本文框架内容发表在：
阎坤. 宇宙分维构造及其数学基础[J]. 地球物理学进展，2004，19(3)：709～716.
Yan Kun. Fractional dimension structure of Cosmos and its mathematical foundations[J]. Progress in Geophysics(in Chinese)，2004，19(3)：709～716.

# 宇宙分维构造与自相似分形测度

阎 坤
（西安现代非线性科学应用研究所，西安 710061）

**摘 要：** 探讨了宇宙分维构造的形式，以幂函数为例初步给出了分维微积分及自相似分形测度计算方程，包括幂函数的分维导数及分维微积分表述形式、分形测度的非整数阶微积分定义及基于分维微积分与分数阶微积分的自相似分形测度趋势性计算方程。作为诠释，探讨了原子核内中子与质子的趋势关系方程，以及其周期解和原子序数极限值。

**关键词：** 宇宙，分维构造，自相似分形测度，非整数阶微积分，分维微积分，分数阶微积分，原子序数极限

# Fractional dimension structure of Cosmos and measure of self-similar fractal

YAN Kun
(Xi’an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi’an 710061, China)

**Abstract** Fractional dimension structure of the Cosmos are explored, and as power function as an example, its expressions of fractional dimension differential and calculus, non-integral order calculus definitions of fractal measure as well as the tendency computational equation of self-similar fractal measure based on the fractional dimension calculus and fractional order calculus are given tentatively. As annotation, an equation of the relation between neutrons and protons in nuclei and its periodical solutions as well as atomic number limit are discussed.

**Keywords** Cosmos, fractional dimension structure, self-similar fractal measure, non-integral order calculus, fractional dimension calculus, fractional order calculus, atomic number limit

## 0 引 言

我们存在于我们的世界中。我们对其中部分自然现象进行观察总结，得出一些守恒规律，表述为定律或原理形式。而我们的认识途径亦总是从较为模糊的一般原则开始，经由定律、原理及数理逻辑推演，得出新的较为确定的一般原则，然后在新的层面重新理解自然现象。

对于我们的世界，已取得了许多研究成果，但大部分领域的原则仍是全然未知的。

目前一个引人注意的方向是 M 理论[1]，其较偏重于数学构造，试图将粒子物理、引力理论、量子场论等物理学基础理论统一在 11 维规整空间（其中含 1 维时间）中给予描述。该理论主要方向之一是协调广义相对论与量子场论之间的关系，在宇宙膨胀前提下的宇宙较早时刻、较小距离上建立量子引力描述形式，并已获得了诸多研究结论，原来的几种弦理论成为 M 理论的自然分支部分，并将直接面向有关真空构造、粒子物理学常数、宇宙学常数的分析计算等方面。当递推到该理论模式下的宇宙最早时刻、最小距离上时，理论本身遇到了较大困难。这一困难不只是在物理学上，首先在数学上即对无穷结构缺少解析描述。即便目前可以通过数学方法初步给出部分无穷结构的解析描述，但理论的根本困难仍然存在，诸如宇宙膨胀的约束、物质的分布、宇宙的边界问题等。其中有些问题对于 M 理论是不能提出的，但同时也表明理论基础本身具有根本性的局限。

今天，对于我们所生存的世界，宇宙的结构、演化、背景等问题仍是较为重要的研究内容。我们的认识仍徘徊在宇宙是平坦的还是弯曲的、是膨胀的还是收缩的（或是振荡的）、是有界无限的还是无边无际的。不断获得的新的观测数据亦在不断地改变着我们甚至在不久前才重新确立的观念。

在参照物理学已有认识结论的基础上，诸如 Newton 引力定律及 Archimedes 浮力定律、Clausius 热力学第二定律、Pauli 不相容原理、Einstein 引力理论、M 理论及宇宙学理论等，我们可以初步确立关于其物质存在状态及演化的三条自然原则：

（1）质量密度原则：物体总在与背景介质交换物质，质量密度趋于与背景介质相同；

（2）能量分布原则：物体总在与背景介质交换能量，能量分布趋于与背景介质均衡；

（3）状态构造原则：物体总在与背景介质交换状态，状态构造趋于与背景介质互补。

其中相对于物质系统的子系统，则系统为背景介质；对于系统，则系统的环境为背景介质。

本文根据上述三条原则及分形理论，将对宇宙分维构造作出尝试性的探讨描述，继而给出分维微积分与分数阶微积分为基础的自相似分形测度，并通过原子核内中子与质子间的趋势关系方程，探讨局部的周期性构造形成较大尺度层面上的周期性构造规律。

**作者简介** 阎坤，男，1962 年 10 月生，吉林榆树人，1983 年毕业于长春地质学院，目前主要从事非线性科学及天体物理研究。( Email: yankun@nature.ac.cn )

## 1 宇宙局部物质的聚集坍塌与爆炸膨胀

由质量密度原则，物质具有不断聚集、坍塌的性质，形成物质聚集系统（其类似黑洞，但结构性质有所不同）；由能量分布原则，物质具有离散、膨胀的性质，形成物质弥漫系统；由状态构造原则，物质有与背景介质相互适应、状态互补的性质，不断相互作用，形成协调的演化过程。

由于物质不断聚集坍塌，使得物质聚集系统质量密度越来越大，能量越来越高，此过程表现为质量密度原则起主导作用，能量分布原则起约束作用，宏观上亦表现为逆热力学第二定律过程；由于物质不断地进行聚集坍塌使得聚集系统形成与背景介质相比具有更高的能量状态。当其与背景介质相比超过一临界状态后，聚集系统即发生爆炸，随后即进入膨胀过程，系统趋于向质量密度原则与能量分布原则平衡的方向演化，此过程表现为能量分布原则起主导作用，质量密度原则起约束作用，宏观上亦表现为逆 Newton 引力定律过程。爆炸膨胀形成的弥漫离散物质又为在相邻位置上的物质聚集提供了物质来源。

## 2 宇宙分维构造

宇宙分维构造的模式如下：

（1）动态的周期性：宇宙的局部物质处于动态的聚集坍塌、爆炸膨胀的周期性演化过程；

（2）协调的点阵性：聚集坍塌的物质来源为相邻位置上爆炸膨胀后的离散物质，聚集坍塌超过临界状态后形成的爆炸膨胀又为新的相邻位置上的物质聚集坍塌提供了物质来源，由此诸多物质聚集、能量交换、状态协调的节点形成了动态的点阵网络构造；

（3）分维的层次性：这一点阵网络构造又构成了更大层次上点阵网络构造的一微小组成部分。

我们的世界即处在其中一层次上物质聚集坍塌形成的爆炸后膨胀过程中。

上述模型表明，在 M 理论中所描述的 1 维弦联系二个 10 维平行宇宙的模型，可近似为上述宇宙模型中点阵网络构造的一对不完整微小节点。同时，上述宇宙模型还有助于理解微类星体的喷流现象。

这里给出的宇宙描述在局部一层次上与 Newton、Einstein 的模式相似，但坍塌不会无限制地进行下去。从极为细微的层面到更为广阔的区域，本宇宙描述与 Siddhartha 的思想接近，具有无穷层面的分维构造。

上述宇宙模型在建立过程中，并未考虑 M 理论的宇宙模型，因为初旨是试图构造一个与 M 理论无关的宇宙理论。M 理论是一基于数学构造的物理理论，上述理论则是基于物质构造的物理理论。M 理论的主要数学描述为矩阵、拓扑方法，上述理论的主要数学描述则为分维微积分方法。由于拓扑与分维之间存在内在的数学关系，或许进一步的工作可以证明二方法在数学上的联系或物理上某层面的等效性质。

## 3 宇宙的演化

根据上述结构，宇宙在一确定层次上的局部物质聚集坍塌过程表述为：

（1）聚集坍塌的物质来源为临近位置上物质聚集系统爆炸膨胀形成的离散物质。

（2）各中心附近的物质向各自中心运动，各中心则向附近新的层次的物质聚集中心运动；此二过程或以先后次序进行，或同时进行。

（3）一般地，物质向附近的聚集中心运动，其运动方向与所将聚集的中心的运动方向可能是相同的，也可能是相反的。

（4）数学操作的物理属性为物质质量的积累及其随时间的变化；一般地，质量积累是聚集坍塌的基础；当聚集系统质量及其密度超过临界状态后，聚集坍塌则主要随时间按周期性间歇进行；在间歇期内主要进行状态及能量在不同层次间的协调、重新分布演化(如局部的主星序阶段)，直至聚集系统能量分布与背景介质相比超过临界状态止；随后爆炸发生，开始进入膨胀过程。

爆炸膨胀过程表述为：

（1）物质离开原来聚集的中心向附近运动，并成为新的物质展开中心展开其所聚集的物质。

（2）新的物质展开中心离开原来层次的物质展开中心时的运动方向可以与原中心的运动方向是相同的，也可以是相反的。

（3）数学操作的物理属性为能量均衡分布及其随时间的变化；一般地，能量均衡分布是爆炸膨胀的基础，爆炸膨胀过程随时间按周期性间歇进行，在间歇期内主要进行状态及质量密度在不同层次间的相互协调、重新分布演化，当系统膨胀至能量分布原则与质量密度均衡原则相平衡后，系统的爆炸膨胀即已接近结束，其中局部较小规模的爆炸膨胀则还会持续进行。

（4）爆炸膨胀为附近位置上正在进行的、或将进行的物质聚集坍塌提供了物质来源。

物质聚集坍塌过程包含着若干局部的较小规模的聚集坍塌，还会伴随着一些局部物质团的爆炸膨胀现象发生；物质爆炸膨胀过程则包含着若干局部的较小规模的爆炸膨胀，也还会伴随着一些局部物质团的聚集坍塌现象发生。

根据宇宙的状态描述，宇宙的结构及演化在聚集坍塌、爆炸膨胀及诸层次点阵网络构成方面具有分维性质，分维微积分数学理论将为解决此问题提供研究参考方向。

宇宙局部物质的聚集坍塌、爆炸膨胀演化过程需根据有关数据资料计算。在某一尺度层面平坦构造的性质，在更大的尺度层面上可能是弯曲构造的。在某一尺度上各向异性或区域异性，在更高尺度上可能又各向同性，或局域同性。宇宙局部同性或异性具有尺度、层面上的意义。某一局部层面的同性可能为较高层面异性的构成部分，而这一层面的异性又可能为更高层面同性的构成部分。

由于人们仅能观察到一部分演化过程资料，同时

附近相邻位置上的物质演化状态影响着我们所观察的这部分宇宙的性质，所以其根本性质是动态的。

## 4 宇宙的背景

向自然现象学习，我们可以得出这样一个结论，即自然科学没有枝节性问题。透过我们已初步认知的学问，我们的分析最终还会遇到新的问题，或又回到我们最初试图通过绕道以回避的未解决问题上。通过分析展望，可以初步确定目前自然科学其中的二个根本方向为：一是将无穷转化表达为有限，二是研究探索真空的背景（其取得根本进展的标志为解析开 Newton 引力常数与 Planck 常数）。

物质世界对我们呈现一些基本原则，但并不是原则支配物质存在状态，而是物质本身具有原则特征。虽然物质世界表现出广延性及持续性，但不是物质在空间、时间里演化，而是物质本身具有空间、时间属性，物质的这一属性同与背景介质的相互作用相联系，背景介质又存在于更深一层背景介质中。但对于我们人类，有一相对终极背景介质，一纯净的光的世界。

部分背景介质自然起伏脱离背景主体后即成为生物的意识部分，波动起伏的固化集结形成了我们所感知的及有待感知的各个规模、层面上的物质世界，在意识与固化物质间各个程度的聚集状态形成了我们自身及其它生物的物质构成部分。这一纯净的光不同于我们所认识的物理光的性质，其乃为更细微得多的层面。背景介质波动起伏的脱离与固化是已有意识及物质与背景介质相互作用的结果。由于共同的背景基础，意识、生物物质、物质间能够进行生成、消解、转化。

在此终极背景层次上，物质、生物物质、意识是相通的，具有共同的基础层面。这使我们的意识通过体验、逻辑等途径或方式，能够对生命及物质世界有所了解及作用，乃至能够进一步加深对我们自身及所生存世界的认识理解，诸如在逻辑上采用线性的或非线性的方法。在某一逻辑体系的非线性描述近似解将仅是另一逻辑体系的线性描述解析极限解，而我们业已获得的及将获得的逻辑描述在现象界多具有与其相对应的状态参量。

## 5 深入研究的方向

以上对宇宙分维构造进行了较为简略的定性描述，深入的工作则需要采用非整数阶微积分及分形测度理论对宇宙分维构造进行数学方面的分析计算，其部分地表现为将无穷转化为有限的过程。

自 Mandelbort 分形理论建立以来，人们已将其应用到各相关领域，尤其是复杂动力系统的物理量分析方面[2~6]。人们也一直关注着非整数阶微积分及分形测度方面的研究进展，由于没有建立非整数阶导数的严格定义，人们采用将 Newton 导数适当外延并辅之与特种函数或级数相结合的方法给出一些分数阶微积分公式，典型的辅助方法有 $\Gamma$ 函数、Taylor 级数展开等，这些公式是直接由 Newton 导数、$\Gamma$ 函数、Euler 公式及 Dirichlet 的 $n$ 次积分外推默认的[7,8]。虽然分数阶导数是整数阶导数的直接外推，但与整数阶导数的显著差别是，分数阶导数具有显著的非局域性。这其中，整数阶微积分是在分数阶微积分的基础层面，而不是在逻辑循环返回的特例层面。

如何构造仍然能够保留整数阶导数局域属性的非整数阶导数理论是有待长期深入探讨的方向。

在分形测度计算方面，目前人们主要采用覆盖迭代方法[9~11]计算其 Hausdorff 测度。在规整空间里覆盖迭代方法较为经典有效，但应用在分形测度方面则计算步骤较为繁杂，计算对象较为具体简单，计算结果取值范围较大，计算方法不具有普适性。

关于分数阶微积分，已经有诸多论著；为有别于分数阶微积分的表述，将下面的趋势性非规整微积分定为分维微积分，在保留整数阶微积分的局域属性的情况下，给出诸如幂函数 $f(x)=x^k(k>0)$ 的分维微积分表述形式，通过确定分形测度的非整数阶阶微积分形式定义，进而基于幂函数的分维微积分及分数阶微积分推导出自相似分形测度的趋势性计算方程，计算几种典型自相似分形的测度，初步建立非整数阶微积分与分形测度计算之间的联系。

下面关于分维微积分的讨论远偏离于传统的严谨数学论证表述，仅仅作为一种初步约定的趋势性运算，不具有根本性的解析基础意义，只是在真正的非整数阶微积分理论尚未建立前，试图于趋势层面探讨一种可能的、仍具有导数局域性的符号约定表述途径，及为幂函数的分数阶导数计算提供一趋势性估计方法。

## 6 幂函数的分维导数形式

一集合初始测度 $M_0$ 于标度 $\varepsilon$ 层次上在函数 $e(\varepsilon)$ 激励下，集合单位 $m(\varepsilon)$ 的数量 $N$（为自然数，广义上取为实数）与 $\varepsilon$ 之比正比于 $N$ 相对 $\varepsilon$ 的变化率，即

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varepsilon}+\alpha_\varepsilon(\varepsilon)\frac{N}{\varepsilon}=e(\varepsilon)\ ,\qquad N(\varepsilon=1)=1$$

式中比例函数 $\alpha_\varepsilon(\varepsilon)$ 即为集合生成相对维数函数。当

$$e(\varepsilon)=0\ 、\ \alpha_\varepsilon(\varepsilon)=\alpha_0$$

相对 $\varepsilon$ 为常量时，分维数 $\alpha_\varepsilon(\varepsilon)$ 亦为 Mandelbrot 分形定义中的相似方式。

取在［$a$ , $b$］区间点 $x\in(a,b)$ 处邻域的函数分别为 $f_1(x-k_1\Delta x)$、$f_2(x+k_2\Delta x)$，这里 $k_1$、$k_2$ 为有限正实数，$\Delta x>0$；可定义二函数在点 $x$ 处的导数

$$\begin{aligned}\mathrm{D}f_{1,2}(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{1,2}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_{1,2}(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_2(x+k_2\Delta x)-f_1(x-k_1\Delta x)}{(k_1+k_2)\Delta x}\end{aligned}\quad ；（1）$$

这里函数 $f_1(x-k_1\Delta x)$ 与 $f_2(x+k_2\Delta x)$ 在点 $x$ 处可以皆不连续。特别地当二函数在点 $x$ 处具有相同函数形式并连续，且 $k_1=0$、$k_2=1$ 时，方程（1）式即化简为 Newton 导数。当二函数在点 $x$ 处具有相同函数形式并连续，且 $k_1=k_2=1$ 时，方程（1）式成为

$$\mathrm{D}\,f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}\text{；}$$

而其规整积分形式则与同是规整积分的 Newton 积分具有相同表述形式；得函数 $f(x)$ 在点 $x\in(a,b)$ 处的分维导数 $\mathrm{D}^{\alpha}\ f(x)$（$0\le\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\le1$）具有性质

$$\mathrm{D}^{\alpha}\ f(x)=\begin{cases}\mathrm{D}^{\alpha_1}\ f(x), & \alpha=\alpha_1\\ \mathrm{D}^{\alpha_2}\ f(x), & \alpha=\alpha_2\end{cases}\qquad（2）$$

下面的分维导数位置假设，不能跨越整数阶讨论，只限定在相邻整数阶导数之间，是一种对类如幂函数非整数阶导数形式从局域性基础假设到局域性推演结果的趋势性运算约定，是简略的分段趋势性计算估计。

**分维导数位置假设**：分维导数 $\mathrm{D}^{\alpha}\ f(x)$（如果存在）处于从 $\mathrm{D}^{\alpha_1}\ f(x)$ 到 $\mathrm{D}^{\alpha_2}\ f(x)$ 之间，通过方程

$$\mathrm{D}^{\alpha_1}\ f(x)-\mathrm{D}^{\alpha_2}\ f(x)=0\text{，}0\le\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\le1\qquad（3）$$

的根 $x_k$（如果存在）所在位置 $(x_k,\mathrm{D}^{\alpha_1}\ f(x)(x=x_k))$，即在根 $x_k$ 所在位置有

$$\mathrm{D}^{\alpha_1}\ f(x)=\mathrm{D}^{\alpha_2}\ f(x)=\mathrm{D}^{\alpha}\ f(x)\quad。\qquad（4）$$

当 $\alpha_1=0$、$\alpha_2=1$ 时，（4）式成为

$$\mathrm{D}^{\alpha}\ f(x)\Big|_{x=x_k}=\mathrm{D}\,f(x)\Big|_{x=x_k}=f(x_k)\quad。\qquad（5）$$

下面初步讨论的分维导数表述，只是对于类如函数为 $f(x)=x^n$（$n>0$）时，才具有微许趋势性意义。

对于函数 $f(x)=x^n$（$n>0$），其规整导数 $\mathrm{D}\,f(x)=nx^{n-1}$，得其分维导数形式为

$$\mathrm{D}^{\alpha}\ x^n=F(\alpha)x^{n-\alpha}\quad,\quad 0\le\alpha\le1\qquad（6）$$

其中 $F(\alpha)$ 为关于 $\alpha$ 的待定函数。根据(3)式得 $\mathrm{D}^{\alpha}\ x^n$ 通过方程

$$f(x)-\mathrm{D}\,f(x)=x^n-nx^{n-1}=0$$

的根 $x_1=0$（$n>1$）、$x_2=n$ 所在位置 $(0,0)$、$(n,n^n)$，代入方程(6)式得

$$F(\alpha)=n^{\alpha}\quad,$$

$$\mathrm{D}^{\alpha}\ x^n=n^{\alpha}x^{n-\alpha}\quad,\quad 0\le\alpha\le1\qquad（7）$$

$$\mathrm{D}^{\alpha}\ x=x^{1-\alpha}\quad,\quad 0\le\alpha\le1\qquad（8）$$

根据方程（7）式，得初值为 0 时的分维积分形式

$$\mathrm{I}^{\alpha}\ x^n=(n+\alpha)^{-\alpha}x^{n+\alpha}\text{，}\quad 0\le\alpha\le1\qquad（9）$$

对于函数 $f(x)=\exp x$ 中的任意 $x$，因皆有

$$\mathrm{D}^0\exp x-\mathrm{D}^1\exp x=0\text{，}$$

故根据方程（5）式得非整数阶导数

$$\mathrm{D}^{\alpha}\exp x=\exp x\text{，}\quad 0\le\alpha\le1\qquad（10）$$

作为对整数阶导数的直接趋势性分段近似外推，依据方程（8）式进一步得简略趋势性估计参考方程

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}\,x^{\alpha}}y=\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}\,y^{\alpha}}y$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^{\alpha}y^{1-\alpha}=\begin{cases}y, & \alpha=0\\ \alpha^{\alpha}[\mathrm{D}y^{\alpha^{-1}}]^{\alpha}, & 0<\alpha\le1\end{cases}\qquad（11）$$

由方程（11）式直接可得下面二趋势性估计运算方程

$$\mathrm{D}^{\alpha}\exp(\sigma x)=\sigma^{\alpha}\exp(\sigma x)\text{，}\quad 0\le\alpha\le1\qquad（12）$$

$$\mathrm{D}^{\alpha}1=\begin{cases}1\text{，} & \alpha=0\\ 0\text{，} & 0<\alpha\le1\end{cases}\qquad（13）$$

式中 $\sigma$ 为常量。

需着重指出，上述分维导数位置假设及方程（11）式在数学基础层面包含诸多脱漏及错误，包括方程（5）式及（11）式，仅是对整数阶导数的分段近似外推

$$f(x_k)=\mathrm{D}\,f(x)\Big|_{x=x_k}\to\mathrm{D}^{\alpha}\ f(x)\Big|_{x=x_k}\text{，}0\le\alpha\le1$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}\,x^{\alpha}}y\to\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}\,y^{\alpha}}y\text{，}\quad 0\le\alpha\le1$$

且相邻整数阶导数未必存在交点，所以即便是对于类如幂函数形式，其仍是简略趋势性近似估计运算，不能作为理论基础进行分析，亦远不具有数学解析意义。

方程（7）、（12）二式的特征是原函数的相邻整数阶导数函数性质不变，局域性即是指非整数阶导数仅与相邻整数阶导数密切相关。

方程（12）、（13）二式保留了整数阶导数的局域属性，是整数阶微积分与非整数阶微积分之间的参考纽带。其中方程（13）式表明于 $\alpha\to0$ 区域，$\mathrm{D}^{\alpha}1$ 存在一从 0 到 1 之间的脉冲阶跃，方程形式亦与分数阶微积分理论中常数 1 的分数阶导数改进形式基本相同。

对于分数阶微积分理论，仅就其导数形式，目前主要定义中基本都具有积分的上下限参数，在积分运算中包含着函数的初值部分，虽然定义形式是整数阶导数直接外推，但分数阶导数表现出显著的非局域性质；一方面这可能是分数阶导数的优势，另一方面亦可能是分数阶导数已经偏离导数从局域性定义到局域性结果的根本要义，其定义中引入的积分上下限参数及初值运算是作为趋势性非整数阶导数的权宜标注。

对于幂函数的分数阶导数，如果保留与整数阶导数相对应的局域性质，则基于幂函数的分数阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}\,x^{\alpha}}x^p=\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-\alpha)}x^{p-\alpha}\text{，}\quad 0\le\alpha\le1\qquad（14）$$

当方程（14）式中的指数 $p=0$ 时，即可得常数 1 的分数阶导数一种表示形式为

$$\mathrm{D}^{\alpha}1=[\Gamma(1-\alpha)]^{-1}x^{-\alpha}\quad,\quad 0\le\alpha\le1\qquad（15）$$

历史上，因方程（15）式不能直接参与函数的分数阶导数运算，故通过引入函数初值重新构造分数阶导数非局域性定义中积分形式，得到基本同于方程（13）式的常数 1 的局域性改进型分数阶导数方程。

分数阶微积分与分维微积分皆是整数阶微积分理论的趋势性外推，其基础或前提分别为非局域性定义与局域性位置假设，亦皆是在真正的非整数阶微积分理论建立前所进行的简略趋势性层面分析；赋予几何或物理意义的算符或算子根植于自然现象的动态平衡演化中；在深刻程度及广泛适用方面，还尚未明显出现能与 Newton 微积分理论相辉映的体系。作为探讨，展望未来的非整数阶导数理论：

A 给出具有明确几何意义的基本定义；

B 具有直接描述函数局域性的特征；

C 自然蕴涵着函数阶导数形式。

## 7 自相似分形测度的非整数阶微积分定义

规整空间的Lebesgue测度与分维空间的Hausdorff测度都是用覆盖定义的，目前 Lebesgue 测度无法直接描述分形测度，Hausdorff 测度亦仅能计算少数简单的自相似分形测度或测度所在数值区域。本文下面由非整数阶微积分定义分形测度，由此得到的测度趋势性计算方程可对诸多自相似分形直接进行测度计算，初步建立非整数阶微积分与分形测度的联系。

### 7.1 分形测度的非整数阶微积分定义

当分形测度 $M$ 相对分形初始测度 $M_0$ 为升维 $\alpha$（$\alpha \ge 1$）时，其测度 $M$ 为对分形相似测度函数 $f(M_0)$ 的 $\alpha-1$ 阶积分，非整数阶微分方程形式为

$$\mathrm{d}^{\alpha-1}M = f(M_0)(\mathrm{d}M_0)^{\alpha-1}, \quad M(M_0=0)=0 \tag{16}$$

### 7.2 自相似分形测度的非整数阶微积分形式

特别地，对于自相似分形，有

$$f(M_0)=\phi(\alpha)M_0 \quad, \quad \phi(\alpha=1)=1 \tag{17}$$

式中 $\phi(\alpha)$ 为 $\alpha$ 的函数。

在严格的非整数阶微积分理论建立前，作为基于分维微积分与分数阶微积分的自相似分形测度趋势性计算方程的初步探讨，取

$$\phi(\alpha)=1 \tag{18}$$

以进行测度的简略估计；取

$$\phi(\alpha)=\alpha^{-1} \tag{19}$$

以进行测度的细节趋势计算。

非整数阶微分方程为

$$\mathrm{d}^{\alpha-1}M = \phi(\alpha)M_0(\mathrm{d}M_0)^{\alpha-1}, \quad M(M_0=0)=0 \tag{20}$$

积分方程为

$$M=\phi(\alpha)\mathrm{I}^{\alpha-1}M_0, \quad M(M_0=0)=0 \tag{21}$$

### 7.3 基于分维微积分的自相似分形测度趋势性方程

依据方程（21）式及分维积分方程（9）式得

$$M=\phi(\alpha)\,\mathrm{fact}^{-1}\alpha M_0^{\alpha} \quad, \quad \alpha \ge 1 \tag{22}$$

其中 $\mathrm{fact}\,\alpha$ 为 $\alpha$ 的实数阶乘运算

$$\mathrm{fact}\,\alpha = \begin{cases} (\alpha+1-\mathrm{int}\,\alpha)^{\alpha-\mathrm{int}\,\alpha}\prod\limits_{i=1}^{\mathrm{int}\,\alpha-1}(\alpha-\mathrm{int}\,\alpha+1+i), & \alpha \ge 2 \\ (\alpha+1-\mathrm{int}\,\alpha)^{\alpha-\mathrm{int}\,\alpha}, & 2>\alpha\ge 1 \end{cases}$$

当 $0<\alpha\le 1$ 时，$M_0$ 为 $M$ 在逆方向上的 $\alpha^{-1}$ 维分形测度，有 $\alpha^{-1}\ge 1$。根据方程（22）式得

$$M_0=\phi(\alpha^{-1})\,\mathrm{fact}^{-1}\alpha^{-1}M^{\alpha^{-1}}, \quad 0<\alpha\le 1$$

解得当 $0<\alpha\le 1$ 时自相似分形的测度计算方程为

$$M=[\phi(\alpha^{-1})]^{-\alpha}\,\mathrm{fact}^{\alpha}\alpha^{-1}M_0^{\alpha} \quad, \quad 0<\alpha\le 1$$

故有基于分维微积分的自相似分形测度趋势性方程

$$M=\begin{cases} [\phi(\alpha^{-1})]^{-\alpha}\,\mathrm{fact}^{\alpha}\alpha^{-1}M_0^{\alpha}, & 0<\alpha\le 1 \\ \phi(\alpha)\,\mathrm{fact}^{-1}\alpha M_0^{\alpha}, & \alpha\ge 1 \end{cases} \tag{23}$$

当 $0.5<\alpha<2$ 时，方程（23）式可简化为

$$M=\begin{cases} [\phi(\alpha^{-1})]^{-\alpha}\alpha^{\alpha-1}M_0^{\alpha}, & 0.5<\alpha\le 1.0 \\ \phi(\alpha)\alpha^{1-\alpha}M_0^{\alpha}, & 1.0\le\alpha<2.0 \end{cases} \tag{24}$$

### 7.4 基于分数阶微积分的自相似分形测度趋势性方程

对于分数阶导数，在保留整数阶导数的局域属性情况下，依据方程（14）式有初值为 0 时的积分为

$$\mathrm{I}^{\alpha-1}x=[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}x^{\alpha}, \quad \alpha\ge 1 \tag{25}$$

由方程（21）、（25）二式，在 $\alpha\ge 1$ 时得

$$M=\phi(\alpha)[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}M_0^{\alpha}, \quad \alpha\ge 1 \tag{26}$$

在 $0<\alpha\le 1$ 时，根据方程（26）式，有维数为 $\alpha^{-1}$ 的逆方向分形测度

$$M_0=\phi(\alpha^{-1})[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{-1}M^{\alpha^{-1}}, \quad \alpha^{-1}\ge 1 \tag{27}$$

解得

$$M=[\phi(\alpha^{-1})]^{-\alpha}[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{\alpha}M_0^{\alpha}, \quad 0<\alpha\le 1 \tag{28}$$

故有基于分数阶微积分的自相似分形测度趋势性计算方程形式

$$M=\begin{cases} [\phi(\alpha^{-1})]^{-\alpha}[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{\alpha}M_0^{\alpha}, & 0<\alpha\le 1 \\ \phi(\alpha)[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}M_0^{\alpha}, & \alpha\ge 1 \end{cases} \tag{29}$$

根据方程（23）、（29）二式可以对一些自相似分形的测度进行趋势性计算。

## 8 几类典型自相似分形测度的趋势性计算

### 8. 1 Cantor 集合

取其初始测度为 $L_0$，进行 3 等分，保留二端的 2 个闭集，去掉中间的 1 个开集，持续操作，得此 Cantor 三分集合生成维数为

$$\alpha_{\mathrm{C}}=\ln 2/\ln 3=0.631\,; \tag{30}$$

由方程（24）、（29）二式分别得其测度为

$$M_{\mathrm{C}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{C}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{C}}}\alpha_{\mathrm{C}}^{\alpha_{\mathrm{C}}-1}L_0^{\alpha_{\mathrm{C}}} = \begin{cases} 1.185L_0^{0.631}, & \phi(\alpha_{\mathrm{C}}^{-1})=1 \\ 1.585L_0^{0.631}, & \phi(\alpha_{\mathrm{C}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{C}} \end{cases} \tag{31}$$

$$M_{\mathrm{C}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{C}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{C}}}[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{C}}^{-1})]^{\alpha_{\mathrm{C}}}L_0^{\alpha_{\mathrm{C}}} = \begin{cases} 1.244L_0^{0.631}, & \phi(\alpha_{\mathrm{C}}^{-1})=1 \\ 1.663L_0^{0.631}, & \phi(\alpha_{\mathrm{C}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{C}} \end{cases} \tag{32}$$

上述结果与目前采用覆盖方法得到 Cantor 三分集合 Hausdorff 测度的研究结论是有所不同的。

### 8. 2 Koch 三次曲线

取其初始测度为 $L_0$，生成维数

$$\alpha_{\mathrm{K}}=\ln 4/\ln 3\,; \tag{33}$$

由方程（24）、（29）二式分别得其测度为

$$M_{\mathrm{K}}=\phi(\alpha_{\mathrm{K}})\alpha_{\mathrm{K}}^{1-\alpha_{\mathrm{K}}}L_0^{\alpha_{\mathrm{K}}} = \begin{cases} 0.941L_0^{1.262}, & \phi(\alpha_{\mathrm{K}})=1 \\ 0.746L_0^{1.262}, & \phi(\alpha_{\mathrm{K}})=\alpha_{\mathrm{K}}^{-1} \end{cases} \tag{34}$$

$$M_{\mathrm{K}}=\phi(\alpha_{\mathrm{K}})[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{K}})]^{-1}L_0^{\alpha_{\mathrm{K}}}$$

$$=\begin{cases}0.877L_0^{1.262}, & \phi(\alpha_{\mathrm{K}})=1\\ 0.696L_0^{1.262}, & \phi(\alpha_{\mathrm{K}})=\alpha_{\mathrm{K}}^{-1}\end{cases} \tag{35}$$

将此集合四等分，保留二端的二个闭集部分，去掉中间的二个，持续操作，新集合生成维数

$$\alpha_{\mathrm{KC}}=\ln 2/\ln 4=0.5\,, \tag{36}$$

由方程（24）、（29）二式及方程（34）、（35）二式分别得其测度为

$$M_{\mathrm{KC}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{KC}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{KC}}}\alpha_{\mathrm{KC}}^{\alpha_{\mathrm{KC}}-1}(0.941L_0^{1.262})^{\alpha_{\mathrm{KC}}}$$

$$=\begin{cases}1.372L_0^{0.631}, & \phi(\alpha_{\mathrm{KC}}^{-1})=1\\ 1.940L_0^{0.631}, & \phi(\alpha_{\mathrm{KC}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{KC}}\end{cases} \tag{37}$$

$$M_{\mathrm{KC}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{KC}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{KC}}}[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{KC}}^{-1})]^{\alpha_{\mathrm{KC}}}(0.877L_0^{1.262})^{\alpha_{\mathrm{KC}}}$$

$$=\begin{cases}1.324L_0^{0.631}, & \phi(\alpha_{\mathrm{KC}}^{-1})=1\\ 1.872L_0^{0.631}, & \phi(\alpha_{\mathrm{KC}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{KC}}\end{cases} \tag{38}$$

与方程（31）、（32）二式相比，可见由 Koch 三次曲线生成的 Cantor 集合测度分别大于由直线段生成的 Cantor 集合测度。

### 8. 3 Sierpinski 集合

取其初始测度为 $0.5\,L_0^2$（在此其为一直角三角形的 Euclid 面积），集合生成维数

$$\alpha_{\mathrm{S}}=\ln 3/\ln 4\,, \tag{39}$$

由方程（24）、（29）二式分别得其测度为

$$M_{\mathrm{S}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{S}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{S}}}\alpha_{\mathrm{S}}^{\alpha_{\mathrm{S}}-1}(0.5L_0^2)^{\alpha_{\mathrm{S}}}$$

$$=\begin{cases}0.606L_0^{1.584}, & \phi(\alpha_{\mathrm{S}}^{-1})=1\\ 0.729L_0^{1.584}, & \phi(\alpha_{\mathrm{S}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{S}}\end{cases} \tag{40}$$

$$M_{\mathrm{S}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{S}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{S}}}[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{S}}^{-1})]^{\alpha_{\mathrm{S}}}(0.5L_0^2)^{\alpha_{\mathrm{S}}}$$

$$=\begin{cases}0.641L_0^{1.584}, & \phi(\alpha_{\mathrm{S}}^{-1})=1\\ 0.771L_0^{1.584}, & \phi(\alpha_{\mathrm{S}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{S}}\end{cases} \tag{41}$$

取一正方形初始测度为 $L_0^2$，将其 16 等分，保留 4 个顶点闭集部分，去掉其余 12 个部分，持续操作，集合生成维数

$$\alpha_{\mathrm{SL}}=\ln 4/\ln 16=0.5\,, \tag{42}$$

由方程（24）、（29）二式分别得其测度为

$$M_{\mathrm{SL}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{SL}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{SL}}}\alpha_{\mathrm{SL}}^{\alpha_{\mathrm{SL}}-1}(L_0^2)^{\alpha_{\mathrm{SL}}}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}L_0, & \phi(\alpha_{\mathrm{SL}}^{-1})=1\\ 2L_0, & \phi(\alpha_{\mathrm{SL}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{SL}}\end{cases} \tag{43}$$

$$M_{\mathrm{SL}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{SL}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{SL}}}[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{SL}}^{-1})]^{\alpha_{\mathrm{SL}}}(L_0^2)^{\alpha_{\mathrm{SL}}}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}L_0, & \phi(\alpha_{\mathrm{SL}}^{-1})=1\\ 2L_0, & \phi(\alpha_{\mathrm{SL}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{SL}}\end{cases} \tag{44}$$

将上述正方形 4 等分，于其上下面对称再分别生成 2 闭集部分，共计 8 个闭集部分，持续操作，集合生成维数

$$\alpha_{\mathrm{SV}}=\ln 8/\ln 4=3/2\,, \tag{45}$$

由方程（24）、（29）二式分别得其测度为

$$M_{\mathrm{SV}}=\phi(\alpha_{\mathrm{SV}})\alpha_{\mathrm{SV}}^{1-\alpha_{\mathrm{SV}}}(L_0^2)^{\alpha_{\mathrm{SV}}}$$

$$=\begin{cases}0.816L_0^3, & \phi(\alpha_{\mathrm{SV}})=1\\ 0.544L_0^3, & \phi(\alpha_{\mathrm{SV}})=\alpha_{\mathrm{SV}}^{-1}\end{cases} \tag{46}$$

$$M_{\mathrm{SV}}=\phi(\alpha_{\mathrm{SV}})[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{SV}})]^{-1}(L_0^2)^{\alpha_{\mathrm{SV}}}$$

$$=\begin{cases}0.752L_0^3, & \phi(\alpha_{\mathrm{SV}})=1\\ 0.502L_0^3, & \phi(\alpha_{\mathrm{SV}})=\alpha_{\mathrm{SV}}^{-1}\end{cases} \tag{47}$$

取一立方体的初始测度为 $L_0^3$，分别对其 27 等分、保留 8 个顶点部分及 1 份中心部分共 9 份闭集、其余 18 个部分去掉、持续操作，对其 $8^3=512$ 等分、保留 8 个顶点部分闭集、其余去掉、持续操作，二个新集合生成维数分别为

$$\alpha_{\mathrm{VS}}=\ln 9/\ln 27=2/3\,, \tag{48}$$

$$\alpha_{\mathrm{VL}}=\ln 8/\ln 512=1/3\,; \tag{49}$$

由方程（24）式、（23）式得其测度为

$$M_{\mathrm{VS}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{VS}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{VS}}}\alpha_{\mathrm{VS}}^{\alpha_{\mathrm{VS}}-1}(L_0^3)^{\alpha_{\mathrm{VS}}}$$

$$=\begin{cases}\sqrt[3]{1.5}L_0^2, & \phi(\alpha_{\mathrm{VS}}^{-1})=1\\ 1.5L_0^2, & \phi(\alpha_{\mathrm{VS}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{VS}}\end{cases} \tag{50}$$

$$M_{\mathrm{VL}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{VL}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{VL}}}\,\mathrm{fact}^{\alpha_{\mathrm{VL}}}\alpha_{\mathrm{VL}}^{-1}(L_0^3)^{\alpha_{\mathrm{VL}}}$$

$$=\begin{cases}\sqrt[3]{6}L_0, & \phi(\alpha_{\mathrm{VL}}^{-1})=1\\ 2.621L_0, & \phi(\alpha_{\mathrm{VL}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{VL}}\end{cases} \tag{51}$$

由方程（29）式得其测度为

$$M_{\mathrm{VS}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{VS}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{VS}}}[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{VS}}^{-1})]^{\alpha_{\mathrm{VS}}}(L_0^3)^{\alpha_{\mathrm{VS}}}$$

$$=\begin{cases}1.209L_0^2, & \phi(\alpha_{\mathrm{VS}}^{-1})=1\\ 1.584L_0^2, & \phi(\alpha_{\mathrm{VS}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{VS}}\end{cases} \tag{52}$$

$$M_{\mathrm{VL}}=[\phi(\alpha_{\mathrm{VL}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{VL}}}[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{VL}}^{-1})]^{\alpha_{\mathrm{VL}}}(L_0^3)^{\alpha_{\mathrm{VL}}}$$

$$=\begin{cases}\sqrt[3]{6}L_0, & \phi(\alpha_{\mathrm{VL}}^{-1})=1\\ 2.621L_0, & \phi(\alpha_{\mathrm{VL}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{VL}}\end{cases} \tag{53}$$

分析表明上述分别基于分维微积分与分数阶微积分的自相似分形测度方程（23）式与（29）式皆为趋势性计算，其中分数阶微积分比分维微积分计算准确。

上述分析从分形测度计算方面亦初步表明分维微积分与分数阶微积分都是未来真正的非整数阶微积分理论的趋势性形式描述；在尚未建立真正的非整数阶微积分前，此仅供在进一步依据分数阶微积分讨论宇宙分维构造特征时于趋势性层面上参考。

从物质构造角度考察，如果宇宙是呈现分维构造性质的，则在所考察的物质构造层面上应表现出一些周期性的嵌套规律。下面通过对原子核内中子与质子趋势关系的分析，探讨这种周期性嵌套规律的可能表述形式，以为对宇宙分维构造提供微许诠释补注。

## 9 原子核内中子与质子间的趋势方程

目前关于原子序数方面的研究结论基本是基于壳层理论及“幻数”序列进行探讨分析的，而“幻数”则是由具体长寿命的稳定原子序数确定的，但其未能给出原子序数的可能极限值。下面通过对原子核内中子与质子数据的统计分析，初步给出原子核内中子与质子的趋势关系，并探讨原子序数的可能极限值。

通过对已有各种原子核（稳定核、天然放射核、人为放射核）内中子与质子数据的分析，可初步给出核内中子数 $N$ 与质子数 $Z$ 之间趋势方程简略形式为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}Z}+\sigma_1 N^2+\sigma_2=0\,, \tag{54}$$

式中 $\sigma_1$、$\sigma_2$ 为待定常量；$N$、$Z$ 为自然数性质，这里为便于方程描述在广义上取为实数。

方程（54）式的数学获得过程为，首先确定原子核（含稳定核、天然放射核及人为放射核）内中子数与质子数的条带坐标关系，得到条带宽为在 6 个中子附近波动的中子条带—质子关系；其次确定中子条带的中线，得到中子中线—质子关系；第三步进行拟合方程

$$\sum_{i=1}^{j} a_i \frac{\mathrm{d}^i N}{\mathrm{d}Z^i}=f(Z,N)\quad, \tag{55}$$

与中子中线－质子关系数据的拟合分析处理，一般可取 $a_i$ 为待定常量、$j=2$、$f(Z,N)$ 为 $Z$ 与 $N$ 的多项式，即可获得微分方程（54）式；然后求方程（54）式的解，得到其一周期解的具体方程形式为

$$N=192\tan[0.007(Z-1)]\quad; \tag{56}$$

最后对比方程解与原中子中线－质子关系数据的误差。数据对比结果表明，方程（56）式与原子核内中子相对质子数量对应的趋势关系是吻合的。

当在多参量情况时，拟合方程（55）式可相应地采用偏微分形式，$a_i$、$f(Z,N)$ 可取多种函数形式，其过程亦适于其它一些自然现象数据曲线的微分方程获得，尤其是对于物理学原理尚未完全涉及的自然现象演化过程，或对已有基础原理进行并行理论分析探讨时可参照使用。

根据方程（56）式，当 $0.007(Z-1)=0.5\pi$ 时，中子数取极限值，故得原子序数在该周期内的可能极限值为

$$Z=225\quad; \tag{57}$$

当 $0.007(Z-1)=\pi$ 时，得可能存在的下一周期内原子序数起始点约为

$$Z=450\,。 \tag{58}$$

与目前已存在的周期内已有原子核的性质不同，在这可能存在的下一周期内的起始阶段，核内质子数目远大于中子数目。

应该指出，上述趋势关系方程的物理内涵还不为我们所深刻了解，其讨论亦仅是基于对已有原子核内中子与质子数据进行统计分析得出的，深刻的原理层面的原因仍是未知的。

上述讨论分析表明，已有的元素周期表[12]描述的是各个局部结构的周期规律，在更大的构造尺度层面上还有与该构造尺度相应的（在该层面上本具的）周期规律，诸多局部的周期性构造形成较大尺度层面上的周期性构造，这对研究宇宙分维构造具有启示意义。

## 10 结 论

本文初步探讨了宇宙分维构造，给出了基于幂函数分维微积分及分数阶微积分的自相似分形测度趋势性计算方程，并通过原子核内中子与质子间的趋势关系方程，探讨了局部的周期性构造形成较大尺度层面上的周期性构造规律。

本文在分维微积分方面的描述仅是针对类如幂函数形式的趋势讨论，包含着诸多脱漏及错误，远不具有解析基础性质。到目前分数阶微积分的研究已经有 300 多年的历程，积累了诸多的理论及应用研究成果，在真正的非整数阶微积分未建立前，进一步的研究工作还宜继续应用分数阶微积分及基于分数阶微积分的分形测度对宇宙分维构造予以趋势层面探讨。较为理想的期望是不太漫长的歧路终究能够交汇在大道上。

**致 谢**

作者衷心感谢刘少华博士对本研究工作一直给予的关怀和帮助。

**参 考 文 献（References）：**

[1] Stephen Hawking. Gödel and M－Theory[A]. 北京：国际数学家大会报告[C]，2002.

[2] 陈颙，陈凌. 地震危险性分析中最大地震震级的确定[J]. 地球物理学报，1999，42(3):351-357.

[3] 安镇文, 杨翠华, 王琳瑛, 陈立华. 地震时空丛集的多重分形研究[J]. 地球物理学报，2000，43(1):74-80.

[4] 李庆谋，刘少华. 地球物理信号能量(密度)多维分形及应用[J]. 地球物理学进展，2001，16(1):24-30.

[5] 常旭，刘伊克. 地震记录的广义分维及其应用[J]. 地球物理学报，2002，45(6)：839-846.

[6] 李庆谋，刘少华. GIS环境下地球物理信号的奇异值分解、多维分形特征与应用[J]. 地球物理学进展，2003，18(1)：97-102.

[7] 李水根, 等. 分形与小波[M]. 北京: 科学出版社，2002.

[8] 阎坤. 粒子运动的分形Newton理论[A]. 见：动力学、振动与控制的研究[C]. 北京：北京大学出版社，1994，81～85.

[9] 阎坤. 粒子运动的空间性质[A]. 见：现代力学与科技进步[C]. 北京：清华大学出版社，1997，1563～1564.

[10] 周作领. 自相似集的Hausdorff测度—Koch曲线[J]. 中国科学（A辑）, 1998, 28(2): 103～107.

[11] 周作领, 等. 一个Sierpinski地毯的Hausdorff测度[J]. 中国科学，A辑，1999，29(2)：138～144.

[12] 吴大猷. 量子论与原子结构[M]. 北京：科学出版社，1983, 161～169.