线或连续函数的扩展型双曲正切级数近似表示形式、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程、稳定核素比结合能方程等方面相关内容。

与 Bézier 函数曲线及相关方法等^[2-4]比较, 本文方法主要侧重于数据曲线间断区域的自适应连接、或光滑穿过折线区域, 其可直接应用到对类如时间序列局部折线及阶跃数据进行自适应光滑处理、曲线间断区域或缠绕区域(等效间断区域)的非线性动力学方程趋势分析描述及简化处理、数据主曲线优化与回归分析融合等方面。

1 数据曲线间断区域的自适应连接方程形式

1.1 非线性动力学方程的近似等效解析解及扩展形式

一般地对于较为广泛的自然现象演化过程, 包括饱和与波动复合过程, 可构建一简洁的非线性动力学方程描述

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \sigma_{IE} + \sigma_1 y + \sigma_2 y^2 = \psi_{EE}, \quad (1)$$

式中 $\varpi_{1,2}$ 、 $\sigma_{1,2}$ 为系函数, σ_{IE} 、 ψ_{EE} 为内、外激励函数。

方程(1)式兼容经典 Newton 动力学位移 y —时间 t 方程形式、RLC 串联电路电荷量 Q —时间 t 方程形式为

$$m_0 \frac{d^2y}{dt^2} + \mu_0 \frac{dy}{dt} + b_{IE} + k_0 y + n_0 y^2 = F_{EE}, \quad (2)$$

$$L_0 \frac{d^2Q}{dt^2} + R_0 \frac{dQ}{dt} + S_{IE} + \frac{1}{C_0} Q + N_0 Q^2 = U_{EE}; \quad (3)$$

在(2)式中 m_0 、 μ_0 、 k_0 分别为质点质量、介质阻力系数、介质弹性系数, F_{EE} 为作用力; b_{IE} 为自激励函数,

作者简介 阎坤, 1962年10月生, 吉林榆树人, 1983年8月毕业于长春地质学院; 数值解析方向, 目前主要从事非线性科学研究。

(Email: yankun@nature.ac.cn)

量纲[mkgs⁻²]; n_0 为非线性极限系数, 量纲[m⁻¹kgs⁻²]; $n_0 = 0$ 时方程 (2) 式转化为经典 Newton 动力学方程。在方程 (3) 式中 L_0 、 R_0 、 C_0 分别为串联电路中的电感值、电阻值、电容值, U_{EE} 为电压源激励函数; S_{IE} 为自激励状态函数, 量纲[m²kgs⁻³A⁻¹], 拟此等效元件名称为“电态元件, statransor”, 文字及图形符号为“S, —□—”, 等效电压方程 $U_S = S_{IE}$; N_0 为非线性元件特征值, 量纲[m²kgs⁻⁵A⁻³], 具有构成新型非线性电子存储器的特性, 故拟其名称为“电存储器, nonlinstor”, 文字及图形符号为“N, —□—”, 电压方程 $U_N = N_0 Q^2$; $N_0 = 0$ 时 (3) 式即由 RLCN 串联电路方程转化为 RLC 串联电路方程。

对于方程 (2) 式, 当 $\mu_0 = 0$ 、 $k_0 = 0$ 时, 有

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + n_0 y^2 = F_{EE} - b_{IE};$$

进而当 m_0 、 n_0 、 F_{EE} 、 b_{IE} 为常量时, 积分得能量方程

$$\frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{3} n_0 y^3 = [F_{EE} - b_{IE}]y + C_E,$$

这里 C_E 为能量待定常量; 则在 $n_0 \neq 0$ 、 $F_{EE} = b_{IE}$ 、 $C_E = 0$ 时位移 y 、速度 V_n 、加速度 g_n 的时间解为

$$y = -\frac{6m_0}{n_0[t+t_0]^2}, V_n = \frac{12m_0}{n_0[t+t_0]^3}, g_n = -\frac{36m_0}{n_0[t+t_0]^4};$$

式中 $V_n \ll c$, c 为真空中光速, t_0 为时间待定常量。

对电存元件 (或电存储器), 考虑 Q 为简谐波函数

$$Q = Q_0 \cos[2\pi f_0 t + \theta_0],$$

这里 Q_0 、 f_0 及 θ_0 分别为 Q 的简谐波函数电荷量振幅、频率及初始相位角; 则得电存元件的阻抗 Z_N 为

$$Z_N = \sqrt{3} N_0 Q_0 [4\pi f_0]^{-1}; \quad (4)$$

即电存元件具有非线性、高通、变频及关联电荷的性质。

对于非线性动力学方程 (1) 式, 其近似等效解析解的分析方法为: 简化难解的非线性方程为易解的线性或非线性方程, 解出其解析解, 根据具体需要拓展该解析解形式为原方程的近似等效解析解, 将此解代入原方程中试算或对比解析解, 确定近似等效解析解的具体形式。

对于 (1) 式, 如不考虑细节波动, 取 $\omega_2 = 0$ 、 $\omega_1 \neq 0$, 且 ω_1 、 σ_{IE} 、 σ_1 、 σ_2 、 ψ_{EE} 皆为常量; 约化常量 $\omega_1 = 1$, 即方程各项同除 ω_1 , 则当 $\sigma_2 \neq 0$ 时方程 (1) 式的解为

$$y = \begin{cases} y_0 + A \tan[\alpha(x-x_0)], & \sigma_2 \xi > 0, \\ \alpha = \sqrt{\sigma_2 \xi}, & A = -\alpha \sigma_2^{-1} \\ y_0 + A \tanh[\alpha(x-x_0)], & \sigma_2 \xi < 0, \\ \alpha = \sqrt{-\sigma_2 \xi}, & A = \alpha \sigma_2^{-1} \\ y_0 + \sigma_2^{-1} [x + \xi_0]^{-1}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中 $y_0 = -0.5\sigma_1\sigma_2^{-1}$, $\xi = -g_E - 0.25\sigma_1^2\sigma_2^{-1}$, $g_E = \psi_{EE} - \sigma_{IE}$; x_0 、 ξ_0 为待定常量, $y(x=x_0) = y_0$ 。当 $\sigma_2 = 0$ 时方程的解为

$$y = \begin{cases} g_E \sigma_1^{-1} + [y_{x=0} - g_E \sigma_1^{-1}] \exp(-\sigma_1 x), & \sigma_1 \neq 0 \\ y_{x=0} + g_E x, & \sigma_1 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

传统描述 S 型曲线的 Logistic 函数亦是非线性动力学 (1) 式的解 (5) 式中双曲正切函数在 $A = y_0$ 时的表述

$$y = y_0 - A + \frac{2A}{1 + \exp[-2\alpha(x-x_0)]} = \frac{2y_0}{1 + \exp[-2\alpha(x-x_0)]}。$$

根据 (5) 式, 若 (3) 式有电荷量的近似双曲正切函数解, 则需 $C_0 < 0$, 即电路呈现负容性; 电存符号“—□—”即是对 RCN 串联电路直接输出电荷双曲正切曲线的标记。

将解析解 (5) 式中的双曲正切函数拓展为一般形式

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_{s1}(x-x_0)] - \exp[-\alpha_{s2}(x-x_0)]}{\exp[\alpha_{s3}(x-x_0)] + \exp[-\alpha_{s4}(x-x_0)]},$$

式中 $\alpha_{s1, s2, s3, s4}$ 为待定系数, 在平衡点处 $y(x=x_0) = y_0$ 。

对上式分子分母同乘 $\exp[-0.5(\alpha_{s3} - \alpha_{s4})(x-x_0)]$ 得

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]}, \quad (7)$$

式中 $\alpha_1 = \alpha_{s1} - 0.5(\alpha_{s3} - \alpha_{s4})$,

$$\alpha_2 = \alpha_{s2} + 0.5(\alpha_{s3} - \alpha_{s4}), \quad \alpha_3 = 0.5(\alpha_{s3} + \alpha_{s4}).$$

方程 (7) 式一特殊形式为

$$y = y_0 + A \frac{\sinh[\alpha_1(x-x_0)]}{\cosh[\alpha_3(x-x_0)]}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad (8)$$

进而当 $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha$ 时还原为方程 (5) 式中双曲正切函数 $y = y_0 + A \tanh[\alpha(x-x_0)]$ 。

在趋势上部分连续函数 $y = f(x)$ 可近似展开级数为

$$f(x) = f(x_{01}) - A_1 + \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} A_{\Lambda} \left[1 + \frac{\exp[\alpha_{\Lambda}(x-x_{0\Lambda})] - \exp[-\beta_{\Lambda}(x-x_{0\Lambda})]}{2 \cosh[\gamma_{\Lambda}(x-x_{0\Lambda})]} \right] + \lambda_s, \quad (9)$$

这里 $f(x_{01})$ 为初始段转折点纵坐标; Θ 、 Λ 为自然数, $\Theta \geq 1$ 、 $\Lambda \geq 1$; $x_{0\Lambda}$ 为 $y = f(x)$ 曲线各分段中心转折点横坐标, 一般地, 各分段开始点、结束点即在其前极限点、后极限点附近; A_{Λ} 、 α_{Λ} 、 β_{Λ} 、 γ_{Λ} 为各分段曲线形态系数; λ_s 为级数整体偏移量。

特别地, 若函数曲线前后二端有限或不作开放性形态要求, 可取 $\alpha_{\Lambda} \approx \beta_{\Lambda} \approx \gamma_{\Lambda}$, 则 $\lambda_s \approx 0$, 方程 (9) 式成为

$$f(x) = f(x_{01}) - A_1 + \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} A_{\Lambda} [1 + \tanh[\alpha_{\Lambda}(x-x_{0\Lambda})]];$$

曲线诸分段在接点处近似等效为水平线。简单地由上式可构造窗函数 ($\alpha_1 > 0$ 、 $\alpha_2 > 0$) 与台阶函数 ($\alpha_1 \alpha_2 < 0$) 为 $w = 0.5[\tanh[\alpha_1(x-x_{01})] - \tanh[\alpha_2(x-x_{02})]]$ 。

依据解析解 (5) 式中的双曲正切函数形式, 可知方程 (7) 式即为方程 (1) 式当 $\omega_1 \neq 0$ 、 $\omega_2 \neq 0$ 、 $\sigma_2 \neq 0$ 且 $\sigma_1^2 > 4[\sigma_{IE} - \psi_{EE}]\sigma_2$ 时近似等效解析解的一类表示形式或扩展形式。其中方程 (7) 式系数与方程 (1) 式系数

的关系在极限层面有: 方程 (1) 式当 $\sigma_2 = 0$ 时, 其一解析解对应方程 (7) 式在 $\alpha_3 = 0$ 时的形式; (1) 式当 $\omega_2 = 0$ 时, 其一解析解对应 (7) 式在 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ 时的形式。

1.2 数据曲线间断区域端点的简略性质

对于数据曲线间断区域, 取始点为 $P_S(x_S, y_S)$, 其左邻域一点取为 $P_{S-}(x_{S-}, y_{S-})$; 终点为 $P_E(x_E, y_E)$, 其右邻域一点取为 $P_{E+}(x_{E+}, y_{E+})$; $x_E > x_S$; 则有始点局部平均斜率 k_S 、终点局部平均斜率 k_E 分别为 $k_S = (y_S - y_{S-})(x_S - x_{S-})^{-1}$, $k_E = (y_{E+} - y_E)(x_{E+} - x_E)^{-1}$; 而从始点到终点的斜率则为 $k_{SE} = (y_E - y_S)(x_E - x_S)^{-1}$ 。

取数据曲线间断区域平衡点坐标 x_0 、 y_0 及其幅值 A 的预置试算值 x_{0pv} 、 y_{0pv} 、 A_{pv} 分别为

$$\begin{aligned} x_{0pv} &= g_1(x_S + x_E), & y_{0pv} &= g_2(y_S + y_E), \\ A_{pv} &= g_3(y_E - y_S), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 g_1 、 g_2 、 g_3 为平衡点坐标计算系数; 根据曲线间断区域具体情况取值在 0.4~0.6 附近, 一般取值为 0.5。

1.3 自适应连接方程形式及若干讨论

方程 (7) 式能够自适应上述数据曲线间断区域始点、终点邻域斜率值, 具有多阶导数及多种曲线形态, 包括饱和及蠕变曲线; 蠕变也可由 (7) 式坐标置换函数描述

$$x = x_0 + A_R \frac{\exp[\alpha_{R1}(y - y_0)] - \exp[-\alpha_{R2}(y - y_0)]}{2 \cosh[\alpha_{R3}(y - y_0)]}, \quad (11)$$

这里 A_R 、 α_{R1} 、 α_{R2} 、 α_{R3} 为待定系数, 平衡点 $x(y = y_0) = x_0$ 。

根据天体运行轨道的一般性 Binet 方程^[5]

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = u_0 [2 \exp(4c^{-2}u + 4\beta) - \exp(2c^{-2}u + 2\beta)], \quad (12)$$

弱场时 $4c^{-2}u + 4\beta \ll 1$, 将方程二阶 Taylor 级数展开得

$$\frac{d^2 \tau}{d\theta^2} + \kappa_1 \tau^2 + \kappa_2 = 0, \quad \tau = u - \kappa_0 \quad (13)$$

这里 $u = \frac{GM_0}{r}$, $u_0 = \frac{GM_0}{a(1-e^2)}$, $\beta = -\frac{GM_0}{2c^2 a}$;

$$\kappa_0 = c^2 \left[\frac{1}{28u_0} c^2 - \frac{3}{14} - \beta \right], \quad \kappa_1 = -\frac{14}{c^4} u_0,$$

$$\kappa_2 = u_0 [3.5c^{-4} \kappa_0^2 - 14\beta^2 - 6\beta - 1];$$

上式即为 (1) 式在 $\omega_1 = 0$, 且 ω_2 、 σ_{IE} 、 σ_1 、 σ_2 、 ψ_{EE} 为常量时形式; 这里 G 为 Newton 引力常数, c 为真空中光速, M_0 为主星体质量, r 、 θ 、 a 、 e 分别为次星体公转轨道极坐标矢径、弧度、轨道半长径、轨道偏心率。

在上述意义下, 线性总是同一层面非线性的极限表述, 而非线性则是另一层面线性的近似形式; 当将经典饱和过程在极限上的定值替换为定简单方程时, 则一般的非饱和过程即可转化为广义的饱和过程; 传递和历经具有等效性, 变换和映射没有疆界。其中之一是, 基于 Euler 公式或双曲正切函数得无穷的虚数标记方程^[6]

$$\exp[i \arctan i] = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (14)$$

$$\ln 0 = [n\pi + \arctan i]i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (15)$$

而下面二个常系数置换方程在趋势上具有等效的条件解 $\frac{dx}{dy} + \sigma_{11}x^2 + \sigma_{12} = 0$, $\frac{dy}{dx} + \sigma_{21}y^2 + \sigma_{22} = 0$; (16)

此二方程的具体条件解及变形方程为 (17)、(18) 二式, 类如软磁材料或纳米粒子磁滞回线^[7]趋势方程或包络方程的简略表述, 曲线如图 1 所示, 这里只显示右单边。

$$y = 0.93 \times 2\pi^{-1} \arctan[0.1(x \pm 1)], \quad (17)$$

$$y = 0.8 \frac{\sinh[0.0550(x \pm 1)]}{\cosh[0.0544(x \pm 1)]}. \quad (18)$$

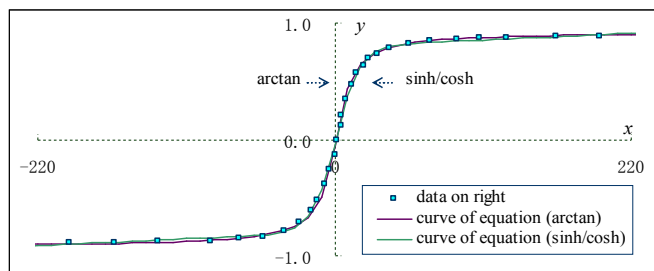


图 1 软磁材料磁滞回线右单边趋势方程等效曲线图

Fig. 1 The equivalent curves figure of tendency equations of right single magnetic hysteresis loop for soft magnetic material which obtained from arctangent function and hyperbolic tangent function

对于一般磁性材料, 基于 (17) 式给出的饱和磁滞回线左右单边轮廓层面为方程 (19) 式, 其曲线如图 2 所示。

$$y = 1.11 \times 2\pi^{-1} \arctan[0.035(x \pm 69)] \mp 0.03. \quad (19)$$

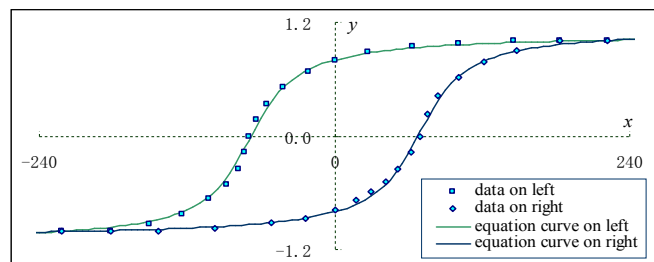


图 2 磁性材料饱和磁滞回线趋势方程曲线图

Fig. 2 The curves figure of tendency equation of saturation magnetic hysteresis loop for magnetic material which obtained from arctangent function

上面图 1 及图 2 中的数据为图形曲线比例数据, 方程与数据相关系数皆大于 0.998。磁滞曲线可有多种方程阐释, 上述方程仅是在唯象层面的描述, 不具有机理上意义。

通过 (9) 式构造时域 t 的动态窗函数 w_t , 可得岩体爆破单孔单响振动加速度 g_R 的方程 (20) 式 (唯象方程)

$$g_R = w_t \sin[\alpha_R(t - t_{R0})], \quad (20)$$

式中 α_R 、 t_{R0} 为待定常量; 该趋势性方程曲线如图 3 所示。

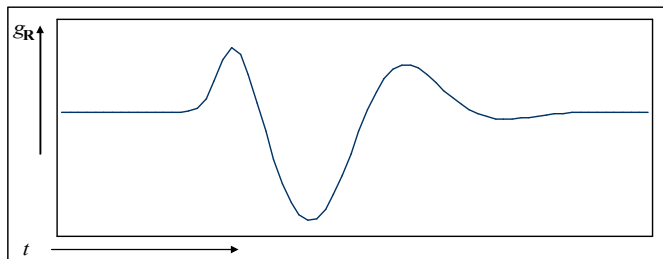


图 3 岩体爆破单孔单响振动加速度拟合方程曲线图

Fig. 3 The fitting equation curve figure of vibration acceleration of single hole blasting of once each time point in rock mass blasting process

1.4 粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程

带有空间—时间坐标及速度参量的窗函数可给出波或粒子的定域性方程，而与之对应的背景信息则具有非定域性，经广域的信息传递及同机理解析产生关联效应。

一般地，在数据运算及处理过程需保留 +0 及 -0 的标记以与 +∞ 及 -∞ 相对应。下面给出粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程。

绝对温度是描述自然现象的统计性参量之一，历史上，其基本与分子及原子等物质构成层面的动能相联系。1913 年, Einstein 和 Stern 基于 Planck 黑体辐射公式思想、简谐振子的 Einstein 本征能量

$$E = \left[n + \frac{1}{2} \right] h\nu, \quad 0 \leq n < +\infty$$

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = h\nu,$$

及 Boltzmann 粒子数分布 j 与能量 E 的关系方程

$$j \propto \exp[-E(kT)^{-1}];$$

给出平均能量 \bar{E}_{ES} 与频率 ν 及绝对温度 T 的关系方程^[8]

$$\bar{E}_{ES} = \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1},$$

这里 n 为自然数, h 为 Planck 常数, k 为 Boltzmann 常数。

现将 n 加以自然数 q 限制, Einstein 本征能量表示为

$$E = [n + \delta] h\nu, \quad 0 \leq n \leq q, \quad q \gg 1 \quad (21)$$

这里 δ 为待定常数。对于简谐振子, $\delta = \delta_E = 0.5$, δ_E 为 Einstein 简谐振子能量常数, 得平均能量方程扩展形式

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\sum_{E=0.5h\nu}^{(q+0.5)h\nu} [E \exp[-E(kT)^{-1}]] \Delta E}{\sum_{E=0.5h\nu}^{(q+0.5)h\nu} [\exp[-E(kT)^{-1}]] \Delta E} \\ &= \frac{\exp[-0.5h\nu(kT)^{-1}] \sum_{n=0}^q (0.5+n) h\nu \exp[-nh\nu(kT)^{-1}]}{\exp[-0.5h\nu(kT)^{-1}] \sum_{n=0}^q \exp[-nh\nu(kT)^{-1}]} \\ &= \frac{1}{2} h\nu + \frac{\sum_{n=0}^q nh\nu \exp[-nh\nu(kT)^{-1}]}{\sum_{n=0}^q \exp[-nh\nu(kT)^{-1}]} \\ &= \frac{1}{2} h\nu - \frac{\partial}{\partial(kT)^{-1}} \ln \sum_{n=0}^q \exp[-nh\nu(kT)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} h\nu - \frac{\partial}{\partial(kT)^{-1}} \ln \frac{1 - \exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]}{1 - \exp[-h\nu(kT)^{-1}]} \\ &= \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} - \frac{(q+1)h\nu}{\exp[(q+1)h\nu(kT)^{-1}] - 1}; \end{aligned} \quad (22)$$

故上式在取 $q \rightarrow +\infty$ 时, 即得经典的平均能量方程形式

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \bar{E} = \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} = \bar{E}_{ES}.$$

根据方程 (22) 式, 在 νT^{-1} 减小方向趋势性近似有

$$\bar{E} = \begin{cases} \frac{1}{2} h\nu, & \frac{h\nu}{kT} \gg 1 \\ \frac{e-2}{e-1} kT, & \frac{h\nu}{kT} = \frac{1}{q+1} \\ \frac{1}{2} h\nu, & 0 < \frac{h\nu}{kT} \ll \frac{1}{q+1} \end{cases} \quad (23)$$

方程 (23) 式的后二个近似式为甚低频段、甚高温区的量子化效应研究提供参考。

方程 (22) 式的一个前提条件为

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \exp[-E(kT)^{-1}] \rightarrow 0;$$

即方程 (22) 式不适用于 $T < 0$ 的区域; 如果直接跨越 $T = 0$, 则方程 (22) 式于 $T = 0$ 邻域存在零点能量阶跃

$$\bar{E}_{\pm 0 \text{ step}} = \bar{E}(T \rightarrow -0) - \bar{E}(T \rightarrow +0) = qh\nu.$$

真空、光速、绝对零度、超流(固)体, 真空背景、超光速、自由相体, 是分属于同类相变附近层面紧密关联问题; 而零点能量即与天体构成及运行背景、引力机理、超光速、波粒二象性、量子纠缠、Casimir 力、Higgs 机制等密切相关, 是解析开 G 、 c 、 h 的重要方向。目前描述的四种作用力应仅是自然界中诸多作用力的一部分, 对其所作的统一框架探索在机械论层面无有止境。根本上, 基本常数是包含更基本常数的局部能量时空尺度方程数值形式近似表示; 由此, 数理逻辑是开环周期体系。

作为探讨, 若将方程 (22) 式亦适用于 $T < 0$ 的区域, 则一途径是直接对 Boltzmann 统计分布方程中的绝对温度 T 取绝对值 $j \propto \exp[-E(k|T|)^{-1}]$, 方程 (22) 式成为

$$\bar{E} = \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(k|T|)^{-1}] - 1} - \frac{(q+1)h\nu}{\exp[(q+1)h\nu(k|T|)^{-1}] - 1}. \quad (24)$$

若用数据处理方法, 参照 (22) 式的连续变化形式

$$\bar{E} = \frac{1}{2} h\nu + kT \int d \frac{x}{\exp x - 1}, \quad (q+1) \frac{h\nu}{kT} \geq x \geq \frac{h\nu}{kT}$$

这里 x 取值从 $(q+1)h\nu(kT)^{-1}$ 到 $h\nu(kT)^{-1}$ 连续变化, 则可得一探讨性的覆盖 $T < 0$ 区域的平滑平均能量方程为

$$\bar{E}_s = \frac{1}{2} h\nu + b|T| \frac{\exp[h\nu(b|T|)^{-1}] - 1}{\exp[h\nu(k|T|)^{-1}] - 1}, \quad (25)$$

式中 b 为待定常数, $b \gg k$ 。

对于方程 (25) 式, 其当 $T > 0$ 、 $h\nu(bT)^{-1} \ll 1$ 时, 即转化为 Einstein—Stern 平均能量方程形式

$$\begin{aligned} \bar{E}_s &= \frac{1}{2} h\nu + bT \frac{[1 + h\nu(bT)^{-1}] - 1}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} \\ &= \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} = \bar{E}_{ES}. \end{aligned}$$

而当 $h\nu(b|T|)^{-1} \gg 1$ 时, 由方程 (25) 式得

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \bar{E}_s = \frac{1}{2} h\nu + \lim_{|T| \rightarrow 0} \frac{b|T|}{\exp[h\nu(k^{-1} - b^{-1})|T|^{-1}] - 1} = \frac{1}{2} h\nu.$$

作为对粒子系统统计分布的趋势性探讨及进一步分析, 简单地, 参考方程 (1) 式, 可初步构建绝对温度为 T 时分布在能级 E 上一个量子态上平均粒子数 n_s 的非线性微分方程趋势性简略形式为

$$z_0 \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} + \frac{dn_s}{dn_E} + z_{IE} + n_s + zn_s^2 = z_{EE}, \quad (26)$$

这里 $n_E = E(kT)^{-1} + \alpha_E$, α_E 为与 kT 相关的待定参量, 是对 n_E 中主项 $E(kT)^{-1}$ 予以补充的参量, 诸如在部分分布中包含着化学势 μ 项, 即 $\alpha_E = -\mu(kT)^{-1} + \alpha_C$, α_C 为常量; z_0 、 z 为待定常数, z_{IE} 为内激励函数, z_{EE} 为外激励函数; $n_s(n_E \rightarrow +\infty) = 0$.

对于方程 (26) 式, 当内激励函数与外激励函数平衡 $z_{IE} = z_{EE}$ 、及 $z_0 = 0$ 时, 有简略的非线性微分方程

$$\frac{dn_s}{dn_E} + n_s + zn_s^2 = 0; \quad (27)$$

在 $dn_s/dn_E = 0$ 时即得方程 (27) 式的二个常量解为

$$n_s = 0; \quad n_s = -z^{-1}, \quad z \neq 0.$$

依据方程 (27) 式, 当 $n_s > 0$ 时, 则在 $z = 0$, $z \neq 0$ 、 $z^{-1} + n_s > 0$, $z \neq 0$ 、 $z^{-1} + n_s < 0$ 三种情况下, 分别得

$$\ln n_s = -n_E + B_1,$$

$$\ln n_s - \ln[z^{-1} + n_s] = -n_E + B_2,$$

$$\ln n_s - \ln[-z^{-1} - n_s] = -n_E + B_3;$$

进而得方程 (27) 式的三个条件解析解形式分别为

$$n_s = \exp[-(E - \mu)(kT)^{-1} - (\alpha_C - B_1)],$$

$$n_s = \frac{z^{-1}}{\exp[(E - \mu)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_2)] - 1},$$

$$n_s = \frac{-z^{-1}}{\exp[(E - \mu)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_3)] + 1};$$

这里 B_1 、 B_2 、 B_3 为待定常量。

上述三式初步给出绝对温度为 T 时在能级 E 上一个量子态中平均粒子数的趋势性分布形式。作为简单对比, 三式依次当 $z = 0$ 、 $\alpha_C = B_1$, $z = 1$ 、 $\alpha_C = B_2$, $z = -1$ 、 $\alpha_C = B_3$ 时即分别对应着 Maxwell-Boltzmann 统计分布、Bose-Einstein 统计分布及 Fermi-Dirac 统计分布里绝对温度为 T 时在能级 E 上一量子态中平均粒子数诸方程形式

$$n_s = \exp[-(E - \mu)(kT)^{-1}], \quad z = 0 \quad (28)$$

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E - \mu)(kT)^{-1}] - 1}, \quad z = 1 \quad (29)$$

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E - \mu)(kT)^{-1}] + 1}; \quad z = -1. \quad (30)$$

2 连接方程的适应性

对于自然现象, 数理方程描述虽不究竟但亦颇有力量; 理论框架相对于现象演化多为趋势性概述, 乃至仅是局部轨迹割线或切线方向的阐释, 但透过对现象网络

阵列中一个节点的深刻认识, 仍可获得对其它节点的简略理解, 虽然每个节点又都包含着无穷层面的无穷问题。

下面对有关自然现象的趋势性描述不具有原理层面的解析意义, 其远离纲领性的主线脉络, 是悄然路过科学台阶、眺望自然远峰的并行途径, 待定系数过多及与物理学和力学常数或基础方程没有建立普适联系是主要原因, 基本属于探讨性的描述, 其旨在介绍连接方程及复合函数形式对自然现象变化过程于趋势或包络层面上的适应性。

2.1 稳定核素比结合能方程

基于 (7) 式, 得稳定核素比结合能 ε (MeV) 与核子数 A_N 的关系方程 (31) 式, 曲线如图 4 所示, 稳定核素比结合能数据来自文献 [9], 方程与数据相关系数 0.9696。

$$\varepsilon = 9.5 \frac{\exp[0.04(A_N - 1)] - \exp[-0.50(A_N - 1)]}{2 \cosh[0.041(A_N - 1)]}; \quad (31)$$

继而得稳定核素结合能方程 E_N 为

$$E_N = A_N \varepsilon = 9.5 A_N \frac{\exp[0.04(A_N - 1)] - \exp[-0.50(A_N - 1)]}{2 \cosh[0.041(A_N - 1)]}; \quad (32)$$

方程与结合能数据相关系数为 0.9999, 曲线如图 5 所示。

仅在数值计算上, 由方程 (32) 式得当 $A_N = 1000$ 时, E_N 取最大值

$$E_{N \max} = 3498.35 \text{ MeV}.$$

根据稳定核素中子数 N 与质子数 Z 之间的实验数据资料及趋势性方程^[10]

$$N = 192 \tan[0.007(Z - 1)],$$

其中方程曲线及与实验数据对比结果如图 6 所示, 可解得在 $A_N = 1000$ 附近处的 Z 、 N 、 A_N 及 E_N 分别为

$$Z = 192, \quad N = 806, \quad A_N = 998, \quad E_N = 3498.34 \text{ MeV}. \quad (33)$$

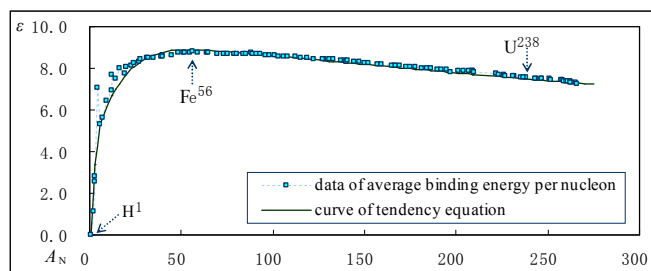


图 4 稳定核素比结合能趋势方程曲线图
Fig. 4 The curve figure of tendency equation of average binding energy per nucleon in stable nuclide

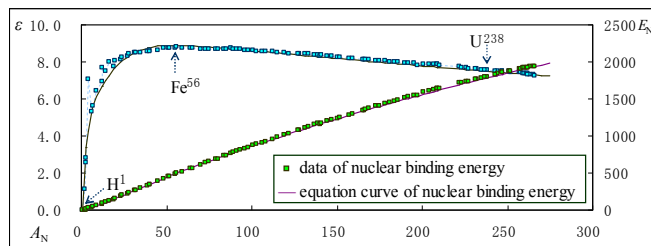


图 5 稳定核素结合能趋势方程曲线图
Fig. 5 The curve figure of tendency equation of stable nuclear binding energy

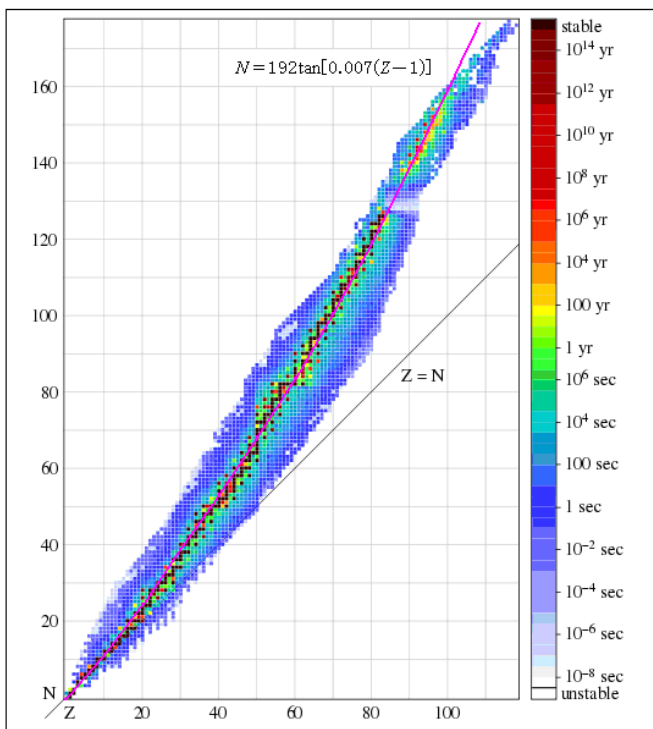


图 6 趋势方程线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图^[10]

■ 稳定核素数据点(from website of nndc.bnl.gov or en.wikipedia.org)
 — 趋势方程曲线(from website of nature.ac.cn)

Fig. 6 The comparison result figure between the curve of the tendency equation and the experimental distribution data points of the stable nuclides^[10]

■ point of the stable nuclide data(from website of nndc.bnl.gov or en.wikipedia.org)
 — curve of the tendency equation(from website of nature.ac.cn)

2.2 势能函数曲线方程

2.2.1 一般性势能函数曲线方程

在自然现象中, 势能函数描述很重要, 基于方程 (9) 式, 得一类现象演化过程势能 U 随距离 r 变化的趋势性方程为

$$U = \phi_1 \left[1 + \phi_2 \frac{\sinh[\alpha_1(r-r_1)]}{\cosh[\alpha_2(r-r_1)]} + \phi_3 \frac{\sinh[\alpha_3(r-r_2)]}{\cosh[\alpha_4(r-r_2)]} \right], \quad (34)$$

这里 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 、 r_1 、 r_2 为待定常量。

方程 (34) 式及其复合函数的方程形式适于部分自然现象势能曲线整体趋势性描述及局部细节刻画分析。

当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 、 $\alpha_3 = \alpha_4$ 时, 得方程 (34) 式的一简化形式为方程 (34A) 式, 其曲线如图 7 所示。

$$U = \phi_1 [1 + \phi_2 \tanh[\alpha_1(r-r_1)] + \phi_3 \tanh[\alpha_3(r-r_2)]] \quad (34A)$$

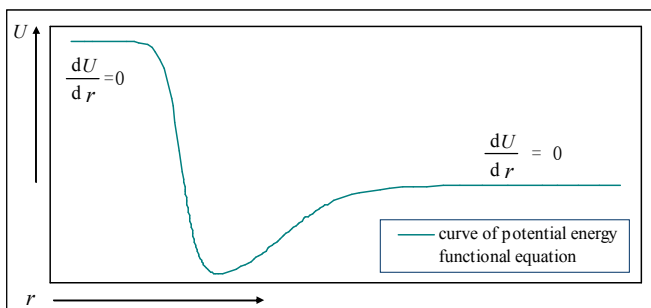


图 7 势能函数的方程曲线图

Fig. 7 The curve figure of potential energy functional equation

2.2.2 双原子分子势能函数曲线方程

双原子分子势能函数具有多种形式^[9, 11~13], 其中对于 $K_2 - B^1\Pi_u$, 由 (34A) 式得势能 U (cm^{-1}) 随核间距 r (nm) 变化的一趋势方程为 (35) 式, 曲线如图 8a 所示, 图中 $K_2 - B^1\Pi_u$ 的 RKR (Rydberg-Klein-Rees) 数据来自文献[9]的相关工作, 方程与数据的相关系数为 0.9923。

$$U = 2400[1.9 - 1.4 \tanh[15(r - 0.31)] + \tanh[5(r - 0.55)]] \quad (35)$$

这里平衡间距 $r_e \approx 0.5(r_1 + r_2) \approx 0.43 \text{ nm}$ 。

方程 (35) 式一简化的局部曲线方程为 (36) 式, 方程曲线如图 8b 所示, 方程与数据的相关系数为 0.9992。

$$U = 2400[1.5 - \tanh[18(r - 0.335)] + \tanh[5(r - 0.55)]] \quad (36)$$

方程 (35)、(36) 二式仅是部分数据拟合的方程形式, 表明方程曲线的形态及趋势, 具体方程还需基于极端情况下的实验数据予以分析确定及计算验证。

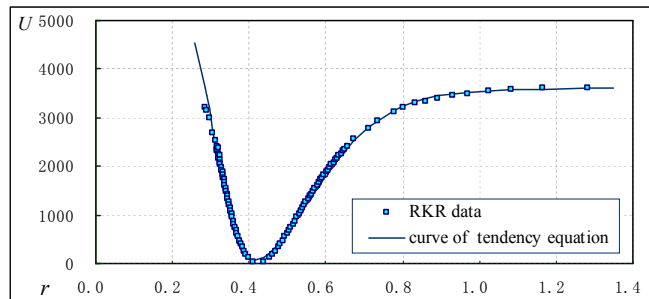


图 8a 双原子分子势能函数的方程曲线图

Fig. 8a The curve figure of potential energy functional equation of diatomic molecule

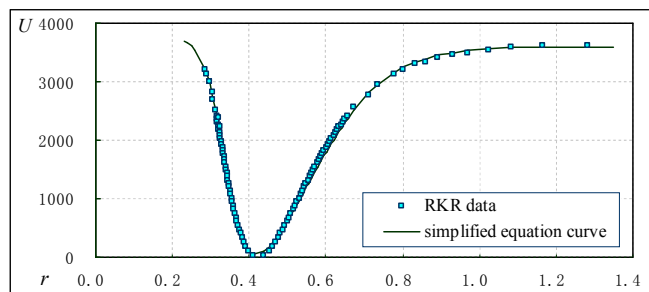


图 8b 双原子分子势能函数的简化方程曲线图

Fig. 8b The curve figure of potential energy functional simplified equation of diatomic molecule

2.3 自然饱和过程

在科学技术中, 自然饱和过程是较普遍的演化现象, 诸如磁性材料饱和磁滞曲线、超导材料电阻—温度 ($R-T$) 曲线、金属淬冷过程曲线、地震前后地温曲线、机电开关动作过程曲线、阶跃响应曲线、光电流与加速电压关系曲线、半导体分立器件 $V-A$ 特性曲线、生物体生长或数目总量曲线、植物群落种数—面积曲线、生物体能耗总量曲线、国家年度能源消费总量—GDP 曲线、国家年度人口总量—GDP 曲线、血红蛋白氧饱和曲线、物理或化学反应过程曲线、化学元素等温热色谱穿透曲线、成分溶解或沉淀过程曲线、发酵过程曲线、共聚反应转化率曲线、化学滴定曲线、单轴应力应变曲线、坝体浸润线、土体崩解过程曲线、混凝土体积膨胀过程曲线、建筑物沉降量时程线、地基强度增长曲线、钢材 DWTT 冲击能量随温度变化曲线、材料断裂韧性与屈服强度关系曲线等。这类现

象演化具有极限性、饱和性、相变或等效相变等特征，是开放系统进行多层面物质、能量、信息交换的动态平衡重构过程。在现象界，过犹不及，适可而止；朴素本真，天成自然。花开未盛、月圆未盈，乃表观佳境；而后随缘转遇，盛极而衰、盈溢而亏。社会单元学识、财富、地位等因素的社会功用亦复如是；当因素处于较低层面变化时，其社会功用的变化微乎其微；而当因素进入中等层面变化时，其社会功用会发生显著变化，并反馈激励给因素致使进一步演变；当因素在很高层面变化时，其社会功用的变化或迅速降低、或发生急剧逆转。万千气象诸念所幻，沙等世界各趋所适；其从一相对稳态演化到另一相对稳态的转变过程基本可依据方程（1）式的条件极限解（或饱和解）、波动解（或振荡解）、极限与波动复合解、近似等效解析解及诸解的复合函数等形式予以趋势性描述；其中依据方程（7）式予以趋势描述的部分自然饱和曲线如图 9 所示，其 18 种曲线即包含方程（5）式中双曲正切函数或描述 S 型曲线的 Logistic 函数的 2 种曲线形态、及方程（8）式的 6 种曲线形态。

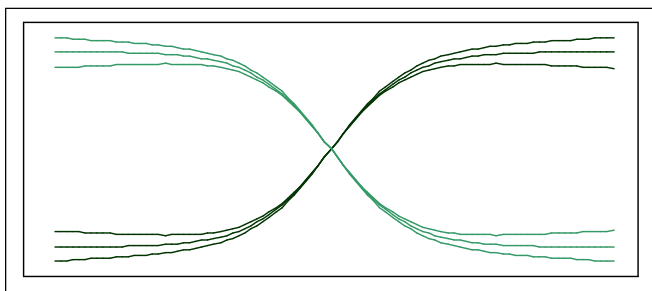


图 9 自然饱和过程趋势方程曲线图
Fig. 9 The curves figure of tendency equations of natural saturation process

一般现象演化在微过程含有小幅值振荡现象，在极限上至少存在一趋势参量乃至饱和参量，非线性科学研究主旨之一即是确定这些参量；而诸多自然饱和过程则是更高层面演化过程的局部构成环节或细化台阶。

下面以树木生长高度曲线、材料断裂韧性曲线为例，给出二个较为理想过程的趋势方程具体形式。

2.3.1 树木生长高度曲线方程

基于（5）式，得树木生长高度 H (m) 与时间 t (a) 的关系方程（37）式，曲线如图 10 所示，树木(紫果云杉)高度数据来自文献[14]，方程与数据相关系数 0.9993。

$$H = 22 + 22 \tanh[0.02(t - 97)] \quad (37)$$

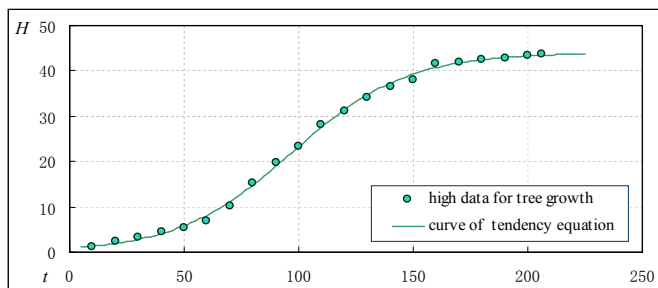


图 10 树木(紫果云杉)生长过程趋势方程曲线图
Fig. 10 The curve figure of tendency equation of the tree(Picea purpurea) growth process

2.3.2 材料断裂韧性曲线方程

基于方程(5)式，可得类如材料断裂韧性 K (MPam^{0.5}) 随屈服强度 σ_Y (MPa)变化等的趋势方程（38）式，其曲线如图 11 所示，图中钢材料 AISI4340 (40CrNiMo)断裂

韧性的数据来自文献[15]。

$$K = 104 - 73 \tanh[0.005(\sigma_Y - 1250)] \quad (38)$$

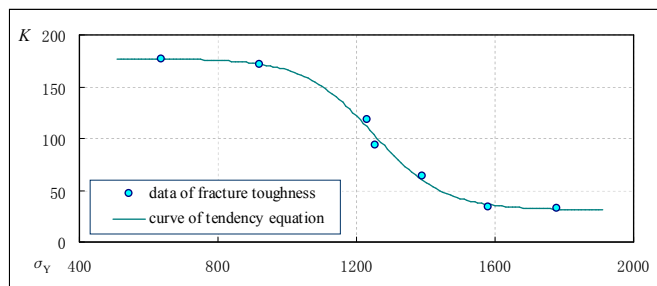


图 11 钢材料断裂韧性趋势方程曲线图
Fig. 11 The curve figure of tendency equation of fracture toughness for steel material

2.4 蠕变过程

对于部分蠕变过程演化曲线，诸如材料切削走刀抗力（或后刀面磨损宽度）—时间（或切削路程）曲线、二极管 $V-A$ 特性曲线、材料蠕变过程曲线、疲劳裂纹扩展速率曲线、世界成住坏灭过程等，初步探讨可基于（7）式或其坐标置换函数予以趋势性描述；这些曲线的显著特征是具有初期快速、中期线性平缓、末期急剧演化区域。在整体上， π 、 Ψ 形曲线可由（1）式的近似等效解析解（7）式给出，在此，蠕变过程、饱和过程、及饱和与蠕变混合过程可由同一方程描述，皆为同类过程的不同形式表现。

在现象描述层面，理论思想普适、原理方程简洁、参量自适应计算，为研究者所往。社会结构中的资产、权位、偶向，分别类如现象演化中的动能、势能、旋转能，是社会演化的基本要素，在一定条件下相互转化，形成人间世界大部分动态图景。科学探索及技术应用是重要导向，乃至蕴藉简约性的质朴隐喻和纲领性的深刻内涵，是理解及回归自然本底的有效途径；而诸多思量和考证，仅当其朝向人生庄严解脱及渐趣自性清净圆融时，才具有根本意义。放下我执及法执，超越贪欲和恐惧，安适于无生无灭。劫波的帷幕庄重朴直，等待的国度旷远旖旎；光辉的时刻刹那隐没，明丽的境界尽未来际；随缘的历经知机解因，深切的感怀清净开示。在足够久远的时间周期中，一切都是涨落流迁的；在足够广漠的空间尺度上，一切都是关联互应的；在足够虚空的背景介质里，一切都是自在宛然的。

对于金属或岩石部分典型蠕变过程曲线^[15-17]从材料开始变形、经线性拉伸到断裂点三阶段伸长率 λ 与时间 t 的关系，可用方程（7）式的 $\lambda(t)$ 形式予以趋势性描述， $\lambda(t)$ 形式的趋势性方程如下，方程曲线如图 12 所示。

$$\lambda = \lambda_0 + A_C \frac{\exp[\alpha_{C1}(t - t_0)] - \exp[-\alpha_{C2}(t - t_0)]}{2 \cosh[\alpha_{C3}(t - t_0)]} \quad (39)$$

这里 t_0 、 A_C 、 α_{C1} 、 α_{C2} 、 α_{C3} 为待定常量， $\lambda(t = t_0) = \lambda_0$ 。

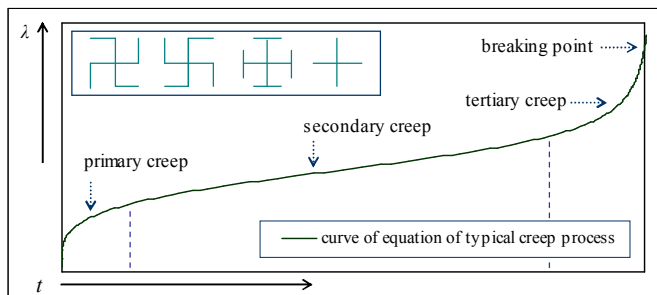


图 12 金属或岩石材料典型蠕变过程趋势方程曲线图
Fig. 12 The curve figure of tendency equation of typical creep process for metal or rock material

3 自适应连接方程参数计算的预置迭代方法

下面以方程(7)式为基础, 给出数据曲线间断区域自适应连接方程中参数确定的预置迭代方法, 其尤适于饱和过程曲线的自适应连接。对于部分蠕变过程曲线及(11)式的函数形式, 亦可参照下面步骤计算。对于较为复杂的曲线间断区域, 可予其虚拟始点及终点分段局部连接、坐标旋转变换等, 以及进行复合函数计算。

3.1 自适应连接方程的三个局部线性形式

根据方程(7)式

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]},$$

在 $x < x_0$ 区域, 当

$$\max[\exp[\alpha_1(x-x_0)], \exp[\alpha_3(x-x_0)]] \ll 1$$

时, 方程(7)式及其斜率 η_1 方程分别为

$$y = y_0 - A \exp[(\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0)], \quad (40)$$

$$\eta_1 = -A(\alpha_3 - \alpha_2) \exp[(\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0)]; \quad (41)$$

进而当 $\text{abs}[(\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0)] \ll 1$ 时, (40)、(41)式成为

$$y = y_0 - A[1 + (\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0)], \quad (42)$$

$$\eta_1 = -A(\alpha_3 - \alpha_2). \quad (43)$$

在 $x \approx x_0$ 邻近区域, 当

$$\max[\text{abs}[\alpha_1(x-x_0), \alpha_2(x-x_0), \alpha_3(x-x_0)]] \ll 1$$

时, 方程(7)式及其斜率 η_2 方程分别为

$$y = y_0 + 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_0), \quad (44)$$

$$\eta_2 = 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (45)$$

在 $x > x_0$ 区域, 当

$$\max[\exp[-\alpha_2(x-x_0)], \exp[-\alpha_3(x-x_0)]] \ll 1$$

时, 方程(7)式及其斜率 η_3 方程分别为

$$y = y_0 + A \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)], \quad (46)$$

$$\eta_3 = A(\alpha_1 - \alpha_3) \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)]; \quad (47)$$

进而当 $\text{abs}[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)] \ll 1$ 时, (46)、(47)式成为

$$y = y_0 + A[1 + (\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)], \quad (48)$$

$$\eta_3 = A(\alpha_1 - \alpha_3). \quad (49)$$

3.2 自适应连接方程参数计算的预置迭代方法

根据数据间断区域性质及(41)~(49)式得方程组

$$\begin{cases} k_S = \eta_1 = -A(\alpha_3 - \alpha_2) \exp[(\alpha_3 - \alpha_2)(x_S - x_0)], \\ \rho k_{SE} = \eta_2 = 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2), \\ k_E = \eta_3 = A(\alpha_1 - \alpha_3) \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x_E - x_0)]; \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} k_S = \eta_1 = -A(\alpha_3 - \alpha_2), \\ \rho k_{SE} = \eta_2 = 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2), \\ k_E = \eta_3 = A(\alpha_1 - \alpha_3); \end{cases} \quad (51)$$

式中 ρ 为连接方程曲线在平衡点的斜率倍数。

ρ 值一般可取在 0.5~3.0 之间; 其中对于缓慢变数据曲线阶跃间断区域, $\rho = 1.5 \sim 2.5$; 而当 k_S 、 k_{SE} 、 k_E

三个斜率值接近时, $\rho = 1.0$ 。与方程(50)式比较, (51)式适于缓慢变化情况。当拟合连续区域, 由始点以右点、终点以左点之间的连线、或对阶跃折线进行光滑处理时, ρk_{SE} 等于连线在中间点局部区域趋势变化的平均斜率。

根据方程(40)及(41)式、(46)及(47)、(50)式, 可预置 $x_0 = g_1(x_S + x_E)$ 、 $y_{0pv} = g_2(y_S + y_E)$, 得

$$\begin{cases} \alpha_3 - \alpha_2 = k_S(y_S - y_{0pv})^{-1}, \\ \alpha_1 - \alpha_3 = k_E(y_E - y_{0pv})^{-1}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2\rho k_{SE} A^{-1}; \end{cases} \quad (52)$$

将上式中的前二式分别代入方程(40)、(46)二式得

$$\begin{cases} y_S = y_0 - A\xi_S, \\ y_E = y_0 + A\xi_E; \end{cases}$$

式中

$$\begin{aligned} \xi_S &= \exp[k_S(x_S - x_0)(y_S - y_{0pv})^{-1}], \\ \xi_E &= \exp[k_E(x_E - x_0)(y_E - y_{0pv})^{-1}]. \end{aligned}$$

可解得 y_0 及 A 的初始试算值分别为

$$\begin{cases} y_{0p0} = y_S + \xi_S(y_E - y_S)(\xi_E + \xi_S)^{-1}, \\ A_{p0} = (y_E - y_S)(\xi_E + \xi_S)^{-1}. \end{cases} \quad (53)$$

将方程(53)式中 y_{0p0} 及 A_{p0} 作为 y_{0pv} 及 A 代入到方程

(52)式中, 解得 α_1 、 α_2 、 α_3 的第一次试算值分别为

$$\begin{cases} \alpha_{1p1} = \rho k_{SE} A_{p0}^{-1} + 0.5[R_E + R_S], \\ \alpha_{2p1} = \rho k_{SE} A_{p0}^{-1} - 0.5[R_E + R_S], \\ \alpha_{3p1} = \rho k_{SE} A_{p0}^{-1} - 0.5[R_E - R_S], \end{cases} \quad (54)$$

式中 $R_E = k_E(y_E - y_{0p0})^{-1}$, $R_S = k_S(y_S - y_{0p0})^{-1}$ 。

对于缓慢变化曲线, 根据方程(42)、(48)、(51)三式, 可直接预置 $x_0 = g_1(x_S + x_E)$, 不需再预置 y_{0pv} ; 得

$$\begin{cases} y_S = y_0 - A + k_S(x_S - x_0), \\ y_E = y_0 + A + k_E(x_E - x_0); \end{cases}$$

故解得 y_0 及 A 的初始试算值分别为

$$\begin{cases} y_{0p0} = 0.5[y_S + y_E - k_S(x_S - x_0) - k_E(x_E - x_0)], \\ A_{p0} = 0.5[y_E - y_S + k_S(x_S - x_0) - k_E(x_E - x_0)]. \end{cases} \quad (55)$$

将方程(55)式的 A_{p0} 作为 A 代入到方程(51)式中, 解得

α_1 、 α_2 、 α_3 的第一次试算值分别为

$$\begin{cases} \alpha_{1p1} = 0.5A_{p0}^{-1}[2\rho k_{SE} - k_S + k_E], \\ \alpha_{2p1} = 0.5A_{p0}^{-1}[2\rho k_{SE} + k_S - k_E], \\ \alpha_{3p1} = 0.5A_{p0}^{-1}[2\rho k_{SE} - k_S - k_E]. \end{cases} \quad (56)$$

在始点 $P_S(x_S, y_S)$ 及终点 $P_E(x_E, y_E)$ 位置, 根据方程(7)式及(54)式或缓慢变化曲线时的(56)式得

$$\begin{cases} y_S = y_0 + A\phi_S, \\ y_E = y_0 + A\phi_E, \end{cases}$$

式中

$$\varphi_S = \frac{\exp[\alpha_{1p1}(x_S - x_0)] - \exp[-\alpha_{2p1}(x_S - x_0)]}{2 \cosh[\alpha_{3p1}(x_S - x_0)]},$$

$$\varphi_E = \frac{\exp[\alpha_{1p1}(x_E - x_0)] - \exp[-\alpha_{2p1}(x_E - x_0)]}{2 \cosh[\alpha_{3p1}(x_E - x_0)]}.$$

可解得 y_0 及 A 的第一次试算值分别为

$$\begin{cases} y_{0p1} = [y_E \varphi_S - y_S \varphi_E][\varphi_E - \varphi_S]^{-1}, \\ A_{p1} = [y_E - y_S][\varphi_E - \varphi_S]^{-1}. \end{cases} \quad (57)$$

将方程 (57) 式的 y_{0p1} 及 A_{p1} 作为 y_{0p0} 及 A_{p0} 代入到方程 (54) 式或缓慢变化曲线时的 (56) 式, 再运算到 (57) 式, 得第二次试算参数值; 如此迭代运算 J 次后, 得诸稳定参数 α_{1pJ} 、 α_{2pJ} 、 α_{3pJ} 、 y_{0pJ} 、 A_{pJ} , 即得数据曲线间断区域自适应连接方程 (7) 式的具体形式。

当 $k_S + k_E \neq 0$ 时, 可直接取 $y_{0p0} = g_2[y_S + y_E]$ 作为初始试算值, 有

$$x_{0p1} = [2y_{0p0} + k_S x_S + k_E x_E - y_S - y_E][k_S + k_E]^{-1}. \quad (58)$$

当 $k_S + k_E = 0$ 且 $k_S \neq 0$ 时, 可以 $A_{p0} = g_3[y_E - y_S]$ 为初始试算值, 有

$$x_{0p1} = 0.5[y_E - y_S - 2A_{p0} + k_S(x_S + x_E)]k_S^{-1}. \quad (59)$$

当 $k_S = k_E = 0$ 时, 由方程 (53)、(54) 或 (55)、(56) 式可直接得到方程 (7) 式的特殊形式双曲正切方程

$$y = y_0 + A \tanh[\alpha(x - x_0)], \quad x_0 = 0.5[x_S + x_E]$$

此式中

$$\begin{aligned} A_{p0} &= 0.5[y_E - y_S], \quad \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \rho k_{SE} A_{p0}^{-1}, \\ \varphi_S &= \tanh[\alpha(x_S - x_0)], \quad \varphi_E = \tanh[\alpha(x_E - x_0)], \\ \varphi_S &= -\varphi_E, \quad y_0 = 0.5[y_S + y_E], \quad A = 0.5[y_E - y_S]\varphi_E^{-1}. \end{aligned}$$

将方程 (58) 式 x_{0p1} 作为初始试算值, 或调节 g_1 、 g_2 改变 (7) 式中预置平衡点 (x_{0pv}, y_{0pv}) 位置, 及以连接曲线长度作为约束条件, 可得到更好的连接曲线形态。当以 k_S 和 k_E 代替 $P_S(x_S, y_S)$ 和 $P_E(x_E, y_E)$ 作为参数试算值主指标时, 会减少连接曲线在延伸段与原曲线的偏差。

对部分现象, 当待定参量数目略大于条件数目时, 可经预置迭代方法自适应求解, 融合毛估与准确为一体。

在计算中, 需比较连接方程在 J 次与 $J+1$ 次或在起始点 η_1 与 k_S 及结束点 η_3 与 k_E 的相对误差。其中对于数据曲线阶跃间断区域, 在 $J=1$ 时得到的自适应连接方程即可基本满足连接要求, 一次试算确定方程具体形式。

4 自适应连接方程实例计算

图 13 所示二段数据曲线间断区域, 坐标数据分别为: 始点 $P_a(30, 6.0)$, 左邻域一点 $P_a^-(27, 6.6)$; 终点 $P_b(50, 21.40)$, 右邻域一点 $P_b^+(53, 21.88)$; 始点 $P_c(70, 24.60)$, 左邻域一点 $P_c^-(67, 24.12)$; 终点 $P_d(85, 9.55)$, 右邻域一点 $P_d^+(88, 10.12)$ 。

运算过程直接取 $x_0 = 0.5[x_S + x_E]$, $J=1$, $\rho=2.5$ 。

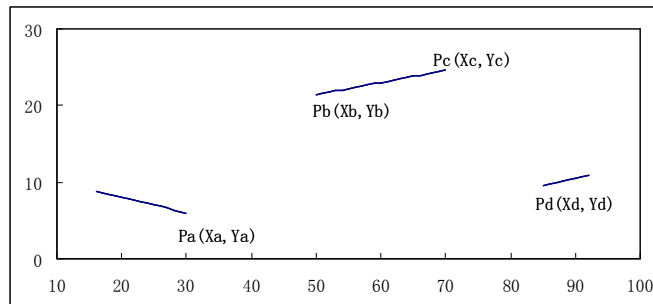


图 13 数据曲线间断区域图

Fig. 13 The figure of discontinuous areas in data curve

在 $P_a \sim P_b$ 间断区域, 依据曲线间断区域性质得

$$k_S = -0.20, \quad k_E = 0.16, \quad k_{SE} = 0.77, \quad x_0 = 40;$$

其属于缓慢变化曲线, 可直接根据方程 (55)、(56)、(57) 式依次求得

$$y_{0p0} = 11.90, \quad A_{p0} = 7.90;$$

$$\alpha_{1p1} = 0.2665, \quad \alpha_{2p1} = 0.2209, \quad \alpha_{3p1} = 0.2462;$$

$$y_{0p1} = 11.9754, \quad A_{p1} = 7.8125;$$

即在 $P_a \sim P_b$ 间断区域的自适应连接方程为

$$y = 11.9754 + 7.8125 \times \frac{\exp[0.2665(x - 40)] - \exp[-0.2209(x - 40)]}{2 \cosh[0.2462(x - 40)]}. \quad (60)$$

同样计算得在 $P_c \sim P_d$ 间断区域的自适应连接方程为

$$y = 16.9792 - 8.9476 \times \frac{\exp[0.2821(x - 77.5)] - \exp[-0.2855(x - 77.5)]}{2 \cosh[0.3036(x - 77.5)]}. \quad (61)$$

当由方程 (53)、(54)、(57) 式计算 $P_a \sim P_b$ 间断区域时, 预置 $y_{0pv} = 0.5(y_S + y_E)$, 得方程 (7) 式诸参量

$$y_{0p0} = 11.8308, \quad A_{p0} = 7.5991;$$

$$\alpha_{1p1} = 0.2736, \quad \alpha_{2p1} = 0.2231, \quad \alpha_{3p1} = 0.2574;$$

$$y_{0p1} = 11.6837, \quad A_{p1} = 8.1124.$$

连接方程 (60)、(61) 二式在数据间断区域的连接曲线 (红色) 如图 14 所示。

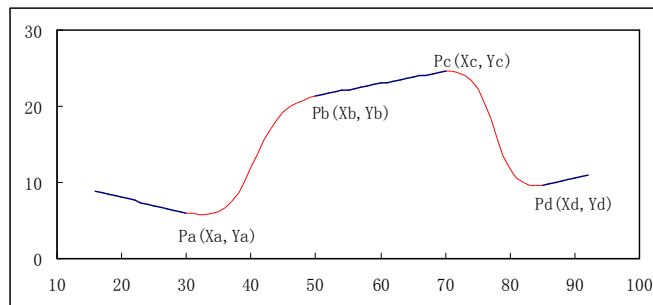


图 14 数据间断区域自适应连接方程曲线图

— 数据段曲线 — 连接方程曲线

Fig. 14 The curves figure of adaptive connection equations in discontinuous areas of data

— curves of data segments — curves of adaptive connection equations

当运算取 $J = 3$ 时, 根据方程 (55)、(56)、(57) 式得在 $P_a \sim P_b$ 间断区域的自适应连接方程为 (62) 式, 其曲线如图 15 所示, 表明 $J = 3$ 时曲线 (绿色) 与 $J = 1$ 时曲线 (红色) 基本重合, 相对误差绝对值小于 0.7%。对于 $y_E > y_S$ 与 $y_E < y_S$, 可预置 x_{0pv} 、 y_{0pv} 皆分别偏向 k_S 和 k_E 二者中低值与高值的曲线端, 以获得较好曲线形态。

$$y = 11.9546 + 7.8030 \times \frac{\exp[0.2698(x - 40)] - \exp[-0.2236(x - 40)]}{2 \cosh[0.2493(x - 40)]} \quad (62)$$

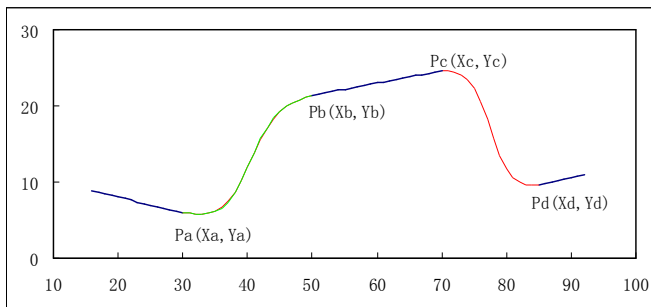


图 15 $P_a \sim P_b$ 间断区域自适应连接方程曲线对比图

— 方程曲线 ($J = 1$) — 方程曲线 ($J = 3$)

Fig. 15 The comparison result figure of curves between adaptive connection equations when $J = 1$ and $J = 3$ in discontinuous area from point P_a to P_b

— curve of the equation when $J = 1$ which covered by curve when $J = 3$
— curve of the equation when $J = 3$

5 结论

本文通过对非线性动力学方程近似等效解析解或其扩展形式及数据曲线间断区域性质的分析, 给出了自适应连接方程形式及其参数计算方法, 实例计算表明连接效果很好, 对自然现象中部分饱和过程及蠕变过程在趋势层面具有较好的适应性; 文中给出并分析了非线性 Newton 动力学方程、非线性 RLCN 串联电路方程、数据曲线或部分连续函数的扩展型双曲正切级数表示形式、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程、稳定核素比结合能方程等方面相关内容。

本文给出的分析计算及预置迭代方法虽然较为简洁, 但仍有局限性, 仅供自然科学及工程技术中数据曲线间断区域或等效间断区域的自适应连接、时间序列与饱和及蠕变过程非线性动力学方程近似等效解析解分析及函数构造、趋势极限与细节波动复合过程描述、数据主曲线优化与回归分析相融合等方向深入研究时参考。

深入的非线性动力学方程近似等效解析解研究表明, 未来宜建立一套与现有 Newton 微积分理论相并行的数学理论框架, 在 Newton 微积分理论中没有解析解的演化方程描述, 部分地在新的理论中方程则直接有解析解, 实现多层次开放式的激励、演化、守恒方程阐释, 虽然根本上这样的理论仍是近似性、趋势性及过渡性的体系。

参考文献 (References):

[1] 阎坤. 60年来大气中二氧化碳浓度数据的趋势方程研究[J]. 地球物理学进展, 2009, 24(5):1665~1670.
YAN Kun. Research on tendency equation about the concentration data of carbon dioxide in the atmosphere over the past 60 years[J]. Progress in Geophys(in Chinese), 2009,24(5):1665~1670.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/co2concentration-pdf.pdf>

[2] 朱春钢, 王仁宏. 空间曲线几何 Hermite 插值的 B 样条方法[J]. 软件学报, 2005, 16 (04) :634~642.
ZHU Chun-gang, WANG Ren-hong. Geometric Hermite interpolation for space curves by B-spline[J]. Journal of Software, 2005, 16(04): 634~642.

[3] Gerald Farin. Class A Bézier Curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(7): 573~581.

[4] WEI Xiang-jiang, TIE Jun-cui, QIANG Cheng, et al. Design of arbitrarily shaped concentrators based on conformally optical transformation of nonuniform rational B-spline surfaces[J]. Applied Physics Letters, 2008, 92(26): 264101(3 pages).

[5] 阎坤. 天体运行轨道的背景介质理论导引与自相似分形测度计算的分维微积分基础[J]. 地球物理学进展, 2007, 22 (2) : 451~462.
YAN Kun. Introduction on background medium theory about celestial body motion orbit and foundation of fractional-dimension calculus about self-similar fractal measure calculation[J]. Progress in Geophys (in Chinese with abstract in English), 2007, 22(2): 451~462.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/celestialandmaths-pdf.pdf>

[6] 阎坤. 关于对无穷予以虚数形式标记的初步注释[R]. 西安: 西安现代非线性科学应用研究所, 2009-03-18.
YAN Kun. Primary annotation of symbol basing on imaginary form about infinity[R]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 18 March 2009.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/spirit-pdf.pdf>

[7] A J Zambano, H Oguchi, I Takeuchi, et al. Dependence of exchange coupling interaction on micromagnetic constants in hard/soft magnetic bilayer systems[J]. Physical Review B, 2007, 75(14):144429(7 pages).

[8] Einstein A, Stern O. Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt (Some arguments in support of the assumption of molecular vibration at the absolute zero) [J]. Annalen der Physik, 1913, 40: 551~560.

[9] 于长丰. 相位力学原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
YU Chang-feng. Principles of Phase[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007.

[10] <http://www.nndc.bnl.gov/chart/index.jsp>
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_elements_by_stability_of_isotopes
阎坤. 地球空间稳定核素的趋势分析方程与物质的超光速运动规律[J]. 地球物理学进展, 2006, 21 (1) :38~47.
YAN Kun. The tendency analytical equations of stable nuclides and the superluminal velocity motion laws of matter in geospace[J]. Progress in Geophysics (in Chinese with abstract in English), 2006, 21(1):38~47.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/vacuumenergy-pdf.pdf>

[11] XIE Rui-hua, GONG Jiang-bin. Simple three-parameter model potential for diatomic systems: from weakly and strongly bound molecules to metastable molecular ions[J]. Phys Rev Lett, 2005, 95(26): 263202(4 pages).

[12] 孙卫国, 樊群超, 任维义. 双原子分子离解能的精确研究[J]. 中国科学(G辑), 2007, 37 (5) : 590~599.
SUN Wei-guo, FAN Qun-chao, REN Wei-yi. Accurate studies on dissociation energies of diatomic molecules[J]. Science in China (Series G), 2007, 50(5): 611~621.

[13] Julien Toulouse, C J Umrigar. Full optimization of Jastrow-Slater wave functions with application to the first-row atoms and homonuclear diatomic molecules[J]. J Chem Phys, 2008, 128(17): 174101(14 pages).

[14] <http://jpkc.nefu.edu.cn/csx/jpkc/doc/jiaoran/capter7.doc>

[15] 石德珂, 金志浩. 材料力学性能[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
SHI De-ke, JIN Zhi-hao. Mechanical Behavior of Materials[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1998.

[16] 孙钧. 岩石流变力学及其工程应用研究的若干进展[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26 (6) :1081~1106.
SUN Jun. Rock rheological mechanics and its advance in engineering applications[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007,26(6):1081~1106.

[17] Gerya Taras V, Yuen David A. Robust characteristics method for modeling multiphase visco-elasto-plastic thermo-mechanical problems[J]. Physics of The Earth and Planetary Interiors, 2007, 163(4): 83~105.

研究报告[Research report]

关于连接方程的简略注释

阎坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘要: 本文给出了连接方程若干性质及应用的简略注释, 讨论了连接方程是一非线性动力学方程的近似等效解析解的分析方法, 进而预言了一个基于非线性动力学方程的电路元件 - 电存器 (nonlinstor), 其为一种深化型电容器的电路器件, 分析了 RLCN 串联电路微分方程的性质; 依据连接方程的非线性动力学方程近似形式, 给出了粒子统计分布趋势性方程及其若干条件解, 构建了数据曲线或部分连续函数的一种扩展型双曲正切级数近似表示形式, 讨论了数据库理论构架 (此构架由基础数据库、趋势性方程、解析数据库构成) 的一种简洁模式, 建立了美国年度能源消费量与 GDP 关系方程及英国年度人口数量与 GDP 关系方程, 并计算预测了美国年度能源消费极限值与英国年度人口极限值; 随后探讨了岩石及单晶高温材料的蠕变过程曲线、半导体分立器件 $V-A$ 特性曲线、超导材料电阻 R (或电阻率 ρ) - 绝对温度 T 曲线方程, 双晶 Josephson 结直流 $I-U$ 特性曲线及 Shapiro 台阶电流阶跃幅值曲线的趋势拟合方程, 机械系统或伺服系统摩擦力 - 速度特性曲线 (包括 Coulomb 摩擦、Stribeck 摩擦、黏性摩擦、摩擦迟滞及反常摩擦迟滞效应) 的趋势拟合方程等; 最后讨论了连接方程在数据拟合及长程预测方面的局限性。

关键词: 连接方程, 数据曲线, 非线性动力学方程, 近似等效解析解, 饱和, 蠕变, 电存器, 反常摩擦迟滞

Brief annotation of the connection equation

YAN Kun

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, the brief annotation of the properties and applications of the connection equation are given. An analytical method of the connection equation as an approximate equivalent analytical solution of the nonlinear dynamics equations is discussed, and then a new electronic circuit element (nonlinstor) with the deepening charge-controlled capacitor properties based on the form of the nonlinear differential equation is predicted, and the nonlinear differential equation for a RLCN series circuit is also analyzed. According to the approximate form of the nonlinear dynamics equation of the connection equation, the tendency equation and its conditional solutions of the statistical distributions of the particles are given, an approximate expression of extended hyperbolic tangent series for the data curve or the partial continuous functions is constructed, a concise model of the database theoretical framework (this framework to be made up of the foundation database, the tendency equation, and the analytic database) is discussed, the equation of relationship between the total annual energy consumption with the annual GDP in the United States, and the equation of relationship between the annual population with the annual GDP in the United Kingdom are established, and the limit values of the total annual energy consumption in the United States and the annual population in the United Kingdom are calculated and predicted. Subsequently, the tendency fitting equations of the curves are explored, which included the creep process curve of the rock and the single-crystal superalloy, the Volt-Ampere characteristic curve of the discrete semiconductor device, the resistance (or resistivity) - absolute temperature curve of the superconducting material, the direct current $I-U$ characteristic curve of the bicrystal Josephson junction, and the current step amplitude of Shapiro steps, the friction-speed characteristic curve (that included the stages of Coulomb friction, Stribeck friction, viscous friction, friction hysteresis, and anomalous friction hysteresis effect) in mechanical system or servo system, etc. At the end, the limitations of the connection equation in the data fitting and long-range forecasting are discussed.

Keywords connection equation, shape of curve, nonlinear dynamics equation, approximate equivalent analytical solution, saturation process, creep process, nonlinstor, anomalous friction hysteresis effect

<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/ConnectionEquation-pdf.pdf>