本文框架内容发表在：
阎坤. 天体运行轨道的背景介质理论导引与自相似分形测度计算的分维微积分基础[J]. 地球物理学进展，2007，22(2)：451～462.
YAN Kun. Introduction on background medium theory about celestial body motion orbit and foundation of fractional-dimension calculus about self-similar fractal measure calculation[J]. Progress in Geophysics(in Chinese with abstract in English)，2007，22(2)：451～462.

天体运行轨道的背景介质理论导引与自相似分形测度计算的分维微积分基础

阎 坤
（ 西安现代非线性科学应用研究所，西安 710061 ）

摘 要：通过讨论天体运行背景介质理论的连续轨道及离散轨道这二个研究方向的基础假设，介绍了天体运行轨道的具体方程形式及理论框架概要；进一步地通过讨论天体运行轨道 Binet 方程的一般形式及其行星近日点进动角的解，给出了连续轨道理论与 Newton 理论及 Einstein 广义相对论的联系与区别；通过讨论天体运行轨道的分维扩展方程，给出了包括太阳系行星、天王星卫星、地球卫星、绕月航天器等在内的离散轨道（稳定性轨道）方程及其预言数据。特别地，作为对天体在较为广泛区域作用曲线的初步探讨推论，指出仅由天体引力难以形成质量密度趋于无穷大的理想黑洞。通过讨论函数的分维导数的位置假设及幂函数的分维导数的形式假设，进一步明晰了幂函数的分维导数、分维微分及分维积分的具体方程形式，给出分维导数与分数阶导数的区别，探讨了自相似分形扩展与分维扩展的差分方程描述方法，随后讨论了基于一般分形测度的非整数阶微积分定义导出的自相似分形测度趋势性微积分方程具体形式，给出了其与目前 Hausdorff 测度方法（覆盖方法）的区别，并对包括三分 Cantor 集合、Koch 曲线、Sierpinski 垫片及正交十字星形等自相似分形在内的测度进行了计算分析，最后探讨了一种理想点集的维数及测度计算方程。

关键词：天体运行轨道，背景介质理论，连续轨道，离散轨道，自相似分形测度，非整数阶微积分，分数阶微积分，分维微积分

Introduction on background medium theory about celestial body motion orbit and foundation of fractional-dimension calculus about self-similar fractal measure calculation

YAN Kun
(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, by discussing the basic hypotheses about the continuous orbit and discrete orbit in two research directions of background medium theory for celestial body motion, concrete equation forms and their summary of the theoretic frame of celestial body motion are introduced. Future more, by discussing the general form of Binet's equation of celestial body motion orbit and it's solution of the advance of the perihelion of planets, some relations and differences between the continuous orbit theory and Newton's gravitational theory and Einstein's general relativity are given. And by discussing fractional-dimension expanded equation for the celestial body motion orbits, the concrete equations and the prophesy data of discrete orbit or stable orbits of celestial bodies which included the planets in the Solar System, satellites in the Uranian System, satellites in the Earth System and satellites obtaining the Moon obtaining from discrete orbit theory are given too. Especially, as preliminary exploration and inference to the gravitational curve of celestial bodies in broadly range, the concept for the ideal black hole with trend to infinite in mass density difficult to be formed by gravitation only is explored. By discussing the position hypothesis of fractional-dimension derivative about function and formula form the hypothesis of fractional-dimension derivative about power function, concrete equation formulas of fractional-dimension derivative, differential and integral are described distinctly further, and difference between the fractional-dimension derivative and the fractional-order derivative are given too. The difference equations description of the self-similar fractal extension and fractional-dimension extension are discussed. Subsequently, the concrete forms of measure tendency calculus equations of self-similar fractal obtaining by based on the definition of form in non-integral order calculus about general fractal measure are discussed again, and differences with Hausdorff measure method or the covering method at present are given. By applying the measure calculation equations, measure of self-similar fractals which include middle-third Cantor set, Koch curve, Sierpinski gasket and orthogonal cross star are calculated and analyzed. At the end, the calculating equations of dimension and measure of an ideal points set are explored.

Keywords orbit of celestial body motion, background medium theory, continuous orbit, discrete orbit, self-similar fractal measure, non-integral order calculus, fractional-order calculus, fractional-dimension calculus

0 引 言

在采用 Euclid 几何的 Newton 天体力学之后，目前关于天体运行轨道的描述主要有三个研究方向，其一是采用 Riemann 几何的 Einstein 广义相对论描述[1~3]，其二是仍采用 Euclid 几何的背景介质理论连续轨道描述[4, 5]，其三是采用 Mandelbort 分形几何的分维扩展离散轨道描述[4]。

极限上，上述前二个方法都要求在极弱场情况下方程能够退化为 Newton 方程形式，在弱场情况下能够给出符合诸如行星近日点进动数据[6]的解。

与连续轨道理论模式相比，后面的第三个描述离散轨道理论则属于稳定轨道理论模式，目前已给出部分天体的离散轨道方程具体形式。

天体运行背景介质理论的离散轨道描述是基于分维扩展方法建立的，其深入的研究尚依赖于分维数学解析基础的确立和发展。

作者简介 阎坤，男，1962年10月生，吉林榆树人，1983年8月毕业于长春地质学院，目前主要从事非线性科学及天体物理研究。
(Email: yankun@nature.ac.cn)

目前在非整数阶微积分与自相似分形测度计算领域，现各有二个方向；在非整数阶微积分方面，其一是基于Γ函数或整数阶积分变换直接外推默认的非局域性分数阶微积分[7~11]，其二是基于相邻整数阶导数位置假设的局域性分维微积分[12, 4]；在自相似分形测度计算方面，其一是基于 Hausdorff 测度的覆盖方法[13~16]，其二是基于分数阶微积分及分维微积分的测度趋势性计算方程方法[12, 4]。

为明晰天体运行轨道背景介质理论的连续轨道及离散轨道描述、及基于分数阶微积分与分维微积分的自相似分形测度趋势性计算方程、主线推演脉络、部分结论，本文在天体运行轨道方程方面，将进一步明确连续轨道理论及离散轨道理论[4,5]的基础假设，对主线推演脉络给出初步总结，讨论连续轨道理论与 Einstein 广义相对论之间的关系与区别，给出离散轨道理论的方程形式及其预言数据，并对连续轨道与离散轨道共同的背景介质理论基础进行讨论，以为深入理解自然现象及建立更基本的天体运行轨道理论提供参照框架。在分维数学的分维微积分与自相似分形测度计算方面，本文将进一步明晰资料[12，4]中有关分维微积分的基础假设及自相似分形测度的非整数阶微积分定义形式，总结幂函数的分维微积分具体方程，给出分维导数与分数阶导数的关系与区别，探讨了相似分形扩展与分维扩展的差分方程描述方法，给出基于分数阶微积分与分维微积分的自相似分形测度趋势性方程，并对包括三分 Cantor 集合、Koch 曲线、Sierpinski 垫片及正交十字星等自相似分形测度进行具体计算分析，最后讨论了一种理想点集的转化及其维数和测度计算方程。

分析表明分维微积分基础不足，运算困难，不具有广泛的函数关联性及逻辑一致性，在真正的非整数阶微积分理论建立前，应继续将分数阶微积分及基于分数阶微积分的自相似分形测度计算方程作主线予以趋势性探讨；而未来的数理解析理论、乃至是并行于 Newton 思想体系的描述理论，其根本标志至少是包含如下框架内容：

A 给出与分形生成过程及测度密切联系的非整数阶微积分定义，并可自然延伸出复变函数阶微积分形式；

B 给出真空的背景能量描述及其涨落转化规律；

C 给出光的本质描述及波粒二象性的机理阐释；

D 给出粒子谱系及演化规律、星系结构及运行规律。

本文带有趋势性、试错性的初步讨论内容即是试图为上述未来的解析理论体系提供微许前期探索铺垫参照。

1 天体运行背景介质理论的连续轨道描述

在 Newton 引力理论及 Einstein 广义相对论之后，描述天体运行轨道的背景基本被简化为理想的可延伸坐标系。背景介质理论在基础假设上则引进背景介质层壳常数，认为天体总处在与背景介质进行真空能量交换的动态平衡中，其在形式上则进一步分为连续轨道及离散轨道。

下面讨论天体运行的连续轨道理论框架，其内容来源于资料[4，5]，并在基础假设及推演方面予以调整补充。

1.1 轨道能量方程假设

假设：一初始能量为 E_{ms} 的粒子在能量为 E_{M} 的物体作用下，与背景介质交换真空能量 $c^2\Delta m$，从 r 到 $r+\mathrm{d}r$ 处作功，其吸收及释放能量过程的轨道能量方程为

$$\pm r^2c^2\,\mathrm{d}m+\eta mc^2E_{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}r=0\ ; \tag{1}$$

即当粒子吸收能量时，其轨道能量方程为

$$r^2c^2\,\mathrm{d}m+\eta mc^2E_{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}r=0\ , \tag{2}$$

当粒子释放能量时，其轨道能量方程为

$$-r^2c^2\,\mathrm{d}m+\eta mc^2E_{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}r=0\ , \tag{3}$$

式中 η 为介质层壳常数，m 为质点粒子运动质量，c 为真空介质常数，其在数值及量纲上等于真空中光速。

上述假设是基于粒子与背景交换真空能量 $c^2\Delta m$ 的动态机理给出的，在吸收能量过程的质量方程为[17]

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(V_{\mathrm{m}}c^{-1})^2}}\ ,\quad 1>V_{\mathrm{m}}c^{-1}\geq 0 \tag{4}$$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{(V_{\mathrm{m}}c^{-1})^2-1}}\ ,\quad V_{\mathrm{m}}c^{-1}>1 \tag{5}$$

在释放能量过程的全速域质量方程为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1+(V_{\mathrm{m}}c^{-1})^2}}\ ,\quad +\infty>V_{\mathrm{m}}c^{-1}\geq 0 \tag{6}$$

其中 m_0、V_{m} 分别为质点粒子的静止质量及在物体作用下产生的运动速度；方程（4）式为 Einstein 质量方程。

方程（1）式旨在将天体弯曲轨道描述建立在和粒子平直轨迹描述共同的与背景介质交换真空能量的基础上。

1.2 能量方程的质量解

现忽略物体运动能量及旋转能量，仅考虑其真空能量 E_{M}，有

$$E_{\mathrm{M}}=E_{\mathrm{M0}}=M_0c^2\ , \tag{7}$$

及粒子势能 U_{mr} 变化、作用力 F_{Mm} 为

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{mr}}=-c^2\,\mathrm{d}m\ ,\quad U_{\mathrm{mr}}(r\to\infty)=0 \tag{8}$$

$$F_{\mathrm{Mm}}=-\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{mr}}}{\mathrm{d}r}=c^2\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}\ ; \tag{9}$$

得此条件下能量方程（2）、（3）二式质量 m 解分别为

$$m_{\mathrm{A}}=m_0\exp\left[\eta\frac{M_0c^2}{r}+\sigma_{\mathrm{A}}\right], \tag{10}$$

$$m_{\mathrm{B}}=m_0\exp\left[-\eta\frac{M_0c^2}{r}-\sigma_{\mathrm{B}}\right], \tag{11}$$

式中 σ_{A}、σ_{B} 为待定常量。

根据方程（8）～（11）四式，得二种作用力方程为

$$F_{\mathrm{MmA}}=-\eta c^4\frac{M_0m_0}{r^2}\exp\left[\eta\frac{M_0c^2}{r}+\sigma_{\mathrm{A}}\right], \tag{12}$$

$$F_{\mathrm{MmB}}=\eta c^4\frac{M_0m_0}{r^2}\exp\left[-\eta\frac{M_0c^2}{r}-\sigma_{\mathrm{B}}\right]; \tag{13}$$

二种作用力方程的极限形式分别为

$$F_{\mathrm{MmA}}=-\eta c^4\frac{M_0m_0}{r^2}\ ,\quad \eta\frac{M_0c^2}{r}+\sigma_{\mathrm{A}}\to 0 \tag{14}$$

$$F_{\mathrm{MmB}}=\eta c^4\frac{M_0m_0}{r^2}\ ,\quad \eta\frac{M_0c^2}{r}+\sigma_{\mathrm{B}}\to 0\ 。 \tag{15}$$

其中方程（14）式具有 Newton 引力方程形式

$$F_{\mathrm{Mm}}=-\eta c^4\frac{M_0m_0}{r^2}=-G\frac{M_0m_0}{r^2} \tag{16}$$

故可确定 Newton 引力常数 G 为

$$G=c^4\eta\ 。 \tag{17}$$

特别地，对于粒子轨道能量方程（1）式，当粒子与背景介质不交换能量，或等效交换能量动态平衡时，有

$$c^2\Delta m = 0\,, \tag{18}$$

则由方程（8）、（9）二式得粒子势能变化及作用力分别为

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{mr}} = -c^2\,\mathrm{d}m = 0\,;$$

$$F_{\mathrm{MmC}} = -\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{mr}}}{\mathrm{d}r} = c^2\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 0\,。 \tag{19}$$

根据方程（17）式，得介质层壳常数η为

$$\eta = Gc^{-4} = 8.26\times10^{-45}\ \mathrm{s^2m^{-1}kg^{-1}}\,, \tag{20}$$

故有

$$\eta = 8.26\times10^{-45}\ \mathrm{N^{-1}} = \frac{1}{1.21\times10^{44}\ \mathrm{N}} = \frac{1}{F_0}\,,$$

$$\eta = \frac{G}{c^4} = \frac{\sqrt{\hbar Gc^{-3}}}{c^2\sqrt{c\hbar G^{-1}}} = \frac{l_{\mathrm{Pl}}}{m_{\mathrm{Pl}}c^2}\,,$$

其中$l_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\hbar Gc^{-3}} = 1.616\times10^{-35}\ \mathrm{m}$、

$m_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{c\hbar G^{-1}} = 2.177\times10^{-8}\ \mathrm{kg}$

分别为 Planck 长度、质量；F_0为力常数

$$F_0 = 1.21\times10^{44}\ \mathrm{N}\,。 \tag{21}$$

由方程（17）式，质量方程（10）、（11）二式成为

$$m_{\mathrm{A}} = m_0\exp\left[\frac{GM_0}{c^2r} + \sigma_{\mathrm{A}}\right], \tag{22}$$

$$m_{\mathrm{B}} = m_0\exp\left[-\frac{GM_0}{c^2r} - \sigma_{\mathrm{B}}\right]; \tag{23}$$

二种作用力方程（12）、（13）二式成为

$$F_{\mathrm{MmA}} = -G\frac{M_0m_0}{r^2}\exp\left[\frac{GM_0}{c^2r} + \sigma_{\mathrm{A}}\right], \tag{24}$$

$$F_{\mathrm{MmB}} = G\frac{M_0m_0}{r^2}\exp\left[-\frac{GM_0}{c^2r} - \sigma_{\mathrm{B}}\right]。 \tag{25}$$

上述探讨分析表明，一物体对其它粒子呈现出吸引或排斥的形式，与粒子在轨道运行中吸收能量或释放能量的特征相关；方程（12）式、（19）式与（13）式即构成从吸引经平衡或等效平衡到排斥计三种作用力的连续图谱。

根据方程（4）、（22）二式，有等式

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-(V_{\mathrm{m}}c^{-1})^2}} = m_0\exp\left[\frac{GM_0}{c^2r} + \sigma_0\right], \tag{26}$$

即得速度及其一极限表示形式分别为

$$V_{\mathrm{m}}^2 = c^2\left[1-\exp\left[-\frac{2GM_0}{c^2r} - 2\sigma_0\right]\right]\,, \tag{27}$$

$$V_{\mathrm{m}}^2 = GM_0\left[\frac{2}{r} + \frac{2c^2\sigma_0}{GM_0}\right],\quad \frac{2GM_0}{c^2r} + 2\sigma_0 \to 0 \tag{28}$$

式中σ_0为待定常量。

由 Newton 第二定律及引力定律（16）式得 Newton 引力方程组

$$\begin{cases} m_0\left[\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left[\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right]^2\right] = -G\dfrac{M_0m_0}{r^2}\,, \\ m_0\left[r\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right] = 0\,, \end{cases} \tag{29}$$

进一步得 Newton 理论的活力积分公式及角动量守恒方程

$$\begin{cases} V_{\mathrm{m}}^2 = \left[\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right]^2 + \left[r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right]^2 = GM_0\left[\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right], \\ m_0r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = L_0\,, \end{cases} \tag{30}$$

式中φ为行星轨道平面极坐标角度，t为行星运行时间，L_0为角动量常量，

$$L_0 = \sqrt{a(1-e^2)GM_0}\,m_0\,; \tag{31}$$

a为轨道半长径，e为行星轨道偏心率。

由方程（28）式、（30）式得待定常量σ_0为

$$\sigma_0 = -\frac{GM_0}{2c^2a}\,。 \tag{32}$$

在 Newton 轨道方程（30）式中消去时间参量t后，得其 Binet 方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = u_0\,, \tag{33}$$

式中参量u与常量u_0分别为

$$u = \frac{GM_0}{r}\,,\quad u_0 = \left[\frac{GM_0m_0}{L_0}\right]^2 = \frac{GM_0}{a(1-e^2)}\,。 \tag{34}$$

这里给出已知的 Newton 引力理论主脉络（16）、（29）、（30）、（33）四式，旨在确定方程（1）式中的介质层壳常数η及（27）式中的待定常量σ_0，并为天体运行轨道的一般性 Binet 方程探讨提供框架参照及方程形式验证。

下面参照方程（30）式给出轨道参量方程假设。

1.3 行星运行轨道的参量方程形式假设

假设：行星运行轨道的参量方程形式为

$$V_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}r} + B\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 0\,, \tag{35}$$

式中B为待定函数。

方程（35）式的正确性将通过其轨道方程兼容 Newton 引力理论及 Einstein 广义相对论的有关导出结论予以验证。

需要指出，上述方程（1）、（35）二式是属于探讨性质的，其中（35）式的特殊形式可由 Newton 方程（16）式直接得到；由于（1）、（35）二式含有条件假设成分，故其严格表述形式尚需作进一步的研究予以确定。

1.4 行星运行轨道的一般性 Binet 方程形式

1.4.1 在吸收能量并当$1 > V_{\mathrm{m}}c^{-1} \geq 0$时的一般性 Binet 方程

对于方程（35）式，当待定函数$B = B_0$为常量时，则由方程（27）、（35）二式得

$$B_0\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -V_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}r} = \frac{GM_0}{r^2}\exp\left[-\frac{2GM_0}{c^2r} - 2\sigma_0\right]; \tag{36}$$

即方程（22）、（36）二式得角动量方程

$$mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = G\frac{M_0m_0}{B_0}\exp\left[-\frac{GM_0}{c^2r} - \sigma_0\right]。 \tag{37}$$

当 $GM_0(c^2r)^{-1}+\sigma_0\to 0$ 时，方程（37）式成为 Newton 方程（30）式的形式

$$m_0r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=G\frac{M_0m_0}{B_0}\quad ; \tag{38}$$

相应地得常量 B_0 为

$$B_0=\sqrt{u_0}=G\frac{M_0m_0}{L_0}\quad ; \tag{39}$$

故得行星运行轨道参量方程（35）式的一种表示形式为

$$V_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}r}+G\frac{M_0m_0}{L_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0\text{。} \tag{40}$$

方程（40）式可由 Newton 轨道方程（30）式直接给出，但由于（24）式不是单一的向心力，尚难以通过类如 Newton 方程（29）式的力合成形式或下面方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}^2}{\mathrm{d}t}=2\left[\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left[\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right]^2\right]\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right],\\ \dfrac{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}^2}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{2GM_0}{r^2}\exp\left[-\dfrac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma_0\right]\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\ ,\end{cases} \tag{41}$$

给出后面的角动量方程（37）式，故引入（35）式假设。进一步的研究将表明方程（35）式是可以通过变分等方法被严格导出的结论。

由方程（37）、（39）二式得该条件下角动量方程的具体形式为

$$mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=L_0\exp\left[-\frac{GM_0}{c^2r}-\sigma_0\right]; \tag{42}$$

即轨道方程为

$$\begin{cases}V_{\mathrm{m}}^2=\left[\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right]^2+\left[r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right]^2\\ \qquad=c^2\left[1-\exp\left[-\dfrac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma_0\right]\right],\\ m_0r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=L_0\exp\left[-\dfrac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma_0\right]\text{。}\end{cases} \tag{43}$$

由方程（43）式消去时间参量 t 得

$$\frac{1}{m_0^2r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{1}{m_0^2r^2}=\frac{c^2}{L_0^2}\left[\exp\left[\frac{4GM_0}{c^2r}+4\sigma_0\right]-\exp\left[\frac{2GM_0}{c^2r}+2\sigma_0\right]\right];$$

即有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2=c^2u_0[\exp(4c^{-2}u+4\sigma_0)-\exp(2c^{-2}u+2\sigma_0)]; \tag{44}$$

将方程（44）式二边对参量 φ 进行求导，即得天体在吸收能量并当 $1>V_{\mathrm{m}}c^{-1}\geq 0$ 时轨道的一般性 Binet 方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0[2\exp(4c^{-2}u+4\sigma_0)-\exp(2c^{-2}u+2\sigma_0)]\text{。} \tag{45}$$

在极弱场时，因 $4c^{-2}u+4\sigma_0\to 0$，故将方程（45）式右边二项予 $c^{-2}u+\sigma_0$ 以零阶 Taylor 级数展开即得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0,\quad 4c^{-2}u+4\sigma_0\to 0\text{。} \tag{46}$$

此为 Newton 引力理论的 Binet 方程（33）式形式。

在弱场时，因 $4c^{-2}u+4\sigma_0<<1$，故将方程（45）式右边二项予 $c^{-2}u+\sigma_0$ 以一阶 Taylor 级数展开得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0[2(1+4c^{-2}u+4\sigma_0)-(1+2c^{-2}u+2\sigma_0)]$$
$$=u_0[1+6c^{-2}u+6\sigma_0];$$

即得（45）式在弱场 $4c^{-2}u+4\sigma_0<<1$ 时的 Binet 方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+[1-6c^{-2}u_0]u=u_0[1+6\sigma_0]\text{。} \tag{47}$$

在强场情况下，由方程（45）式得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0[2\exp(4c^{-2}u+4\sigma_0)-\exp(2c^{-2}u+2\sigma_0)]$$
$$=u_0\exp(2c^{-2}u+2\sigma_0)[2\exp(2c^{-2}u+2\sigma_0)-1];$$

因在场强情况下一般有

$$2\exp(2c^{-2}u+2\sigma_0)>>1、2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma_0)>>u,$$

故得行星运行在此强场时的 Binet 方程形式近似为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma_0)\text{。} \tag{48}$$

作为探讨，在考虑行星运行参量方程（35）式具有较为普适意义的情况下，可初步给出方程（5）、（6）二式所分别对应的一般性 Binet 方程简略参考形式。

1.4.2 在吸收能量并当 $V_{\mathrm{m}}c^{-1}>1$ 时的一般性 Binet 方程

由方程（5）、（10）二式得质量等式

$$\frac{m_0}{\sqrt{(V_{\mathrm{m}}c^{-1})^2-1}}=m_0\exp\left[\frac{GM_0}{c^2r}+\sigma_1\right], \tag{49}$$

式中 σ_1 为待定常量；即得方程

$$V_{\mathrm{m}}^2=c^2\left[1+\exp\left[-\frac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma_1\right]\right]\text{。} \tag{50}$$

依据方程（35）式，当 $B=B_{01}$ 为常量时，则由方程（50）式得其角动量方程为

$$mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-G\frac{M_0m_0}{B_{01}}\exp\left[-\frac{GM_0}{c^2r}-\sigma_1\right]$$
$$=L_{01}\exp\left[-\frac{GM_0}{c^2r}-\sigma_1\right], \tag{51}$$

式中 L_{01} 为常量，$L_{01}=-GM_0m_0B_{01}^{-1}$。

由方程（50）、（51）二式得方程组

$$\begin{cases}V_{\mathrm{m}}^2=\left[\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right]^2+\left[r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right]^2\\ \qquad=c^2\left[1+\exp\left[-\dfrac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma_1\right]\right],\\ m_0r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=L_{01}\exp\left[-\dfrac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma_1\right]\text{。}\end{cases} \tag{52}$$

在方程组（52）式中消去时间参量t，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2=c^2u_{01}[\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)+\exp(2c^{-2}u+2\sigma_1)]；\quad(53)$$

式中u_{01}为常量，$u_{01}=[GM_0m_0L_{01}^{-1}]^2=B_{01}^2$。

将方程（53）式二边对参量φ求导，即得方程（5）、（10）二式所对应的天体在吸收能量及超光速运行（$V_\mathrm{m}c^{-1}>1$）时轨道的一般性 Binet 方程参考形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_{01}[2\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)+\exp(2c^{-2}u+2\sigma_1)]。\quad(54)$$

在极弱场时，因$4c^{-2}u+4\sigma_1\to0$，故将方程（54）式右边予$c^{-2}u+\sigma_1$以零阶 Taylor 级数展开即得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=3u_{01}，\quad 4c^{-2}u+4\sigma_1\to0。\quad(55)$$

此与 Newton 引力理论的 Binet 方程（33）式形式相同。

在弱场时，因$4c^{-2}u+4\sigma_1<<1$，故将方程（54）式右边予$c^{-2}u+\sigma_1$以一阶 Taylor 级数展开得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_{01}[2(1+4c^{-2}u+4\sigma_1)+(1+2c^{-2}u+2\sigma_1)]$$
$$=u_{01}[3+10c^{-2}u+10\sigma_1]；$$

即得在弱场$4c^{-2}u+4\sigma_1<<1$时的 Binet 方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+[1-10c^{-2}u_{01}]u=u_{01}[3+10\sigma_1]。\quad(56)$$

在强场情况下，因

$2\exp(2c^{-2}u+2\sigma_1)>>1$、

$2u_{01}\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)>>u$，

故方程（54）式近似成为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=2u_{01}\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)。\quad(57)$$

1.4.3 在释放能量($+\infty>V_\mathrm{m}c^{-1}\geq0$)时的一般性 Binet 方程

由方程（6）、（11）二式得质量等式

$$\frac{m_0}{\sqrt{1+(V_\mathrm{m}c^{-1})^2}}=m_0\exp\left[-\frac{GM_0}{c^2r}-\sigma_2\right],\quad(58)$$

式中σ_2为待定常量。

依据方程（58）式得

$$V_\mathrm{m}^2=c^2\left[\exp\left[\frac{2GM_0}{c^2r}+2\sigma_2\right]-1\right]。\quad(59)$$

依据（35）式，当$B=B_{02}$为常量时，得方程（59）式所对应的角动量方程为

$$mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=G\frac{M_0m_0}{B_{02}}\exp\left[\frac{GM_0}{c^2r}+\sigma_2\right]$$
$$=L_{02}\exp\left[\frac{GM_0}{c^2r}+\sigma_2\right],\quad(60)$$

式中L_{02}为常量，$L_{02}=GM_0m_0B_{02}^{-1}$。

由方程（59）、（60）二式得方程组

$$\begin{cases}V_\mathrm{m}^2=\left[\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right]^2+\left[r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right]^2\\ \quad=c^2\left[\exp\left[\dfrac{2GM_0}{c^2r}2\sigma_2\right]-1\right],\\ m_0r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=L_{02}\exp\left[\dfrac{2GM_0}{c^2r}+2\sigma_2\right]。\end{cases}\quad(61)$$

在方程组（61）式中消去时间参量t，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2=c^2u_{02}[\exp(-2c^{-2}u-2\sigma_2)-\exp(-4c^{-2}u-4\sigma_2)]；\quad(62)$$

式中u_{02}为常量，$u_{02}=[GM_0m_0L_{02}^{-1}]^2=B_{02}^2$。

将方程（62）式二边对参量φ求导，即得方程（6）、（11）二式所对应的天体在释放能量及当$+\infty>V_\mathrm{m}c^{-1}\geq0$时运行轨道的一般性 Binet 方程参考形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_{02}[2\exp(-4c^{-2}u-4\sigma_2)-\exp(-2c^{-2}u-2\sigma_2)]。\quad(63)$$

在极弱场时，因$4c^{-2}u+4\sigma_2\to0$，故将方程（63）式右边予$c^{-2}u+\sigma_2$以零阶 Taylor 级数展开即得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_{02}，\quad 4c^{-2}u+4\sigma_2\to0。\quad(64)$$

在弱场时，因$4c^{-2}u+4\sigma_2<<1$，故将方程（63）式右边予$c^{-2}u+\sigma_2$以一阶 Taylor 级数展开得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_{02}[2(1-4c^{-2}u-4\sigma_2)-(1-2c^{-2}u-2\sigma_2)]$$
$$=u_{02}[1-6c^{-2}u-6\sigma_2]；$$

即得在弱场$4c^{-2}u+4\sigma_2<<1$时的 Binet 方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+[1+6c^{-2}u_{02}]u=u_{02}[1-6\sigma_2]。\quad(65)$$

在强场情况下，因方程（63）式中

$2c^{-2}u+2\sigma_2>>1$、

$u>>u_{02}[2\exp(-4c^{-2}u-4\sigma_2)-\exp(-2c^{-2}u-2\sigma_2)]$，

则得行星运行轨道的 Binet 方程近似形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\approx0；\quad(66)$$

或由方程（62）式在强场时因

$\exp(-2c^{-2}u-2\sigma_2)]<<1$、

$c^2u_{02}\exp(-2c^{-2}u-2\sigma_2)<<u^2$，

即直接可得强场中的行星运行轨道方程近似形式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2\approx0。\quad(67)$$

因在此强场时方程（67）式为方程（66）式的前部方程，对参量φ求导可直接给出方程（66）式，所以在此强场时的行星运行轨道方程讨论以方程（67）式为主。

1.5 在极弱场、弱场与强场时的 Binet 方程参考解

1.5.1 在吸收能量并当$1 > V_{\mathrm{m}}c^{-1} \geq 0$时 Binet 方程参考解

对于行星运行在极弱场时的方程（46）式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = u_0, \quad 4c^{-2}u + 4\sigma_0 \to 0$$

此为 Newton 引力理论的 Binet 方程形式；其通解为

$$u = u_0 + C_0 \cos(\varphi - C_1); \tag{68}$$

故有在极弱场时 r 方程的一般形式为

$$r = \frac{P_{\mathrm{N0}}}{1 + \varepsilon_{\mathrm{N0}} \cos(\varphi - C_1)}; \tag{69}$$

这里$C_0 \geq 0$为待定常量，C_1为角度初值；适当地选择φ可使初值$C_1 = 0$；$P_{\mathrm{N0}} = GM_0 u_0^{-1}$，$\varepsilon_{\mathrm{N0}} = C_0 u_0^{-1}$。

对于行星运行在弱场时的方程（47）式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + [1 - 6c^{-2}u_0]u = u_0[1 + 6\sigma_0],$$

$$4c^{-2}u + 4\sigma_0 << 1$$

方程的通解为

$$u = u_0 \frac{1 + 6\sigma_0}{1 - 6c^{-2}u_0} + C_0 \cos[\sqrt{1 - 6c^{-2}u_0}(\varphi - C_1)]$$

$$= \varepsilon_{00}[1 + \varepsilon_{01} \cos[\varepsilon_{02}(\varphi - C_1)]]; \tag{70}$$

故有行星运行在弱场时 r 方程的一般形式为

$$r = \frac{P_{0\cos}}{1 + \varepsilon_{01} \cos[\varepsilon_{02}(\varphi - C_1)]}; \tag{71}$$

这里$C_0 \geq 0$为待定常量，C_1为角度初值；适当地选择φ可使初值$C_1 = 0$；

$$\varepsilon_{00} = u_0(1 + 6\sigma_0)(1 - 6c^{-2}u_0)^{-1}, \quad P_{0\cos} = GM_0 \varepsilon_{00}^{-1},$$

$$\varepsilon_{01} = C_0 \varepsilon_{00}^{-1}, \quad \varepsilon_{02} = \sqrt{1 - 6c^{-2}u_0}。$$

对于方程（71）式，当$6c^{-2}u_0 \to 0$时，$\varepsilon_{02} \approx 1$，其即转化为极弱场时的方程（68）式形式。

对于行星运行在强场时的方程（48）式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} = 2u_0 \exp(4c^{-2}u + 4\sigma_0), \quad 2c^{-2}u + 2\sigma_0 >> 1$$

因可变换形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2,$$

故上述方程（48）式可转化为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = 2u_0 \exp(4c^{-2}u + 4\sigma_0);$$

对方程积分得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = c^2 u_0 \exp(4c^{-2}u + 4\sigma_0) + C_{00}, \tag{72}$$

式中C_{00}为待定常量。

在强场时因$2c^{-2}u + 2\sigma_0 >> 1$，故由方程（44）式得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2 = c^2 u_0[\exp(4c^{-2}u + 4\sigma_0)$$

$$- \exp(2c^{-2}u + 2\sigma_0)]$$

$$= c^2 u_0 \exp(2c^{-2}u + 2\sigma_0)[\exp(2c^{-2}u + 2\sigma_0) - 1]$$

$$\approx c^2 u_0 \exp(4c^{-2}u + 4\sigma_0); \tag{73}$$

在强场时一般地有$c^2 u_0 \exp(4c^{-2}u + 4\sigma_0) >> u^2$；方程（73）式成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 \approx c^2 u_0 \exp(4c^{-2}u + 4\sigma_0); \tag{74}$$

故得方程（72）式中的常量$C_{00} = 0$；方程（72）式成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = c^2 u_0 \exp(4c^{-2}u + 4\sigma_0)。 \tag{75}$$

强场时的方程（75）式可由方程（44）式直接确定。

对于方程（75）式，得φ的解为

$$\varphi = \pm 0.5c\sqrt{u_0^{-1}} \exp(-2c^{-2}u - 2\sigma_0) + C_{01}; \tag{76}$$

这里C_{01}为待定常量。

由方程（76）式得u、r的相应解为

$$u = -c^2\sigma_0 - 0.5c^2 \ln[\pm 2c^{-1}\sqrt{u_0}(\varphi - C_{01})], \tag{77}$$

$$r = \frac{GM_0}{-c^2\sigma_0 - 0.5c^2 \ln[\pm 2c^{-1}\sqrt{u_0}(\varphi - C_{01})]}; \tag{78}$$

这里当取“＋”号、且$0 < \varphi - C_{01} << c\sqrt{u_0^{-1}}$时，或当取“－”号、且$0 < C_{01} - \varphi << c\sqrt{u_0^{-1}}$时，方程（76）～（78）式皆为实解；其变化范围为

$$0 < r << c^{-2}GM_0(-\sigma_0 - 0.5\ln 2)^{-1}。 \tag{79}$$

将方程（78）式表示为一般形式

$$r = \frac{l_{\ln}}{1 + \kappa \ln[\pm\tau(\varphi - C_{01})]}; \tag{80}$$

式中$l_{\ln}$、κ、τ为r方程曲线特征常量；得不同方程曲线形态之间的常量关系方程为

$$l_{\ln} = -c^{-2}GM_0\sigma_0^{-1} = 2a, \quad \kappa = 0.5\sigma_0^{-1}, \quad \tau = 2c^{-1}\sqrt{u_0};$$

这里常量$l_{\ln}$与κ之间还可表示为

$$\kappa = -0.5c^2(GM_0)^{-1}l_{\ln} = -c^2 a(GM_0)^{-1}。 \tag{81}$$

同时相应地，得在强场情况下，u_0、σ与r方程曲线特征常量的关系为

$$u_0 = 0.25c^2\tau^2, \tag{82}$$

$$\sigma_0 = 0.5\kappa^{-1}。 \tag{83}$$

依上述φ、r的实解得在强场$2c^{-2}u + 2\sigma_0 >> 1$时有

$$0 < C_{01} - \varphi << 0.5c\sqrt{u_0^{-1}} \exp(-1), \tag{84}$$

$$0 < r << c^{-2}GM_0(0.5 - \sigma_0)^{-1}。 \tag{85}$$

1.5.2 在吸收能量并当$V_{\mathrm{m}}c^{-1}>1$时 Binet 方程参考解

对于行星运行在极弱场时的方程（55）式

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=3u_{01},\quad 4c^{-2}u+4\sigma_1\to 0$$

此与 Newton 引力理论的 Binet 方程形式相同；其通解为

$$u=3u_{01}+C_0\cos(\varphi-C_1)\text{；}\tag{86}$$

故有在极弱场时 r 方程的一般形式为

$$r=\frac{P_{\mathrm{N1}}}{1+\varepsilon_{\mathrm{N1}}\cos(\varphi-C_1)}\text{；}\tag{87}$$

这里 $C_0\geq 0$ 为待定常量，C_1 为角度初值；$P_{\mathrm{N1}}=3^{-1}GM_0u_{01}^{-1}$，$\varepsilon_{\mathrm{N1}}=3^{-1}C_0u_{01}^{-1}$。

对于行星运行在弱场时的方程（56）式

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+[1-10c^{-2}u_{01}]u=u_{01}[3+10\sigma_1],\quad 4c^{-2}u+4\sigma_1<<1$$

方程的通解为

$$\begin{aligned}u&=u_{01}\frac{3+10\sigma_1}{1-10c^{-2}u_{01}}+C_0\cos[\sqrt{1-10c^{-2}u_{01}}(\varphi-C_1)]\\&=\varepsilon_{10}[1+\varepsilon_{11}\cos[\varepsilon_{12}(\varphi-C_1)]]\text{；}\end{aligned}\tag{88}$$

故有行星运行在弱场时 r 方程的一般形式为

$$r=\frac{P_{1\cos}}{1+\varepsilon_{11}\cos[\varepsilon_{12}(\varphi-C_1)]}\text{；}\tag{89}$$

这里 $C_0\geq 0$ 为待定常量，C_1 为角度初值；适当地选择 φ 可使初值 $C_1=0$；

$\varepsilon_{10}=u_{01}(3+10\sigma_1)(1-10c^{-2}u_{01})^{-1}$，$P_{1\cos}=GM_0\varepsilon_{10}^{-1}$，$\varepsilon_{11}=C_0\varepsilon_{10}^{-1}$，$\varepsilon_{12}=\sqrt{1-10c^{-2}u_{01}}$。

对于方程（89）式，当 $10c^{-2}u_{01}\to 0$ 时，$\varepsilon_{12}\approx 1$，其即转化为极弱场时的方程（87）式形式。

对于行星运行在强场时的方程（57）式

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}=2u_{01}\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1),\quad 2c^{-2}u+2\sigma_1>>1$$

其与方程（48）式具有相同形式；同样积分一次可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=c^2u_{01}\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)+C_{00},\tag{90}$$

这里 C_{00} 为待定常量。

同样地，在强场时因 $2c^{-2}u+2\sigma_1>>1$，故由方程（53）式得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2&=c^2u_{01}[\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)\\&\quad+\exp(2c^{-2}u+2\sigma_1)]\\&=c^2u_{01}\exp(2c^{-2}u+2\sigma_1)[\exp(2c^{-2}u+2\sigma_1)+1]\\&\approx c^2u_{01}\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)\text{；}\end{aligned}\tag{91}$$

在强场时一般地因有 $c^2u_{01}\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)>>u^2$；则方程（91）式成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\approx c^2u_{01}\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)\text{；}\tag{92}$$

故得方程（90）式中的常量 $C_{00}=0$；方程（90）式成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=c^2u_{01}\exp(4c^{-2}u+4\sigma_1)\text{。}\tag{93}$$

强场时轨道方程（93）式可由方程（53）时直接得到。

对于方程（93）式，可得 φ 的解为

$$\varphi=\pm 0.5c\sqrt{u_{01}^{-1}}\exp(-2c^{-2}u-2\sigma_1)+C_{01}\text{；}\tag{94}$$

这里 C_{01} 为待定常量；即得此场强时 u、r 的相应解为

$$u=-c^2\sigma_1-0.5c^2\ln[\pm 2c^{-1}\sqrt{u_{01}}(\varphi-C_{01})]\text{，}\tag{95}$$

$$r=\frac{GM_0}{-c^2\sigma_1-0.5c^2\ln[\pm 2c^{-1}\sqrt{u_{01}}(\varphi-C_{01})]}\text{。}\tag{96}$$

1.5.3 在释放能量($+\infty>V_{\mathrm{m}}c^{-1}\geq 0$)时 Binet 方程参考解

对于行星运行在极弱场时的方程（64）式

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_{02},\quad 4c^{-2}u+4\sigma_2\to 0$$

此与 Newton 引力理论的 Binet 方程形式相同；其通解为

$$u=u_{02}+C_0\cos(\varphi-C_1)\text{；}\tag{97}$$

故有在极弱场时 r 方程的一般形式为

$$r=\frac{P_{\mathrm{N2}}}{1+\varepsilon_{\mathrm{N2}}\cos(\varphi-C_1)}\text{；}\tag{98}$$

这里 $C_0\geq 0$ 为待定常量，C_1 为角度初值；$P_{\mathrm{N2}}=u_{02}^{-1}GM_0$，$\varepsilon_{\mathrm{N2}}=C_0u_{02}^{-1}$。

对于行星运行在弱场时的方程（65）式

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+[1+6c^{-2}u_{02}]u=u_{02}[1-6\sigma_2],\quad 4c^{-2}u+4\sigma_2<<1$$

方程的通解为

$$\begin{aligned}u&=u_{02}\frac{1-6\sigma_2}{1+6c^{-2}u_{02}}+C_0\cos[\sqrt{1+6c^{-2}u_{02}}(\varphi-C_1)]\\&=\varepsilon_{20}[1+\varepsilon_{21}\cos[\varepsilon_{22}(\varphi-C_1)]]\text{；}\end{aligned}\tag{99}$$

故有行星运行在弱场时 r 方程的一般形式为

$$r=\frac{P_{2\cos}}{1+\varepsilon_{21}\cos[\varepsilon_{22}(\varphi-C_1)]}\text{；}\tag{100}$$

这里 $C_0\geq 0$ 为待定常量，C_1 为角度初值；

$\varepsilon_{20}=u_{02}(1-6\sigma_2)(1+6c^{-2}u_{02})^{-1}$，$P_{2\cos}=GM_0\varepsilon_{20}^{-1}$，$\varepsilon_{21}=C_0\varepsilon_{20}^{-1}$，$\varepsilon_{22}=\sqrt{1+6c^{-2}u_{02}}$。

对于方程（100）式，当 $6c^{-2}u_{02}\to 0$ 时，$\varepsilon_{22}\approx 1$，其即转化为极弱场时的方程（98）式形式。

对于行星运行在强场时的轨道方程近似形式（67）式

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2\approx 0,$$

方程中左边二项的对应表示为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\approx 0,\ u\approx 0; \tag{101}$$

故得在此强场时行星运行轨道的 r 方程趋势形式

$$r=\frac{GM_0}{u}\to+\infty。 \tag{102}$$

1.6 天体运行轨道在极弱场时的三个特别解形式

在极弱场时，由三种情况下相应的一般性 Binet 方程（46）式、（55）式及（64）式，分别给出通解和相应的天体运行轨道 r 方程形式（69）式、（87）式及（98）式。

下面作为讨论，在极弱场时，由三种情况下的上述各一般性 Binet 方程的前部方程（44）式、（53）式与（62）式，分别给出相应的天体运行轨道方程及其特别解。

1.6.1 在吸收能量并当 $1>V_{\mathrm{m}}c^{-1}\geq 0$ 时的极弱场中特别解

由方程（44）式，在极弱时因 $4c^{-2}u+4\sigma_0\to 0$，将方程右边二项予以 Taylor 级数零阶展开，即得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2\approx 0; \tag{103}$$

方程中左边二项的对应表示为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\approx 0,\ u\approx 0; \tag{104}$$

故得在此强场时行星运行轨道的 r 方程特别解形式

$$r=\frac{GM_0}{u}\to+\infty。 \tag{105}$$

1.6.2 在吸收能量并当 $V_{\mathrm{m}}c^{-1}>1$ 时的极弱场中特别解

由方程（53）式，在极弱时因 $4c^{-2}u+4\sigma_1\to 0$，将方程右边二项予以 Taylor 级数零阶展开，即得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2=2c^2u_{01}; \tag{106}$$

将方程二边对参量 φ 进行求导得 Binet 方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=0; \tag{107}$$

求解方程（107）式并代回到方程（106）式中，得通解

$$u=\sqrt{2}c\sqrt{u_{01}}\cos(\varphi-C_1); \tag{108}$$

这里 C_1 为角度初值；即得在此极弱场时行星运行轨道的 r 方程特别解形式

$$r=\frac{GM_0}{\sqrt{2}c\sqrt{u_{01}}\cos(\varphi-C_1)}。 \tag{109}$$

1.6.3 在释放能量($+\infty>V_{\mathrm{m}}c^{-1}\geq 0$)时的极弱场中特别解

由方程（62）式，在极弱时因 $4c^{-2}u+4\sigma_2\to 0$，将方程右边二项予以 Taylor 级数零阶展开，即得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2\approx 0; \tag{110}$$

方程中左边二项的对应表示为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\approx 0,\ u\approx 0; \tag{111}$$

故得在此强场时行星运行轨道的 r 方程特别解形式

$$r=\frac{GM_0}{u}\to+\infty。 \tag{112}$$

1.7 行星轨道在弱场时近日点进动或退动的解析分析

1.7.1 在吸收能量并当 $1>V_{\mathrm{m}}c^{-1}\geq 0$ 时进动角方程形式

依据行星在弱场时轨道方程（71）式

$$r=\frac{P_{0\cos}}{1+\varepsilon_{01}\cos[\varepsilon_{02}(\varphi-C_1)]};$$

当

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=r^2P_{0\cos}^{-1}\varepsilon_{01}\varepsilon_{02}\sin[\varepsilon_{02}(\varphi-C_1)]=0 \tag{113}$$

时，行星处于远日距离 $r_{\max}$ 或近日距离 $r_{\min}$；当行星处于其中的近日点距离 $r_{\min}$ 时，由上述方程得行星于轨道近日点第 n 周及第 $n+1$ 周角度 φ_n 及 φ_{n+1} 的方程为

$$\varepsilon_{02}(\varphi_n-C_1)=2n\pi, \tag{114}$$

$$\varepsilon_{02}(\varphi_{n+1}-C_1)=2(n+1)\pi; \tag{115}$$

即有

$$\varepsilon_{02}(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=2(n+1)\pi-2n\pi=2\pi; \tag{116}$$

相应地得方程（70）式中的待定常量 C_0 为

$$C_0=GM_0r_{\min}^{-1}-\varepsilon_{00}; \tag{117}$$

取行星轨道相邻二周近日点展开的角度 $\varphi_{n+1}-\varphi_n=\varphi_0$，则由（116）式得 φ_0 的方程为

$$\varphi_0=\frac{2\pi}{\varepsilon_{02}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-6c^{-2}u_0}}\approx 2\pi(1+3c^{-2}u_0); \tag{118}$$

故得弱场时行星吸收能量运行轨道近日点进动角 $\Delta\varphi_0$ 为

$$\Delta\varphi_0=\varphi_0-2\pi\approx\frac{6\pi}{c^2}u_0=\frac{6\pi GM_0}{c^2a(1-e^2)}。 \tag{119}$$

方程（119）式与 Einstein 广义相对论给出的较为符合实际观测数据的结论[6]一致。

1.7.2 在吸收能量并当 $V_{\mathrm{m}}c^{-1}>1$ 时进动角方程形式

依据行星在弱场时轨道方程（89）式

$$r=\frac{P_{1\cos}}{1+\varepsilon_{11}\cos[\varepsilon_{12}(\varphi-C_1)]};$$

同样地，当

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=r^2P_{1\cos}^{-1}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\sin[\varepsilon_{12}(\varphi-C_1)]=0 \tag{120}$$

时，行星处于远日距离 $r_{\max}$ 或近日距离 $r_{\min}$；当行星处于其中的近日点距离 $r_{\min}$ 时，由上述方程得行星于轨道近日点第 n 周及第 $n+1$ 周角度 φ_n 及 φ_{n+1} 的方程为

$$\varepsilon_{12}(\varphi_n-C_1)=2n\pi,\ \varepsilon_{12}(\varphi_{n+1}-C_1)=2(n+1)\pi;$$

即得

$$\varepsilon_{12}(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=2(n+1)\pi-2n\pi=2\pi; \tag{121}$$

取行星轨道相邻二周近日点展开的角度 $\varphi_{n+1}-\varphi_n=\varphi_0$，

则由（121）式得φ_0的方程为

$$\varphi_0=\frac{2\pi}{\varepsilon_{12}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-10c^{-2}u_{01}}}\approx 2\pi(1+5c^{-2}u_{01})\text{；}\quad(122)$$

故得在弱场时行星吸收能量超光速运行轨道近日点进动角$\Delta\varphi_0$为

$$\Delta\varphi_0=\varphi_0-2\pi\approx 10\pi c^{-2}u_{01}\text{。}\quad(123)$$

1.7.3 在释放能量($+\infty>V_{\mathrm{m}}c^{-1}\geq 0$)时的进动角方程形式

依据行星在弱场时轨道方程（100）式

$$r=\frac{P_{2\cos}}{1+\varepsilon_{21}\cos[\varepsilon_{22}(\varphi-C_1)]}\text{；}$$

当

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=r^2P_{2\cos}^{-1}\varepsilon_{21}\varepsilon_{22}\sin[\varepsilon_{22}(\varphi-C_1)]=0\quad(124)$$

时，行星处于远日距离$r_{\max}$或近日距离$r_{\min}$；当行星处于其中的近日点距离$r_{\min}$时，由上述方程得行星于轨道近日点第n周及第$n+1$周角度φ_n及φ_{n+1}的方程为

$$\varepsilon_{22}(\varphi_n-C_1)=2n\pi\text{，}\ \varepsilon_{22}(\varphi_{n+1}-C_1)=2(n+1)\pi\text{；}$$

即有

$$\varepsilon_{22}(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=2(n+1)\pi-2n\pi=2\pi\text{；}\quad(125)$$

取行星轨道相邻二周近日点展开的角度$\varphi_{n+1}-\varphi_n=\varphi_0$，则由（125）式得$\varphi_0$的方程为

$$\varphi_0=\frac{2\pi}{\varepsilon_{22}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+6c^{-2}u_{02}}}\approx 2\pi(1-3c^{-2}u_{02})\text{；}\quad(126)$$

故得弱场时行星释放能量运行轨道近日点进动角$\Delta\varphi_0$为

$$\Delta\varphi_0=\varphi_0-2\pi\approx -6\pi c^{-2}u_{02}\text{。}\quad(127)$$

方程（127）式表明，天体在释放能量时于弱场全速域运行轨道的近日点是退动性质的。

在体系构造上，任何关于天体运行的连续轨道理论都应有其具体的 Binet 方程表述，并应在极弱场时退化为 Newton 理论形式，在弱场时给出诸如行星近日点进动速率的解。由于方程（45）式、（54）式与（63）式皆是参照方程（30）式建立的，有关待定常量亦需在极弱场时的方程（30）式予以确定，故在极弱场时诸方程自然能够退化为 Newton 方程形式，而非其普适性所致。

1.8 连续轨道理论与 Einstein 广义相对论的区别

在 Einstein 广义相对论中，天体运行轨道的 Einstein－Binet 方程一表示形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0+3c^{-2}u^2\text{；}\quad(128)$$

此方程在极弱场时因$3c^{-2}u\to 0$，故能够退化为 Newton 引力理论的 Binet 方程（33）式的形式。

连续轨道理论的一般性 Binet 方程（45）式与 Einstein－Binet 方程（128）式相比较，显然方程（45）式较为复杂。但 Einstein－Binet 方程（128）式在弱场$3c^{-2}u<<1$时，不能转化为类如方程（47）式的简单形式，一般需要先将此方程拆分为二个方程，确定其一近似解，然后代回拆分前的方程中经过级数展开、截断、对比等步骤给出方程解形式，再求出行星近日点进动速率，解法过程稍显繁杂，结果拼凑成分较大。

1.9 非线性微分方程的近似等效解析解法及其应用

一般的非线性微分方程难求解析解，可用近似等效解析解法分析。此方法为：按照分析方向将难解的非线性动力学微分方程简化有解析解的线性或非线性微分方程，将此解析解拓展为初始近似等效解析解，将此初始近似解代入原微分方程中试算，修正近似解，再代入原微分方程，如此循环修正代入试算，确定最终近似等效解析解形式。

与解微分方程的 Lagrange 参数变易法比较，近似等效解析解法是趋势性近似方法，通常情况不能给出微分方程的解析解，而且在解的拓展方向、试算过程有所省略及修正代入试算次数等原因，其仅是给出近似等效解析解。

对于上述 Einstein－Binet 方程（128）式，在波动分析上简化后的线性方程及其解析解形式分别为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0\text{，}\quad(129)$$

$$u_{\mathrm{as}}=u_0[1+\xi_{\mathrm{asA}}\cos(\varphi-\xi_{\mathrm{as0}})]\text{；}\quad(130)$$

则在进动角试算方向取原方程的初始近似等效解析解为

$$u_{\mathrm{eas}}\approx\xi_1[1+\xi_2\cos[\nu(\varphi-\xi_3)]]\text{，}\quad(131)$$

上二式中ξ_{asA}、ξ_{as0}，ξ_1、ξ_2、ξ_3、ν皆为待定常量。

将此初始近似解（131）式代入方程（128）式中，得

$$-\xi_1\xi_2\nu^2\cos[\nu(\varphi-\xi_3)]+\xi_1[1+\xi_2\cos[\nu(\varphi-\xi_3)]]$$
$$=u_0+3c^{-2}\xi_1^2[1+\xi_2\cos[\nu(\varphi-\xi_3)]]^2\text{；}\quad(132)$$

考虑$c^{-2}u_0<<1$时$\xi_2\to e$，故当$e^2<<1$时$\xi_2^2<<1$，则

$$\xi_1\xi_2[1-\nu^2-6c^{-2}\xi_1]\cos[\nu(\varphi-\xi_3)]$$
$$-[3c^{-2}\xi_1^2-\xi_1+u_0]=0\text{；}$$

有

$$\begin{cases}\xi_1\xi_2[1-\nu^2-6c^{-2}\xi_1]=0\text{，}\\ 3c^{-2}\xi_1^2-\xi_1+u_0=0\text{；}\end{cases}\quad(133)$$

当$\xi_1\xi_2=0$时不需解ν；当$\xi_1\xi_2\neq 0$且$12c^{-2}u_0<<1$时得

$$\xi_1=\frac{1-\sqrt{1-12c^{-2}u_0}}{6c^{-2}}\approx\frac{1-[1-6c^{-2}u_0]}{6c^{-2}}=u_0\text{，}\quad(134)$$

$$\nu=\sqrt{1-6c^{-2}\xi_1}=\sqrt{1-6c^{-2}u_0}\approx 1-3c^{-2}u_0\text{；}\quad(135)$$

得$e^2<<1$时 Einstein－Binet 方程（128）式弱场等效解析解近似为

$$u_{\mathrm{eas}}\approx u_0[1+\xi_2\cos[(1-3c^{-2}u_0)(\varphi-\xi_3)]]\text{；}\quad(136)$$

则基于此近似等效解析解法一次试算即直接给出 Einstein－Binet 方程（128）式中的行星近日点进动角方程为

$$\Delta\varphi_{0\mathrm{EB}}=\frac{2\pi}{1-3c^{-2}u_0}-2\pi\approx\frac{6\pi}{c^2}u_0=\frac{6\pi GM_0}{c^2a(1-e^2)}\text{。}\quad(137)$$

方程（45）式在极弱场时直接退化为 Newton 引力理论的 Binet 方程（33）式，其在弱场时形式（47）式给出的行星近日点进动角方程（119）式与由 Einstein 广义相对论给出的方程（137）式一致，此分别对应于方程（45）式右边二项的 Taylor 级数零阶展开与一阶展开形式，或方程（44）式右边二项 Taylor 级数一阶展开与二阶展开形式。

上述分析表明，与 Einstein 广义相对论比较，虽然连续轨道理论对天体运行轨道的解析推演描述稍显简练，但由于理论包含有条件假设成分的方程（1）、（35）二式，且在弱场与强场时天体超光速运行轨道方程及近似解析解还有待观测数据验证，故其仍是属于探索性质的理论。

2 自相似分形扩展方程、分维扩展方程与天体运行背景介质理论的离散轨道描述

2.1 自相似分形扩展方程与分维扩展方程

2.1.1 遍历常数与自相似分形扩展方程形式

考虑一集合初始测度A_0在第i次操作上标度ε_i及集合单位$\theta(\varepsilon_i)$的数量n_i，当$0<\varepsilon_i\le 1$、$n_i\ge 1$时，分别有差分方程形式

$$\varepsilon_{i+1}^{-1}=Z\varepsilon_i^{-1}, \tag{138}$$

$$n_{i+1}=Wn_i; \tag{139}$$

式中Z、W为操作常数，i为自然数；$Z\ge 1$、$W\ge 1$，$0\le i<+\infty$；$\varepsilon_0^{-1}=1$，$n_0=1$。

差分方程（138）式、（139）式的解分别为

$$\varepsilon_i=Z^{-i}; \tag{140}$$

$$n_i=W^i。 \tag{141}$$

其当常数$Z=1$时，有$\varepsilon_i=1$；当常数$W=1$时，有$n_i=1$。

由方程（140）式、（141）式分别得

$$\ln\varepsilon_i=-i\ln Z; \tag{142}$$

$$\ln n_i=i\ln W; \tag{143}$$

即有等式

$$\ln Z\ln n_i=\ln W\ln\varepsilon_i^{-1}。 \tag{134}$$

当$i\ge 1$、$Z>1$时，由方程（44）式得

$$\frac{\ln n_i}{\ln\varepsilon_i^{-1}}=\frac{\ln W}{\ln Z}; \tag{145}$$

得方程（145）式在自然数i于范围$1\le i<+\infty$中的遍历常数α为

$$\alpha=\frac{\ln W}{\ln Z}, \tag{146}$$

则有

$$n_i=\varepsilon_i^{-\alpha}。 \tag{147}$$

显然方程(146)式中的遍历常数α即为当$i\to+\infty$时生成集合的Hausdorff维数；而方程（147）式则为自相似分形扩展方程形式。

2.1.2 遍历常数与自相似分维扩展方程形式

仍然考虑一集合初始测度A_0在第i次操作上标度ε_i及集合单位$\theta(\varepsilon_i)$的数量n_i，当$\varepsilon_i\ge 1$、$n_i\ge 1$时，分别有差分方程形式

$$\varepsilon_{i+1}=Z\varepsilon_i, \tag{148}$$

$$n_{i+1}=Wn_i; \tag{149}$$

式中Z、W为操作常数，i为自然数；$Z\ge 1$、$W\ge 1$，$0\le i<+\infty$；$\varepsilon_0=1$，$n_0=1$。

差分方程（148）式、（149）式的解分别为

$$\varepsilon_i=Z^i, \tag{150}$$

$$n_i=W^i; \tag{151}$$

其当常数$Z=1$时，有$\varepsilon_i=1$；当常数$W=1$，有$n_i=1$。

由方程（148）式、（149）式分别得

$$\ln\varepsilon_i=i\ln Z; \tag{152}$$

$$\ln n_i=i\ln W; \tag{153}$$

即有等式

$$\ln Z\ln n_i=\ln W\ln\varepsilon_i。 \tag{154}$$

当$i\ge 1$、$Z>1$时，由方程（154）式得

$$\frac{\ln n_i}{\ln\varepsilon_i}=\frac{\ln W}{\ln Z}; \tag{155}$$

得方程（155）式在自然数i于范围$1\le i<+\infty$中的遍历常数β为

$$\beta=\frac{\ln W}{\ln Z}; \tag{156}$$

则有

$$n_i=\varepsilon_i^{\beta}。 \tag{157}$$

方程（157）式中的遍历常数β与方程（146）式中的遍历常数α是有所不同的；为区别二者的表述，故定义方程（157）式为自相似分维扩展方程形式。

2.2 分形扩展及分维扩展的连续性微分方程形式讨论

2.2.1 分形扩展方程与分维扩展方程

作为对上述自相似分形扩展与自相似分维扩展差分方程的连续性讨论，下面初步其给出趋势性的轮廓描述。

在自然现象演化过程中，当其局部细节变化与整体远景变化相联系时，则对应参量x、y的函数关系为

$$f_{\mathrm{p}}(\Delta x,\Delta y)=f_{\mathrm{w}}(x,y)。 \tag{158}$$

进一步地，如果在标度ε（$0<\varepsilon<1$为实数）层面上变化单元的数量n（$n>0$为实数）相对ε局部细节的变化率与整体远景的平均变化率相联系，则由（158）式得相似扩展方程

$$f_{\mathrm{p}}\left(\frac{\Delta n}{\Delta\varepsilon}\right)=f_{\mathrm{w}}\left(s(\varepsilon,n)\frac{n}{\varepsilon}\right), \tag{159}$$

式中$s(\varepsilon,n)$为相似函数；n取连续的实数是趋势描述。

由方程（159）式得相似扩展方程最简单具体形式为

$$\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|=\left|s(\varepsilon,n)\frac{n}{\varepsilon}\right|; \tag{160}$$

上式的二展开方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varepsilon}+s(\varepsilon,n)\frac{n}{\varepsilon}=0; \tag{161}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varepsilon}-s(\varepsilon,n)\frac{n}{\varepsilon}=0。 \tag{162}$$

当$s(\varepsilon,n)$相对n、ε为常量时，取（161）、（162）二式中的$s(\varepsilon,n)$分别为

$$s(\varepsilon,n)=\alpha\ge 0,\quad s(\varepsilon,n)=\beta\ge 0;$$

则得

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varepsilon}+\alpha\frac{n}{\varepsilon}=0;\quad n(\alpha=1)=\varepsilon^{-1} \tag{163}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varepsilon}-\beta\frac{n}{\varepsilon}=0;\quad n(\beta=1)=\varepsilon \tag{164}$$

其解分别为方程（147）、（157）二式的形式

$$n=\varepsilon^{-\alpha}\ ; \tag{165}$$

$$n=\varepsilon^{\beta}\ 。 \tag{166}$$

方程（165）式为自相似分形扩展方程，式中α为分形扩展维数；方程（166）式称为自相似分维扩展方程，β为自相似分维扩展维数。

一般地，递推数列具有自扩展性质，典型线性形式类如 Fibonacci 数列等，其可由简明的特征方程方法讨论[18]。

下面圆内接弦的扩展是较广泛意义上的相似扩展形式。将半径为R的圆依次进行2^2、2^3，乃至2^J等分，并依次连成圆内弦，则仅依据 Pythagoras（约公元前 580～前 500 年）的勾股弦定理即可得到圆内接弦的总长度$l_{\mathrm{S}J}$与直径$2R$之比在极限上为圆周率的无理数表述形式

$$\pi=\lim_{J\to\infty}\frac{l_{\mathrm{S}J}}{2R}=\lim_{J\to\infty}2^{J-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\ , \tag{167}$$

这里自然数$J\geq 2$，式中右边的根号共有$J-1$重，根号内 2 的个数也共有$J-1$个。

在$J=16$时，得$\pi\approx 3.1415926533$。

因在距今 3120 年前中国具备了“勾广三，股修四，弦隅五”的论述（方算书《周髀算经》记），到距今 2500 年前古希腊的 Pythagoras 证明了勾股弦定理，并掌握了无理数的运算规律，故由上述相似扩展得到的方程可初步推论关于圆周率的一个严谨表述在 Pythagoras 的时代可能已经给出，其比距今 1500 年前中国南北朝的祖冲之（公元 429～500 年）断定圆周率取值在 3.1415926 与 3.1415927 之间的结论要早 1000 年左右，表述也更为深刻。

2.2.2 分维扩展方程与分形扩展方程的性质

考虑方程（147）、（157）二式或方程（165）、（166）二式在$\alpha=1$、$\beta=1$时分别有$n=\varepsilon^{-1}$、$n=\varepsilon$，则由（147）式或（165）式得分形扩展曲线的分形扩展维数α及在标度ε（$\varepsilon=\lambda l_0^{-1}$）层面上的长度$l_n$为

$$\alpha=-(\ln\varepsilon)^{-1}\ln n\ , \tag{168}$$

$$l_n=n\lambda=l_0 n^{1-\alpha^{-1}}\ ; \tag{169}$$

同样根据（157）式或（166）式得分维扩展曲线的分维扩展维数β及在标度ε（$\varepsilon=\lambda l_0^{-1}$）层面上的长度$l_n$为

$$\beta=(\ln\varepsilon)^{-1}\ln n\ , \tag{170}$$

$$l_n=n\lambda=l_0 n^{1+\beta^{-1}}\ , \tag{171}$$

式中l_0为分维扩展初始长度，λ为分维单位。

2.3 天体运行轨道的基线假设

与天体运行背景介质理论的连续轨道理论相对应，如果天体运行的轨道还具有与微观粒子运动的量子理论所描述的离散轨道相似的性质，则此离散轨道在描述方法及方程形式上应具有天体运行所本有的特征。

下面给出天体运行背景介质理论在弱场情况下的离散轨道描述，内容来源于资料[4]，并予以适当调整补充。

天体运行轨道曲线即主要包含上面二个扩展层次，一是天体在主天体作用下产生运行轨道基线的分维扩展层次，二是在背景介质及其它天体的作用下于轨道基线一维势阱中再次产生的整体上环绕基线、细节上下一重环绕上一重的多重分形扩展层次。对于天体运行相对稳定的离散轨道，n的数值解趋近于自然数或有理数，而在二个稳定离散轨道之间的过渡状态时n一般为非有理数的实数。

对于天体的运行，目前主要讨论弱场时其在主星体作用下产生轨道基线的分维扩展层次的性质，即在初始扩展长度l_0上分维扩展生成的轨道基线长度方程（171）式。

假设：天体在主星体作用下生成其运行轨道基线周长l_n的初始扩展长度为

$$l_0=2\pi\mu E_{\mathrm{M}}^{\kappa}\ , \tag{172}$$

其中μ为天体运行离散轨道常数，κ为待定常数，E_{M}为天体围绕的主星体能量；天体运行在相对稳定的离散轨道时n取自然数。

2.4 天体运行的离散轨道方程

根据（171）、（172）二式得天体运行的离散轨道方程

$$l_n=2\pi\mu E_{\mathrm{M}}^{\kappa}n^{1+\beta^{-1}}\ 。 \tag{173}$$

考虑忽略主星体整体自旋转能量及运动能量的影响，有 Einstein 能量$E_{\mathrm{M}}=E_{\mathrm{M}0}=M_0c^2$，这里$M_0$为主星体的静止质量。方程（173）式成为

$$l_n=2\pi\mu E_{\mathrm{M}0}^{\kappa}n^{1+\beta^{-1}}\ 。 \tag{174}$$

通过对太阳系部分行星及其卫星轨道基线数据的分析，初步确定天体离散轨道常数μ、待定常数κ、分维扩展维数β的数值估计分别为

$$\mu=6.00\times10^{-20}\ \mathrm{m}^{-0.21}\mathrm{kg}^{-0.605}\mathrm{s}^{1.21}\ , \tag{175}$$

$$\kappa=0.605\ , \tag{176}$$

$$\beta=1.00\ 。 \tag{177}$$

方程（172）、（174）二式成为

$$l_0=2\pi\mu E_{\mathrm{M}0}^{0.605}\ , \tag{178}$$

$$l_n=2\pi\mu E_{\mathrm{M}0}^{0.605}n^2\ 。 \tag{179}$$

由于尚未考虑各作用天体整体旋转能量、运动能量等的影响，所以诸常数更为准确的数值还有待于深入研究分析予以确定。

2.5 部分天体运行离散轨道方程的具体形式

2.5.1 太阳系中诸行星运行的离散轨道

根据太阳质量为 1.989×10^{30}kg 的数据及方程（179）式，得其诸行星离散轨道方程为

$$l_n=0.0975n^2\ \mathrm{AU}\ ; \tag{180}$$

将诸行星轨道数据与方程（180）式进行比较，得含有一个相对 1%小数值 0.001AU 波动量的方程为

$$l_n=(0.0975\pm0.001)n^2\ \mathrm{AU}\ 。 \tag{181}$$

2.5.2 天王星诸卫星运行的离散轨道

根据天王星质量为 8.689×10^{25}kg 及（179）式，得其卫星离散轨道方程为

$$l_n=3.36\times10^4 n^2\ \ \mathrm{km}\ 。 \tag{182}$$

2.5.3 地球卫星运行的离散轨道

根据地球质量为 5.976×10^{24}kg 的数据及（179）式，得其卫星离散轨道方程为

$$l_n=6.65\times10^3 n^2\ \ \mathrm{km}\ 。 \tag{183}$$

2.5.4 绕月天体运行的离散轨道

根据月球质量为 7.3506×10^{22}kg 的数据及（179）式，得绕月天体运行的离散轨道方程为

$$l_n = 465n^2 \ \text{km} \quad 。 \qquad (184)$$

2.6 离散轨道理论的预言数据

离散轨道与连续、平衡性轨道相比，则属于稳定性轨道，其显著的特征是当天体卫星处于稳定轨道附近运动时，在受到微量扰动后卫星的运动状态会逐渐恢复到受扰动以前的状态。

下面给出部分天体卫星的稳定轨道预言数据，以供对离散轨道理论作出有效验证。

2.6.1 太阳系行星运行的第 1 层离散轨道的预言

根据太阳诸行星运行的离散轨道方程（180）式，取太阳赤道平均直径以 1.39×10^6km 计，得在水星所处第 5 层离散轨道之前的四层距日心平均距离（AU）分别为：

第 1 层：0.0155±0.00016（约在距太阳表面外 1 个太阳直径距离的附近）；

第 2 层：0.0621±0.00064（约在距太阳表面外 6 倍太阳直径距离的附近）；

第 3 层：0.140±0.0014；第 4 层：0.248±0.0025。

2.6.2 天王星卫星第 8 层离散轨道的预言

根据天王星卫星离散轨道方程（182）式，可得在天卫Ⅱ与天卫Ⅲ之间的第 8 层天卫所在离散轨道周长为 2.150×10^6km，距天王星中心平均距离 $r_{\text{uca}\,8}$ 为

$$r_{\text{uca}\,8} = 3.422\times10^5 \ \text{km}\ ; \qquad (185)$$

其第 12 层天卫所在的离散轨道周长为 4.838×10^6km，距天王星中心平均距离 $r_{\text{uca}\,12}$ 为

$$r_{\text{uca}\,12} = 7.701\times10^5 \ \text{km}\ 。 \qquad (186)$$

2.6.3 地球卫星第 3 层离散轨道的预言

根据地球卫星离散轨道方程（183）式，取地球半径平均值为 6371km，得前二层皆处于地球内部，离地球表面最近的是第 3 层离散轨道，其处于地球表面外 3154km 处大气圈外层；第 4 层则处于地球表面外 1.056×10^4km 处。

2.6.4 绕月航天器第 5 层离散轨道的预言

取月球平均半径为 1738km，根据（184）式，得绕月航天器离散轨道的前 4 层平均半径皆小于月球半径，第 5 层离散轨道 $r_{\text{msa}\,5}$ 则处在月球表面外，其为

$$r_{\text{msa}\,5} = 112\,\text{km}\ ; \qquad (187)$$

第 6、10、20 层离散轨道分别处在月球表面外 926km、5663km、27865km 处。

2.7 离散轨道理论的意义

离散轨道理论对于探索搜寻新的天体、设计地球卫星运行轨道、绕月航天器运行轨道等具有理论推演及方案选择上的参考意义。

在 2007 年的探月计划中，中国探月卫星“嫦娥一号”绕月航天器预计在距离月球表面 200km 处的初始圆轨道上运行，然后逐渐下降到 100km 处附近轨道；而印度的“月球初航(Chandrayaan-1) 号”探月飞船预计在距月球表面 100km 的轨道上运行。

如果以月球卫星离散轨道（184）式作为计算参考，则可得上述中国选择的绕月初始圆轨道较偏离于稳定轨道，而下降后的轨道及印度选择的绕月轨道则较为接近在第 5 层稳定轨道附近运行。

通过进一步的理论研究及实验验证，明确离散轨道的机理并修正有关参量、系数，则可加深对天体运行轨道的认识理解，并可考虑将天体卫星的离散轨道选择为宇航器的驻留轨道。

2.8 天体运行背景介质理论的基础展望及初步推论

天体运行背景介质理论所包含的连续轨道描述与离散轨道描述目前尚处于并行状态，不能从其中的一个分支理论自然导出另一个分支理论；其中离散轨道理论目前还需要来自连续轨道理论的支持，在基础及方法上也还具有数学统计的成分，方程中的待定系数仍需要由有关观测数据资料予以进一步校核确认。

2.8.1 基础展望

在共同的背景介质理论的基础上，天体运行的连续轨道理论及离散轨道理论，将只是一组天体运行在介质层壳中能量动态平衡方程解的二个极限形式，同时方程亦将给出天体作用的明显尺度特征。在更广泛的区域中，天体作用可以近似展开为诸如下面（188）式的方程描述

$$F(qr) = F_{\text{p}}(qr)\Phi(qr) \quad , \qquad (188)$$

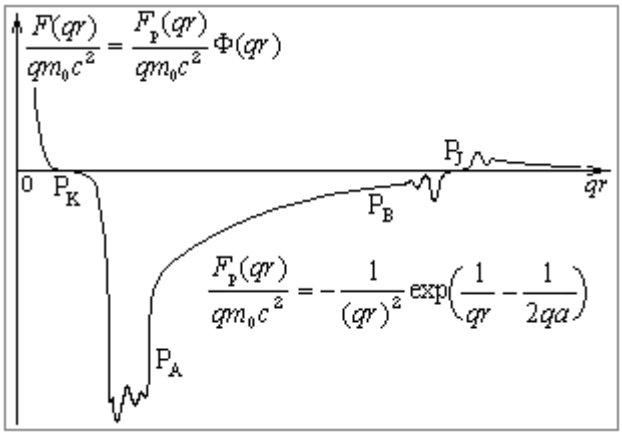
式中

$$q = c^2(GM_0)^{-1} = (\eta M_0 c^2)^{-1} \quad , \qquad (189)$$

$$F_{\text{p}}(qr) = -\frac{qm_0c^2}{(qr)^2}\exp\left[\frac{1}{qr}-\frac{1}{2qa}\right], \qquad (190)$$

$\Phi(qr)$ 为待定周期性衰减函数。

方程 $F_{\text{p}}(qr)$ 的趋势性曲线如图一所示。



图一 天体运行轨道背景介质理论的作用力趋势曲线图

Fig.1 The interaction tendency curve in the background medium theory of celestial body motion orbit

在图一中，点 P_K 与点 P_J 为曲线过零点，在细化上曲线于点 P_K 之前及点 P_J 之后还都存在过零点；曲线从点 P_A 到点 P_B 段即为目前连续轨道方程 $F_{\text{p}}(qr)$ 所近似描述的曲线部分。

上述思想描述了一个多尺度层面波动嵌套（分形）图景，其中方程 $F_{\text{p}}(qr)$ 即为一较大尺度层面波动的一段近似构成部分，而 $F_{\text{p}}(qr)$ 本身又仅是一较小尺度层面波动曲线的基线近似方程。

关于引力在多尺度层面上规律的更深入分析，则宜基于分维数学的研究结论所提供的描述框架。

2.8.2 初步推论

作为对天体在较为广泛区域作用曲线的初步探讨推论，一方面，从点 P_K 到点 P_A 之间引力不会出现奇点或无穷大，质量坍塌难以无限制地持续进行，即仅由引力难以形成质量密度趋于无穷大的理想黑洞；另一方面，在由点 P_B 到点 P_J 段，引力从开始出现细微波动，至波动变大逐渐明显偏离方程 $F_p(qr)$（包括 Newton 引力规律），即与方程 $F_p(qr)$ 比较，将产生引力增加、减小等波动。同时，在将星系作为微尘颗粒定义的体系里，运动规律自有与该层面相对应的方程形式。

对于在天体运行背景介质理论建立的初期阶段，一般先拟就有几个相互衔接重叠的过渡性理论予以先验毛估及粗略贯通是重要的；在此探索过程中，不易避免的是其体系中裹含有无法消除的经验假设及混合拼凑的成分；这也是逻辑基础及数理语言的盲区，致使不能建立出完全消除这些成分的理想解析体系。在至为根本的层面上，自然不昧因果并超越逻辑；逻辑的作用在于指向或导向究竟，但逻辑远不是究竟本身；在逻辑与究竟之间还存在思维极难以触及的区域，对形式与内涵之间转化的考察及由此建立的逻辑推演体系难以对自然予以完备描述。在从 Newton 模式导入 Siddhartha 模式的过程中，宜兼容而又不执著其任何状态，以免由传承转化为阻碍。

天体运行背景介质理论的离散轨道描述目前由于在数学上采用了分维扩展方法，所以其进一步的发展需要来自分维数学的非整数阶微积分与分形测度计算所提供的基础。下面主要讨论幂函数的分维微积分表述及其与分数阶微积分的联系，以给出基于分数阶微积分及分维微积分的自相似分形测度趋势性微积分计算方程。

3 幂函数非整数阶微积分的趋势性方程形式

分维微积分在理论基础上主要依据分维导数相对邻近规整导数的位置假设，目前尚不能给出一般函数分维导数的具体解析形式，远不具有分数阶微积分的拓展体系。

分维微积分与分数阶微积分不同，分数阶微积分的基础主要依据整数阶积分变换对分数阶的默认外推，能给出一般函数分数阶微积分的非局域性形式，有半解析基础。

上述这二个研究方向在基础上都依赖于整数阶微积分的表述，尤其是分维导数缺少严格证明，几乎没有深远意义。目前这些表述及探索皆是趋向一个较为基本理论的过渡性近似形式、乃至试错途径。而未来可能建立的较为基本的理论，将包含更为深刻普适的核心概念定义及基础假设，具有明确的几何意义，Newton 微积分将成为其导出结论，并能自然延伸出函数阶微积分形式。从理解基础理论到创建基础理论，几乎是从行星凝聚成恒星的跨越。

下面讨论的主线脉络内容来源于资料[12，4]，主要描述幂函数非整数阶微积分的趋势性方程形式，为未来的相关解析理论提供微许前期探讨途径及框架参照。

3.1 一般函数的 Newton 导数

对于一般函数 $f(x)$，取其在点 x 处的邻域分别为函数形式 $f_1(x-k_1\Delta x)$、$f_2(x+k_2\Delta x)$，这里 k_1、k_2 为有限非负实数，$\Delta x>0$；可定义二函数在点 x 处的规整导数 $\mathrm{D}f(x)$ 为

$$\mathrm{D}f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_2(x+k_2\Delta x)-f_1(x-k_1\Delta x)}{(k_1+k_2)\Delta x}\text{。}\quad(191)$$

这里函数 $f_1(x-k_1\Delta x)$ 与 $f_2(x+k_2\Delta x)$ 在点 x 处可以皆不连续。特别地当二函数在点 x 处的邻域具有相同函数形式并连续，且 $k_1=0$、$k_2=1$ 时，方程（191）式即化简为 Newton 导数形式

$$\mathrm{D}f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\text{。}$$

当二函数在点 x 处具有相同函数形式，且 $k_1=k_2=1$ 时，方程（191）式成为

$$\mathrm{D}f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}\text{。}$$

而其规整积分形式则与同是规整积分的 Newton 积分具有相同的表述形式；可得函数 $f(x)$ 在点 x 处的分维导数 $\mathrm{D}^{\alpha}f(x)$ 具有性质

$$\mathrm{D}^{\alpha}f(x)=\begin{cases}\mathrm{D}^{\alpha_1}f(x), & \alpha=\alpha_1\\ \mathrm{D}^{\alpha_2}f(x), & \alpha=\alpha_2\end{cases}\quad(192)$$

其中 $0\le\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\le 1$ 。

3.2 函数的分维导数位置假设及导出结论

3.2.1 函数的分维导数的位置假设

根据方程（192）式，下面给出分维导数位置假设。该假设以分段的相邻整数阶为界限，在数学基础层面包含诸多脱漏，只能对类如幂函数形式在相邻整数阶之间进行非整数阶导数的简略趋势性估计运算，不具有解析意义。

假设：分维导数 $\mathrm{D}^{\alpha}f(x)$（如果存在）处于 $\mathrm{D}^{\alpha_1}f(x)$ 与 $\mathrm{D}^{\alpha_2}f(x)$ 之间，即

$$\min\left\{\mathrm{D}^{\alpha_1}f(x),\mathrm{D}^{\alpha_2}f(x)\right\}\le\mathrm{D}^{\alpha}f(x)\le\max\left\{\mathrm{D}^{\alpha_1}f(x),\mathrm{D}^{\alpha_2}f(x)\right\},\quad(193)$$

其中 $0\le\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\le 1$。

3.2.2 位置假设的连续性基础、局限及导出结论

位置假设是基于下面对方程（193）式予连续性质以进一步描述的方程（194）式。

当 $0\le\Delta\alpha<<1$ 时，分维导数 $\mathrm{D}^{\alpha}f(x)$（如果存在）处于 $\mathrm{D}^{\alpha-\Delta\alpha}f(x)$ 与 $\mathrm{D}^{\alpha+\Delta\alpha}f(x)$ 之间，即

$$\min\left\{\mathrm{D}^{\alpha-\Delta\alpha}f(x),\mathrm{D}^{\alpha+\Delta\alpha}f(x)\right\}\le\mathrm{D}^{\alpha}f(x)\le\max\left\{\mathrm{D}^{\alpha-\Delta\alpha}f(x),\mathrm{D}^{\alpha+\Delta\alpha}f(x)\right\},\quad(194)$$

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\mathrm{D}^{\alpha-\Delta\alpha}f(x)=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\mathrm{D}^{\alpha+\Delta\alpha}f(x)=\mathrm{D}^{\alpha}f(x),$$

式中 $0\le\Delta\alpha<<1$。

方程（194）式依赖于$f(x)$的函数形式、α值及$\Delta\alpha$微小值；$\mathrm{D}^{\alpha} f(x)$的局限即在于假设了其在$0 \le \Delta\alpha << 1$中的单调性及平滑方式单一性，故（193）式不具有普遍意义。

由位置假设（193）式，得$\mathrm{D}^{\alpha} f(x)$通过方程

$$\mathrm{D}^{\alpha_1} f(x) - \mathrm{D}^{\alpha_2} f(x) = 0 \quad , \quad 0 \le \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 \le 1$$

的根x_k（如果存在）所在位置$(x_k, \mathrm{D}^{\alpha_1} f(x)(x = x_k))$，即在根$x_k$所在位置有

$$\mathrm{D}^{\alpha_1} f(x)\Big|_{x=x_k} = \mathrm{D}^{\alpha_2} f(x)\Big|_{x=x_k} = \mathrm{D}^{\alpha} f(x)\Big|_{x=x_k} 。\quad (195)$$

当$\alpha_1 = 0$、$\alpha_2 = 1$时，方程（195）式成为

$$f(x_k) = \mathrm{D} f(x)\Big|_{x=x_k} = \mathrm{D}^{\alpha} f(x)\Big|_{x=x_k} 。\quad (196)$$

特别地，当$f(x) = \exp x$时，其规整导数为

$$\mathrm{D}^{\mathrm{int}\,\alpha} f(x) = \mathrm{D}^{\mathrm{int}\,\alpha+1} f(x) = \exp x ,$$

其中$\mathrm{int}\,\alpha$为对α的取整数运算。

根据方程（193）、（196）二式及上式得

$$\mathrm{D}^{\alpha} \exp x = \exp x \quad 。\quad (197)$$

3.3 位置假设的一个等效推论

分维导数位置假设（193）式的一个推论函数维导数为：

对于给定函数$g(x)$，当$0 \le \Delta x << 1$及

$$0 \le \left| g(x+\Delta x) - g(x-\Delta x) \right| << 1$$

时，函数维（或函数阶）导数

$$\mathrm{D}^{g(x)} f(x) = Q(f(x), g(x), x)$$

处于$\mathrm{D}^{g(x-\Delta x)} f(x-\Delta x)$与$\mathrm{D}^{g(x+\Delta x)} f(x+\Delta x)$之间，即

$$\min\left\{\mathrm{D}^{g(x-\Delta x)} f(x-\Delta x), \mathrm{D}^{g(x+\Delta x)} f(x+\Delta x)\right\} \le \mathrm{D}^{g(x)} f(x) \le \max\left\{\mathrm{D}^{g(x-\Delta x)} f(x-\Delta x), \mathrm{D}^{g(x+\Delta x)} f(x+\Delta x)\right\}; \quad (198)$$

故$\mathrm{D}^{g(x)} f(x)$通过方程

$$\mathrm{D}^{g(x+\Delta x)} f(x+\Delta x) - \mathrm{D}^{g(x-\Delta x)} f(x-\Delta x) = 0$$

的根所在位置，且有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{D}^{g(x-\Delta x)} f(x-\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{D}^{g(x+\Delta x)} f(x+\Delta x) = \mathrm{D}^{g(x)} f(x) 。$$

3.4 幂函数的分维导数形式假设

对于幂函数$f(x) = x^p$（$p > 0$），因

$$\mathrm{D} f(x) = p x^{p-1} \quad ,$$

则据此下面给出幂函数的分维导数形式假设。

假设：幂函数$f(x) = x^p$（$p > 0$）的分维导数形式为

$$\mathrm{D}^{\alpha} x^p = \psi(\alpha) x^{p-\alpha} \quad , \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad (199)$$

其中$\psi(\alpha)$为关于α的待定函数。

3.5 幂函数的分维微积分

3.5.1 幂函数的分维导数

根据（193）、（196）二式得$\mathrm{D}^{\alpha} x^p$通过方程

$$f(x) - \mathrm{D} f(x) = x^p - p x^{p-1} = 0$$

的根$x_1 = 0$（$p > 0$）、$x_2 = p$所在位置$(0,0)$、(p, p^p)，代入方程(196)、(199)二式得

$$p^p = \psi(\alpha) p^{p-\alpha} \quad ,$$

故得方程（199）式中关于α的待定函数为

$$\psi(\alpha) = p^{\alpha} \quad 。\quad (200)$$

将（200）式代入（199）式得幂函数的分维导数形式为

$$\mathrm{D}^{\alpha} x^p = p^{\alpha} x^{p-\alpha} \quad , \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad (201)$$

$$\mathrm{D}^{\alpha} x = x^{1-\alpha} \quad , \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad (202)$$

分维导数是对整数阶导数的分段趋势性直接外推，只是一简略趋势层面的估计运算，不具有数学基础意义，且包含着诸多脱漏及错误，其中之一即是

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}} y = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^{\alpha} \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}y^{\alpha}} y = \begin{cases} y, & \alpha = 0 \\ \alpha^{\alpha} [\mathrm{D} y^{\alpha^{-1}}]^{\alpha}, & 0 < \alpha \le 1 \end{cases} \quad (203)$$

及由此式推出的趋势性估计运算方程

$$\mathrm{D}^{\alpha} \exp(\sigma x) = \sigma^{\alpha} \exp x , \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad (204)$$

$$\mathrm{D}^{\alpha} 1 = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ 0, & 0 < \alpha \le 1 \end{cases}$$

这里σ为常量。

作为探讨，对于$f(x) = \sin x$，取其分维导数形式为

$$\mathrm{D}^{\alpha} \sin x = \psi_{\sin}(\alpha) \sin[x + 0.5\pi\alpha] , \quad 0 \le \alpha \le 1$$

式中$\psi_{\sin}(\alpha)$为关于α的待定函数；则有其分维导数为

$$\mathrm{D}^{\alpha} \sin x = \frac{\sqrt{2} \sin[x + 0.5\pi\alpha]}{2 \sin[0.25\pi(1+2\alpha)]} , \quad 0 \le \alpha \le 1$$

一般地，当$\alpha \ge 0$时，根据（193）、（196）二式，得

$$\mathrm{D}^{\alpha} f(x) = \mathrm{D}^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} \mathrm{D}^{\mathrm{int}\,\alpha} f(x) \quad , \quad \alpha \ge 0 \quad (205)$$

3.5.2 幂函数的分维微分及积分

根据方程（201）、（205）二式，得幂函数的分维微分为

$$\mathrm{d}^{\alpha} x^p = p^{\alpha} x^{p-\alpha} (\mathrm{d}x)^{\alpha} , \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad (206)$$

$$\mathrm{d}^{\alpha} x^p = \mathrm{D}^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} \mathrm{D}^{\mathrm{int}\,\alpha} x^p (\mathrm{d}x)^{\mathrm{int}\,\alpha} (\mathrm{d}x)^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} , \quad \alpha \ge 0 \quad (207)$$

当$[\mathrm{I}^{\alpha} x^p]\Big|_{x=0} = 0$时，其分维积分形式为

$$\mathrm{I}^{\alpha} x^p = (p+\alpha)^{-\alpha} x^{p+\alpha} = \Lambda^{-1}(\alpha, p) x^{p+\alpha} , \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad (208)$$

$$\mathrm{I}^{\alpha}x^{p}=\mathrm{I}^{\mathrm{int}\,\alpha}\mathrm{I}^{\alpha-\mathrm{int}\,\alpha}x^{p}$$
$$=\Lambda^{-1}(\alpha,p)x^{p+\alpha}\text{，}\ \alpha\geq 0 \qquad (209)$$

其中函数$\Lambda(\alpha,p)$为

$$\Lambda(\alpha,p)=\begin{cases}[p+\alpha]^{\alpha}\text{，}\ 0\leq\alpha\leq 1\\ [p+\alpha-\mathrm{int}\,\alpha]^{\alpha-\mathrm{int}\,\alpha}\prod_{i=1}^{\mathrm{int}\,\alpha}[p+\alpha-\mathrm{int}\,\alpha+i]\text{，}\ \alpha\geq 1\end{cases} \qquad (210)$$

当$p=1$时，方程（210）式成为

$$\Lambda(\alpha,1)=\begin{cases}[1+\alpha]^{\alpha}\text{，}\ 0\leq\alpha\leq 1\\ [1+\alpha-\mathrm{int}\,\alpha]^{\alpha-\mathrm{int}\,\alpha}\prod_{i=1}^{\mathrm{int}\,\alpha}[1+\alpha-\mathrm{int}\,\alpha+i]\text{，}\ \alpha\geq 1\end{cases} \qquad (211)$$

依据（211）式得$\Lambda(\alpha,1)$为实数$\alpha+1$阶乘$(\alpha+1)!$的一种趋势性近似表示形式

$$(\alpha+1)!=\Lambda(\alpha,1)\text{，}\ \alpha\geq 0 \qquad (212)$$

3.5.3 幂函数的分维积分与其范数的关系

作为进一步的探讨，当$f(x)=x^{p}$（$p>0$）满足条件

$$\int|f(x)|^{\alpha^{-1}}\,\mathrm{d}x<+\infty$$

时，赋予范数

$$\|f\|_{\alpha^{-1}}=[\int|f(x)|^{\alpha^{-1}}\,\mathrm{d}x]^{\alpha}\text{，}\ 1\leq\alpha^{-1}<+\infty \qquad (213)$$

得此时方程（198）式的范数表述形式为

$$\mathrm{I}^{\alpha}|f(x)|=\alpha^{-\alpha}\|f\|_{\alpha^{-1}}\text{，}\quad 0<\alpha\leq 1 \qquad (214)$$

3.6 分维导数与分数阶导数的区别

3.6.1 Γ函数的二个近似计算公式

通过对Γ函数的深入分析，可得其二近似等式为[4]

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}=p^{\alpha}\left[1+\frac{1}{7.4p}\sin(\alpha\pi)\right]\text{，} \qquad (215)$$

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}p^{p-\alpha}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-(1-\alpha))}p^{p-(1-\alpha)}\text{，} \qquad (216)$$

式中$0\leq\alpha\leq 1$，$p\geq 0.5$。

当$p>2.5$时，方程（216）式可进一步近似表示为

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}=p^{\alpha}\text{，}\ p>2.5 \qquad (217)$$

根据方程（216）、（217）二式分别得Γ函数近似值计算的二个简略公式为

$$\Gamma(n+2\alpha)=(n+\alpha)^{2\alpha-1}n!\text{，}\ n\geq 1 \qquad (218)$$

$$\Gamma(n+\alpha)=n^{\alpha-1}n!\text{，}\quad n\geq 3 \qquad (219)$$

式中$0\leq\alpha\leq 1$，$n!$为自然数n的阶乘。

3.6.2 分维微积分与分数阶微积分的联系与区别

目前分数阶微积分的一些结论是从Γ函数及积分变换方程直接默认推广得到的，其中分数阶导数定义中包含着函数积分上下限参数，具有显著的非局域性质。当仍然保留与整数阶导数相对应的局域属性时，对于幂函数$f(x)=x^{p}$（$p>0$）有分数阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}x^{p}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}x^{p-\alpha}\quad\text{。} \qquad (220)$$

故根据方程（217）、（220）二式得

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}x^{p-\alpha}=p^{\alpha}x^{p-\alpha}\text{，}\ p\geq 2.5 \qquad (221)$$

即在此条件下分维导数与分数阶导数近似相等。

对于分维导数，根据方程（196）式，函数$f(x)=x^{p}$在$x=p$处的所有分维导数$\mathrm{D}^{p_1}f(x)$、$\mathrm{D}^{p_2}f(x)$都相等

$$p^{p_1}p^{p-p_1}=p^{p_2}p^{p-p_2}=p^{p}\text{，} \qquad (222)$$

这里$0\leq p_1\leq 1$，$0\leq p_2\leq 1$。

对于分数阶导数，根据方程（216）、（220）二式，幂函数$f(x)=x^{p}$（$p\geq 0.5$）只在其二分数阶满足关系$p_1+p_2=1$时才在$x=p$处相等

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-p_1)}p^{p-p_1}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-p_2)}p^{p-p_2}\text{，} \qquad (223)$$

这里$p_1+p_2=1$。

与目前分数阶导数的显著非局域性形式比较，虽然分维导数基本保留着整数阶导数从局域性基础假设到局域性推演结果的根本特征，但亦只能对于类如幂函数的方程形式进行非整数阶微积分的简略趋势性估计运算。

4 自相似分形测度计算的非整数阶微积分方程

自相似分形测度的微积分计算方法主要是依据非整数阶微积分，在目前真正的非整数阶微积分理论尚未建立前，上述幂函数的分数阶微积分与分维微积分表述形式是趋势性微积分方程性质的，通过此趋势性微积分方程能够给出直接进行自相似分形测度计算的趋势性方程。这种趋势性微积分方法的分析过程及得到的自相似分形测度与目前普遍采用 Hausdorff 测度方法(覆盖方法)得到的结果不同，覆盖方法分析过程较为复杂，得到的测度依赖于所使用的覆盖方式及迭代技巧，计算方法的普适性较弱。

数学，普适构造与逻辑解析相辅相成，几何思想代数化与代数思想几何化交相辉映，其要旨之一即是将 0 及无穷皆变换或映射为可区分的有限量形式，此亦测度之内涵。

下面给出自相似分形测度的趋势性微积分方程计算方法，主要内容来源于资料[12，4]，并予以适当补充。

4.1 自相似分形方程

依据方程（138）式～（147）式的过程，仍然由差分方程给出自相似分形方程的概要描述；得一集合初始测度A_0在第k次操作上标度ε_k及集合单位$\theta(\varepsilon_k)$的数量n_k，

当$0<\varepsilon_k\le 1$、$n_k\ge 1$时，有差分方程

$$\varepsilon_{k+1}^{-1}=Z\varepsilon_k^{-1}，\quad n_{k+1}=Wn_k；\tag{224}$$

式中Z、W为操作常数，k为自然数；$Z\ge 1$、$W\ge 1$，$0\le k<+\infty$；$\varepsilon_0^{-1}=1$，$n_0=1$。其解分别为

$$\varepsilon_k=Z^{-k}；\quad n_k=W^k。\tag{225}$$

即有等式

$$\ln Z\ln n_k=\ln W\ln\varepsilon_k^{-1}；\tag{226}$$

其当常数$Z=1$时，常数$W=1$，且有$\varepsilon_k=1$，$n_k=1$。

当$k\ge 1$、$0<\varepsilon_k<1$时，由方程（226）式得遍历常数α，也即 Hausdorff 维数为

$$\frac{\ln n_k}{\ln\varepsilon_k^{-1}}=\frac{\ln W}{\ln Z}=\alpha；\tag{227}$$

有自相似分形方程

$$n_k=\varepsilon_k^{-\alpha}。\tag{228}$$

于趋势层面在连续遍历的意义上，考虑一集合初始测度A_0于标度ε（$0<\varepsilon<1$为实数）层次上在函数$\gamma(\varepsilon,n)$激励下，集合单位$\theta(\varepsilon)$的数量n（$n>0$为实数）与ε之比正比于n相对ε的变化率，即

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varepsilon}+s(\varepsilon,n)\frac{n}{\varepsilon}=\gamma(\varepsilon,n)，\quad s(n=\varepsilon^{-1})=1\tag{229}$$

式中比例函数$s(\varepsilon,n)$即为集合生成的相对维数；数量n取连续的实数为趋势性描述。

这是一描述局部变化率与整体平均变化率关系的方程。

当$\gamma(\varepsilon,n)=0$，且$s(\varepsilon,n)=\alpha$相对ε、n为常量时，方程（229）式成为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varepsilon}+\alpha\frac{n}{\varepsilon}=0；\quad n(\alpha=1)=\varepsilon^{-1}\tag{230}$$

积分（230）式并考虑在$\alpha=1$时$n=\varepsilon^{-1}$为不变操作，得

$$n\varepsilon^{\alpha}=1，$$

即有 Hausdorff 维数方程

$$\alpha=-\frac{\ln n}{\ln\varepsilon}=\frac{\ln n}{\ln\varepsilon^{-1}}。\tag{231}$$

由连续性微分方程讨论自相似分形方程可初步讨论相邻自相似分形间的过渡关系。

下面由自相似分形测度的可加性给出自相似分形方程形式。

取自相似分形测度A的方程形式为

$$A=\phi(\alpha)A_0^{\alpha}，\quad A(A_0=0)=0\tag{232}$$

这里$\phi(\alpha)$为关于α的函数；则基于测度可加性得

$$A=n[\phi(\alpha)(\varepsilon A_0)^{\alpha}]；\tag{233}$$

得

$$\phi(\alpha)A_0^{\alpha}=n[\phi(\alpha)(\varepsilon A_0)^{\alpha}]，$$

即有

$$n\varepsilon^{\alpha}=1，\tag{234}$$

故由此自相似分形测度的可加性亦可得其分维数方程

$$\alpha=-\frac{\ln n}{\ln\varepsilon}=\frac{\ln n}{\ln\varepsilon^{-1}}。\tag{235}$$

4.2 分形测度的非整数阶微积分形式定义

定义：当分形测度A相对分形初始测度A_0为升维α（$\alpha\ge 1$）时，其测度A为对分形相似单位函数$f(\alpha,A_0)$的$\alpha-1$阶积分，微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha-1}}{\mathrm{d}A_0^{\alpha-1}}A=f(\alpha,A_0)，\quad \alpha\ge 1、A(A_0=0)=0\tag{236}$$

当在$0<\alpha\le 1$的降维时，A_0为A在逆方向上的α^{-1}维分形测度，有$\alpha^{-1}\ge 1$；根据方程（236）式得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha^{-1}-1}}{\mathrm{d}A^{\alpha^{-1}-1}}A_0=f(\alpha^{-1},A)，\quad 0<\alpha\le 1、A_0(A=0)=0\tag{237}$$

方程（236）、（237）式中的α为A相对A_0的相对维数。

4.3 自相似分形测度计算的趋势性微积分方程

对于自相似分形，分形相似单位函数

$$f(\alpha,A_0)=\vartheta(\alpha)A_0，\quad \alpha\ge 1、\vartheta(\alpha=1)=1\tag{238}$$

$$f(\alpha^{-1},A)=\vartheta(\alpha^{-1})A，\quad 0<\alpha\le 1、\vartheta(\alpha^{-1}=1)=1\tag{239}$$

式中$\vartheta(\alpha)$为α的函数。

因分数阶微积分与分维微积分皆属于整数阶微积分的趋势性外推，尚不是真正的非整数阶微积分；在真正的非整数阶微积分理论建立前，可暂时基于分数阶微积分及分维微积分给出自相似分形测度的趋势性微积分方程。

作为初步探讨，当取

$$\vartheta(\alpha)=1\quad 或\quad \vartheta(\alpha^{-1})=1$$

时，为对测度在包络层面的趋势性计算。

当取

$$\vartheta(\alpha)=\alpha^{-1}\quad 或\quad \vartheta(\alpha^{-1})=\alpha$$

时，为对测度予以细节层面的趋势性计算。

此二个层面在$\alpha\ge 1$与$0<\alpha\le 1$时的自相似分形测度方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha-1}}{\mathrm{d}A_0^{\alpha-1}}A=A_0，\quad \alpha\ge 1、A(A_0=0)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha-1}}{\mathrm{d}A_0^{\alpha-1}}A=\alpha^{-1}A_0，\quad \alpha\ge 1、A(A_0=0)=0\tag{240}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha^{-1}-1}}{\mathrm{d}A^{\alpha^{-1}-1}}A_0=A，\quad 0<\alpha\le 1、A_0(A=0)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha^{-1}-1}}{\mathrm{d}A^{\alpha^{-1}-1}}A_0=\alpha A，\quad 0<\alpha\le 1、A_0(A=0)=0。\tag{241}$$

根据方程（236）～（241）式，得自相似分形测度计算的非整数阶积分方程为

$$A=\vartheta(\alpha)\mathrm{I}^{\alpha-1}A_0，\quad \alpha\ge 1、A(A_0=0)=0\tag{242}$$

$$A_0=\vartheta(\alpha^{-1})\mathrm{I}^{\alpha^{-1}-1}A，\quad 0<\alpha\le 1、A_0(A=0)=0。\tag{243}$$

根据分数阶导数方程（220）式及方程（242）、（243）式，得基于分数阶微积分的自相似分形测度趋势计算方程

$$A=\begin{cases}[\vartheta(\alpha^{-1})]^{-\alpha}[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{\alpha}A_0^{\alpha}, & 0<\alpha\le 1\\ \vartheta(\alpha)[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}A_0^{\alpha}, & \alpha\ge 1\end{cases}\tag{244}$$

根据方程（208）式、（209）式及方程（242）、(243)式，得基于分维微积分的自相似分形测度趋势性计算方程

$$A=\begin{cases}[\vartheta(\alpha^{-1})]^{-\alpha}\Lambda^{\alpha}(\alpha^{-1}-1,1)A_0^{\alpha}, & 0<\alpha\le 1\\ \vartheta(\alpha)\Lambda^{-1}(\alpha-1,1)A_0^{\alpha}, & \alpha\ge 1\end{cases} \tag{245}$$

根据方程（208）式，当$0.5\le\alpha\le 2$时，上式简化为

$$A=\begin{cases}[\vartheta(\alpha^{-1})]^{-\alpha}\alpha^{\alpha-1}A_0^{\alpha}, & 0.5\le\alpha\le 1.0\\ \vartheta(\alpha)\alpha^{1-\alpha}A_0^{\alpha}, & 1.0\le\alpha\le 2.0\end{cases} \tag{246}$$

方程（245）、（246）二式中$0<\alpha\le 1$时的表述还可分别由其中的$\alpha^{-1}\ge 1$时的下面二个方程形式直接解得：

$$A_0=\vartheta(\alpha^{-1})[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{-1}A^{\alpha^{-1}},\quad \alpha^{-1}\ge 1 \tag{247}$$

$$A_0=\vartheta(\alpha^{-1})\Lambda^{-1}(\alpha^{-1}-1,1)A^{\alpha^{-1}},\quad \alpha^{-1}\ge 1 \tag{248}$$

根据方程(244)、（245）二式即可以分别在趋势层面上计算一些自相似分形的测度。

上述关于自相似分形测度计算的分析过程是属于探讨性质的。几何测度对应于函数积分在整体构造上属于趋势性描述，是分形单元对应于函数微分在局部细节上的极限（包络）表述，其在升维（$\alpha>1$）时一般为大值形式，在降维（$0<\alpha<1$）时一般为小值形式；其包含着无穷层面操作的整体构造属性，具有积分守恒的相应性质。

4.4 几类典型自相似分形测度的趋势性计算方程

4.4.1 三分 Cantor 集合及 Koch 曲线测度

在资料[12]中已计算几个典型自相似分形的测度，包括三分 Cantor 集合、Koch 曲线、从二维转为一维、从三维转为二维、从三维转为一维的 Sierpinski 垫片等；其中在初始测度为l_0时，三等分l_0，保留二边的闭区间，去掉中间的开区间，持续操作，得到三分 Cantor 集合，其相对维数α_{3L2}为

$$\alpha_{3L2}=\frac{\ln 2}{\ln 3}=0.631;$$

由方程（244）式、（246）式分别得其测度A_{3L2}为

$$A_{3L2}=[\vartheta(\alpha_{3L2}^{-1})]^{-\alpha_{3L2}}[\Gamma(1+\alpha_{3L2}^{-1})]^{\alpha_{3L2}}l_0^{\alpha_{3L2}}=\begin{cases}1.244l_0^{0.631}, & \vartheta(\alpha_{3L2}^{-1})=1\\ 1.663l_0^{0.631}, & \vartheta(\alpha_{3L2}^{-1})=\alpha_{3L2}\end{cases} \tag{249}$$

$$A_{3L2}=[\vartheta(\alpha_{3L2}^{-1})]^{-\alpha_{3L2}}\alpha_{3L2}^{\alpha_{3L2}-1}l_0^{\alpha_{3L2}}=\begin{cases}1.185l_0^{0.631}, & \vartheta(\alpha_{3L2}^{-1})=1\\ 1.585l_0^{0.631}, & \vartheta(\alpha_{3L2}^{-1})=\alpha_{3L2}\end{cases} \tag{250}$$

三等分l_0，保留二边的闭区间，将中间的一个闭区间生成二个连接的闭区间，持续操作，得到 Koch 曲线，其相对维数α_{3L4}为

$$\alpha_{3L4}=\frac{\ln 4}{\ln 3}=1.262;$$

由方程（244）式、（246）式分别得其测度为A_{3L4}为

$$A_{3L4}=\vartheta(\alpha_{3L4})[\Gamma(1+\alpha_{3L4})]^{-1}l_0^{\alpha_{3L4}}=\begin{cases}0.877l_0^{1.262}, & \vartheta(\alpha_{3L4})=1\\ 0.696l_0^{1.262}, & \vartheta(\alpha_{3L4})=\alpha_{3L4}^{-1}\end{cases} \tag{251}$$

$$A_{3L4}=\vartheta(\alpha_{3L4})\alpha_{3L4}^{1-\alpha_{3L4}}l_0^{\alpha_{3L4}}=\begin{cases}0.941l_0^{1.262}, & \vartheta(\alpha_{3L4})=1\\ 0.746l_0^{1.262}, & \vartheta(\alpha_{3L4})=\alpha_{3L4}^{-1}\end{cases} \tag{252}$$

下面依据基于分数阶微积分及分维微积分方法导出的自相似分析测度方程(244)、(245)二式，继续给出二种正交十字星的分形测度及二种 Sierpinski 垫片的测度。

4.4.2 二种正交十字星的分形测度

取初始测度为l_0，进行 2 等分，在等分点处正交生成 4 个等分线段，持续无穷次操作，此分形相对维数α_{2L4}为

$$\alpha_{2L4}=\frac{\ln 4}{\ln 2}=2.0;$$

依据方程（244）式、（246）式分别得其测度A_{2L4}为

$$A_{2L4}=\vartheta(\alpha_{2L4})[\Gamma(1+\alpha_{2L4})]^{-1}l_0^{\alpha_{2L4}}=\begin{cases}0.500l_0^{2}, & \vartheta(\alpha_{2L4})=1\\ 0.250l_0^{2}, & \vartheta(\alpha_{2L4})=\alpha_{2L4}^{-1}\end{cases} \tag{253}$$

$$A_{2L4}=\vartheta(\alpha_{2L4})\alpha_{2L4}^{1-\alpha_{2L4}}l_0^{\alpha_{2L4}}=\begin{cases}0.500l_0^{2}, & \vartheta(\alpha_{2L4})=1\\ 0.250l_0^{2}, & \vartheta(\alpha_{2L4})=\alpha_{2L4}^{-1}\end{cases} \tag{254}$$

对于此十字星正交构造过程，任何有限次操作，若以绝对维数为 2 时进行面积特征计算，则其皆为 0；无穷次操作后，其测度则为方程（243）、（254）二式结果。分形测度直接刻画了有限次操作与无穷次操作间的过渡及于结果上的区别，在极端情况初步弥补数学归纳法的不足。

当在等分点处正交生成 6 个等分线段时，持续操作，则得此集合生成维数α_{2L6}为

$$\alpha_{2L6}=\frac{\ln 6}{\ln 2}=2.585;$$

依据方程（244）式、（245）式分别得其测度A_{2L6}为

$$A_{2L6}=\vartheta(\alpha_{2L6})[\Gamma(1+\alpha_{2L6})]^{-1}l_0^{\alpha_{2L6}}=\begin{cases}0.274l_0^{2.585}, & \vartheta(\alpha_{2L6})=1\\ 0.106l_0^{2.585}, & \vartheta(\alpha_{2L6})=\alpha_{2L6}^{-1}\end{cases} \tag{255}$$

$$A_{2L6}=\vartheta(\alpha_{2L6})\Lambda^{-1}(\alpha_{2L6}-1,1)l_0^{\alpha_{2L6}}=\begin{cases}0.295l_0^{2.585}, & \vartheta(\alpha_{2L6})=1\\ 0.114l_0^{2.585}, & \vartheta(\alpha_{2L6})=\alpha_{2L6}^{-1}\end{cases} \tag{256}$$

4.4.3 二种 Sierpinski 垫片的测度

取一正方形初始测度为l_0^2，将其 9 等分，保留 4 个顶点区域所在的闭集，去掉其余 5 个开集，持续操作，Sierpinski 尘的相对维数α_{9S4}为

$$\alpha_{9S4}=\frac{\ln 4}{\ln 9}=0.631;$$

由方程（244）式、（246）式分别得其测度A_{9S4}为

$$A_{9S4}=[\vartheta(\alpha_{9S4}^{-1})]^{-\alpha_{9S4}}[\Gamma(1+\alpha_{9S4}^{-1})]^{\alpha_{9S4}}(l_0^2)^{\alpha_{9S4}}=\begin{cases}1.244l_0^{1.262}, & \vartheta(\alpha_{9S4}^{-1})=1\\ 1.663l_0^{1.262}, & \vartheta(\alpha_{9S4}^{-1})=\alpha_{9S4}\end{cases} \tag{257}$$

$$A_{9S4}=[\vartheta(\alpha_{9S4}^{-1})]^{-\alpha_{9S4}}\alpha_{9S4}^{\alpha_{9S4}-1}(l_0^2)^{\alpha_{9S4}}$$
$$=\begin{cases}1.185l_0^{1.262}, & \vartheta(\alpha_{9S4}^{-1})=1\\ 1.585l_0^{1.262}, & \vartheta(\alpha_{9S4}^{-1})=\alpha_{9S4}\end{cases} \quad (258)$$

保留4个顶点区域所在的闭集，亦保留1个中间闭集，去掉其余4个开集，持续操作，则此时 Sierpinski 垫片的相对维数α_{9S5}为

$$\alpha_{9S5}=\frac{\ln 5}{\ln 9}=0.732;$$

由方程（244）式、（246）式分别得其测度A_{9S5}为

$$A_{9S5}=[\vartheta(\alpha_{9S5}^{-1})]^{-\alpha_{9S5}}[\Gamma(1+\alpha_{9S5}^{-1})]^{\alpha_{9S5}}(l_0^2)^{\alpha_{9S5}}$$
$$=\begin{cases}1.153l_0^{1.465}, & \vartheta(\alpha_{9S5}^{-1})=1\\ 1.449l_0^{1.465}, & \vartheta(\alpha_{9S5}^{-1})=\alpha_{9S5}\end{cases} \quad (259)$$

$$A_{9S5}=[\vartheta(\alpha_{9S5}^{-1})]^{-\alpha_{9S5}}\alpha_{9S5}^{\alpha_{9S5}-1}(l_0^2)^{\alpha_{9S5}}$$
$$=\begin{cases}1.087l_0^{1.465}, & \vartheta(\alpha_{9S5}^{-1})=1\\ 1.366l_0^{1.465}, & \vartheta(\alpha_{9S5}^{-1})=\alpha_{9S5}\end{cases} \quad (260)$$

作为初步探讨，当上述分形初始测度为平行四边形面积$l_{01}l_{02}\sin\Omega$时，取（192）式中的A_0为此平行四边形的面积相对其长对角线l_{ldia}分布的如下形式

$$A_0=2(l_{\mathrm{ldia}}^{-1}l_{01}l_{02}\sin\Omega)^2,\quad 0.5\pi\le\Omega<\pi \quad (261)$$

式中

$$l_{\mathrm{ldia}}=\sqrt{l_{01}^2+l_{02}^2-2l_{01}l_{02}\cos\Omega},\quad 0.5\pi\le\Omega<\pi$$

其在$l_{01}=l_{02}=l_0$、$\Omega=0.5\pi$的正方形时，$A_0=l_0^2$。

在$\alpha\ge1$时，得此平行四边形自相似分形测度A的微分方程为

$$\mathrm{d}^{\alpha-1}A=z(l_{01},l_{02},\Omega)\vartheta(\alpha)A_0(\mathrm{d}A_0)^{\alpha-1}, \quad (262)$$

式中$z(l_{01},l_{02},\Omega)$是为引入方程（261）式的待定常量。

基于分数阶微积分，对方程（262）式积分运算得

$$z^{-1}(l_{01},l_{02},\Omega)A=\vartheta(\alpha)[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}A_0^{\alpha},\quad \alpha\ge1 \quad (263)$$

及当$0<\alpha\le1$时进行逆方向上的α^{-1}维分形，得

$$A_0=\vartheta(\alpha^{-1})[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{-1}[z^{-1}(l_{01},l_{02},\Omega)A]^{\alpha^{-1}},\quad 0<\alpha\le1$$

故有

$$A=\begin{cases}z(l_{01},l_{02},\Omega)[\vartheta(\alpha^{-1})]^{-\alpha}[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{\alpha}A_0^{\alpha}, & 0<\alpha\le1\\ z(l_{01},l_{02},\Omega)\vartheta(\alpha)[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}A_0^{\alpha}, & \alpha\ge1\end{cases} \quad (264)$$

根据方程（264）式得$A(\alpha=1)=z(l_{01},l_{02},\Omega)A_0$；又因为$A(\alpha=1)=l_{01}l_{02}\sin\Omega$；得方程（264）式中的待定常量

$$z(l_{01},l_{02},\Omega)=\frac{l_{01}l_{02}\sin\Omega}{A_0}=\frac{l_{\mathrm{ldia}}^2}{2l_{01}l_{02}\sin\Omega}; \quad (265)$$

故得此自相似分形基于分数阶微积分的测度方程为

$$A=\begin{cases}[\vartheta(\alpha^{-1})]^{-\alpha}[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{\alpha}A_{0\alpha}, & 0<\alpha\le1\\ \vartheta(\alpha)[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}A_{0\alpha}, & \alpha\ge1\end{cases} \quad (266)$$

其中$A_{0\alpha}=2^{\alpha-1}l_{\mathrm{ldia}}^{2-2\alpha}[l_{01}l_{02}\sin\Omega]^{2\alpha-1}$。

同理亦得此自相似分形基于分维微积分的测度方程

$$A=\begin{cases}[\vartheta(\alpha^{-1})]^{-\alpha}\Lambda^{\alpha}(\alpha^{-1}-1,1)A_{0\alpha}, & 0<\alpha\le1\\ \vartheta(\alpha)\Lambda^{-1}(\alpha-1,1)A_{0\alpha}, & \alpha\ge1\end{cases} \quad (267)$$

特别地，将上述平行四边形16等分，仅保留4个顶点区域所在闭集，去掉其余12个开集，持续操作，则得到的 Sierpinski 垫片相对维数α_{16S4}及$A_{0\alpha_{16S4}}$分别为

$$\alpha_{16S4}=\frac{\ln 4}{\ln 16}=0.5,$$
$$A_{0\alpha_{16S4}}=2^{\alpha_{16S4}-1}l_{\mathrm{ldia}}^{2-2\alpha_{16S4}}[l_{01}l_{02}\sin\Omega]^{2\alpha_{16S4}-1}=2^{-0.5}l_{\mathrm{ldia}};$$

故由方程（266）式、（267）式分别得此自相似分形测度A_{16S4}为

$$A_{16S4}=[\vartheta(\alpha_{16S4}^{-1})]^{-\alpha_{16S4}}[\Gamma(1+\alpha_{16S4}^{-1})]^{\alpha_{16S4}}(2^{-0.5}l_{\mathrm{ldia}})$$
$$=\begin{cases}1.0l_{\mathrm{ldia}}, & \vartheta(\alpha_{16S4}^{-1})=1\\ \sqrt{2.0}l_{\mathrm{ldia}}, & \vartheta(\alpha_{16S4}^{-1})=\alpha_{16S4}\end{cases} \quad (268)$$

$$A_{16S4}=[\vartheta(\alpha_{16S4}^{-1})]^{-\alpha_{16S4}}\alpha_{16S4}^{\alpha_{16S4}-1}(2^{-0.5}l_{\mathrm{ldia}})$$
$$=\begin{cases}1.0l_{\mathrm{ldia}}, & \vartheta(\alpha_{16S4}^{-1})=1\\ \sqrt{2.0}l_{\mathrm{ldia}}, & \vartheta(\alpha_{16S4}^{-1})=\alpha_{16S4}\end{cases} \quad (269)$$

4.4.4 临界自然数与一种理想点集的维数及测度方程

作为对一种理想点集维数及测度的探讨，考虑闭区间$[0,1]$，初始测度为$l_0=1.0$，进行$2n+1$等分（n为自然数），间隔保留包括二端闭区间在内的$n+1$个闭区间，去掉其余的n个开区间，持续操作，即得到一种理想点集；由方程（227）式得相对维数α_{IPS}为

$$\alpha_{\mathrm{IPS}}=\frac{\ln(n+1)}{\ln(2n+1)}。 \quad (270)$$

方程（270）式当$n=1$时即为三分 Cantor 集合维数。

取预先给定的任意大的有限数为$N_{\mathrm{P}}<+\infty$，引入临界自然数N_{C}，其类似于 Cantor 的超限数，定义N_{C}为

$$N_{\mathrm{P}}<<N_{\mathrm{C}}<+\infty, \quad (271)$$

且N_{C}的临界性质为，当$n\le N_{\mathrm{C}}$时，保留的诸闭区间端点数值仍具有有理数性质；当$n>N_{\mathrm{C}}$时，保留在闭区间部分端点的数值性质将向无理数性质转化；当$n\to+\infty$时，则部分端点数值性质将转化为具有无理数的性质。

当$n\le N_{\mathrm{C}}$时，去掉的系列开区间构成第一项为$n(2n+1)^{-1}$、公比常数为$(n+1)(2n+1)^{-1}<1$的等比级数，累积长度L_{OIS}近似为

$$L_{\mathrm{OIS}}(n\le N_{\mathrm{C}})=\frac{n(2n+1)^{-1}}{1-(n+1)(2n+1)^{-1}}=1; \quad (272)$$

当$n>N_{\mathrm{C}}$时，开区间求和方程（272）式不再严格成立。

当 $n=N_{\mathrm{C}}$ 时，有该理想点集的相对维数 α_{IPSC} 为

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{IPSC}}&=\alpha_{\mathrm{IPS}}(n=N_{\mathrm{C}})=\frac{\ln(N_{\mathrm{C}}+1)}{\ln(2N_{\mathrm{C}}+1)}\\&\approx\frac{\ln N_{\mathrm{C}}}{\ln 2+\ln N_{\mathrm{C}}}\\&=\frac{1}{1+\log_{N_{\mathrm{C}}}2}\\&\approx 1-\log_{N_{\mathrm{C}}}2\text{。}\end{aligned}\tag{273}$$

由方程（270）式得此理想点集相对维数 $\alpha_{\mathrm{IPS}}(n)$ 的几个计算值分别为

$\alpha_{\mathrm{IPS}}(n=10^{10})=0.9708$；

$\alpha_{\mathrm{IPS}}(n=10^{100})=0.9970$；

$\alpha_{\mathrm{IPS}}(n=10^{500})=0.9994$；

$\alpha_{\mathrm{IPS}}(n=10^{1000})=0.9997$。

其中当 $\alpha_{\mathrm{IPS}}(n=10^{10})=0.9708$ 时，由方程（244）式、（246）式分别得此理想点集的测度 A_{IPS} 为

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{IPS}}&=[\vartheta(\alpha_{\mathrm{IPS}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{IPS}}}[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{IPS}}^{-1})]^{\alpha_{\mathrm{IPS}}}\\&=\begin{cases}1.0127, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{IPS}}^{-1})=1\\1.0423, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{IPS}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{IPS}}\end{cases}\end{aligned}\tag{274}$$

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{IPS}}&=[\vartheta(\alpha_{\mathrm{IPS}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{IPS}}}\alpha_{\mathrm{IPS}}^{\alpha_{\mathrm{IPS}}-1}\\&=\begin{cases}1.0009, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{IPS}}^{-1})=1\\1.0301, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{IPS}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{IPS}}\end{cases}\end{aligned}\tag{275}$$

当 $n\to+\infty$ 时，该理想点集的部分端点数值完全转变为具有无理数性质，由（270）式得其相对维数值 α_{IPSL} 为

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{IPSL}}&=\lim_{n\to+\infty}\alpha_{\mathrm{IPS}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(2n+1)}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\ln n+\ln 2}\\&=1\text{；}\end{aligned}\tag{276}$$

依据方程（244）式、（246）式分别得此极限情况下该理想点集的测度值 A_{IPSL} 为

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{IPSL}}&=[\vartheta(\alpha_{\mathrm{IPSL}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{IPSL}}}[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{IPSL}}^{-1})]^{\alpha_{\mathrm{IPSL}}}\\&=\begin{cases}1.0, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{IPSL}}^{-1})=1\\1.0, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{IPSL}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{IPSL}}\end{cases}\end{aligned}\tag{277}$$

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{IPSL}}&=[\vartheta(\alpha_{\mathrm{IPSL}}^{-1})]^{-\alpha_{\mathrm{IPSL}}}\alpha_{\mathrm{IPSL}}^{\alpha_{\mathrm{IPSL}}-1}\\&=\begin{cases}1.0, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{IPSL}}^{-1})=1\\1.0, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{IPSL}}^{-1})=\alpha_{\mathrm{IPSL}}\end{cases}\end{aligned}\tag{278}$$

因当 $n\to+\infty$ 时该理想点集的上述维数值 $\alpha_{\mathrm{IPSL}}=1$、测度 $A_{\mathrm{IPSL}}=1$，所以相应去掉的开区间累积长度 L_{OISL} 为

$$L_{\mathrm{OISL}}=L_{\mathrm{OIS}}(n\to+\infty)=1-A_{\mathrm{IPSL}}=0\text{。}\tag{279}$$

由方程（272）式到方程（279）式，在维数为 1 时，得去掉的部分累积长度从 1 转化为 0。

理想点集性质转化及其维数和测度的研究是重要的。

特别极端地，当三等分闭区间 $[0,1]$，保留中间的闭区间，去掉二边的开区间，持续操作，由方程（227）式得其维数 $\alpha_{3\mathrm{L}1}$ 为

$$\alpha_{3\mathrm{L}1}=\frac{\ln 1}{\ln 3}=0\text{；}\tag{280}$$

依据方程（244）式、（245）式分别得其测度 $A_{3\mathrm{L}1}$ 为

$$A_{3\mathrm{L}1}=\lim_{\alpha_{3\mathrm{L}1}\to 0}[\vartheta(\alpha_{3\mathrm{L}1}^{-1})]^{-\alpha_{3\mathrm{L}1}}[\Gamma(1+\alpha_{3\mathrm{L}1}^{-1})]^{\alpha_{3\mathrm{L}1}}\to+\infty\text{；}\tag{281}$$

$$A_{3\mathrm{L}1}=\lim_{\alpha_{3\mathrm{L}1}\to 0}[\vartheta(\alpha_{3\mathrm{L}1}^{-1})]^{-\alpha_{3\mathrm{L}1}}\Lambda^{\alpha_{3\mathrm{L}1}}(\alpha_{3\mathrm{L}1}^{-1}-1,1)\to+\infty\text{；}\tag{282}$$

也即，无穷次操作后，虽然其极限状态的维数为 0，但仍然以线的微元形式存在，包含无穷多点，具有线的种子或线核的属性；在此层面意义上，线是由线核的排列构成的，线核可细化为全闭核、全开核、左闭右开核及左开右闭核。

4.4.5 非自然数等分的自相似分形的维数及测度计算

自然数等分操作的自相似分形，一般比较直观可视；而对于非自然数等分操作生成的分形，多数并非直观可视，亦仅可根据维数方程（227）式及测度方程（244）式、（235）式予以近似计算。

取初始测度为 l_0，进行 π 等分，对称间隔保留 e 个闭区间，对称去掉其余开区间，持续操作，生成分形；由维数方程（227）式，得其相对维数值 $\alpha_{\pi\mathrm{Le}}$ 为

$$\alpha_{\pi\mathrm{Le}}\approx\frac{\ln e}{\ln\pi}=0.8736\text{；}\tag{283}$$

这里 π 为圆周率，e 为自然常数。

依据方程（244）式、（246）式，分别得其测度 $A_{\pi\mathrm{Le}}$ 为

$$\begin{aligned}A_{\pi\mathrm{Le}}&\approx[\vartheta(\alpha_{\pi\mathrm{Le}}^{-1})]^{-\alpha_{\pi\mathrm{Le}}}[\Gamma(1+\alpha_{\pi\mathrm{Le}}^{-1})]^{\alpha_{\pi\mathrm{Le}}}l_0^{\alpha_{\pi\mathrm{Le}}}\\&=\begin{cases}1.0610l_0^{0.8736}, & \vartheta(\alpha_{\pi\mathrm{Le}}^{-1})=1\\1.1939l_0^{0.8736}, & \vartheta(\alpha_{\pi\mathrm{Le}}^{-1})=\alpha_{\pi\mathrm{Le}}\end{cases}\end{aligned}\tag{284}$$

$$\begin{aligned}A_{\pi\mathrm{Le}}&\approx[\vartheta(\alpha_{\pi\mathrm{Le}}^{-1})]^{-\alpha_{\pi\mathrm{Le}}}\alpha_{\pi\mathrm{Le}}^{\alpha_{\pi\mathrm{Le}}-1}l_0^{\alpha_{\pi\mathrm{Le}}}\\&=\begin{cases}1.0172l_0^{0.8736}, & \vartheta(\alpha_{\pi\mathrm{Le}}^{-1})=1\\1.1447l_0^{0.8736}, & \vartheta(\alpha_{\pi\mathrm{Le}}^{-1})=\alpha_{\pi\mathrm{Le}}\end{cases}\end{aligned}\tag{285}$$

取初始测度为 l_0，进行 e 等分，对称间隔保留 π 个闭区间，对称去掉其余开区间，持续操作，生成分形；由维数方程（227）式，得其相对维数 $\alpha_{\mathrm{eL}\pi}$ 值为

$$\alpha_{\mathrm{eL}\pi}\approx\frac{\ln\pi}{\ln e}=1.1447\text{；}\tag{286}$$

由方程（244）式、（246）式分别得其测度 $A_{\mathrm{eL}\pi}$ 值为

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{eL}\pi}&\approx\vartheta(\alpha_{\mathrm{eL}\pi})[\Gamma(1+\alpha_{\mathrm{eL}\pi})]^{-1}l_0^{\alpha_{\mathrm{eL}\pi}}\\&=\begin{cases}0.9345l_0^{1.1447}, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{eL}\pi})=1\\0.8163l_0^{1.1447}, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{eL}\pi})=\alpha_{\mathrm{eL}\pi}^{-1}\end{cases}\end{aligned}\tag{287}$$

$$A_{\mathrm{eL}\pi} \approx \vartheta(\alpha_{\mathrm{eL}\pi})\alpha_{\mathrm{eL}\pi}^{1-\alpha_{\mathrm{eL}\pi}} l_0^{\alpha_{\mathrm{eL}\pi}} = \begin{cases} 0.9806 l_0^{1.1447}, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{eL}\pi}) = 1 \\ 0.8566 l_0^{1.1447}, & \vartheta(\alpha_{\mathrm{eL}\pi}) = \alpha_{\mathrm{eL}\pi}^{-1} \end{cases} \quad (288)$$

方程（227）式是在$n_i \geq 1$、$0 < \varepsilon_i < 1$时的自相似分形维数表述；特别地，在数学上当$i \geq 1$、$0 < n_i < 1$或常数$W < 1$、及$0 < \varepsilon_i < 1$或常数$Z > 1$时，若仍有差分方程形式

$$\varepsilon_{i+1}^{-1} = Z\varepsilon_i^{-1}, \quad n_{i+1} = Wn_i; \quad (289)$$

则有等式及在$i \to +\infty$时生成集合的负维数α_-方程为

$$\ln Z \ln n_i = \ln W \ln \varepsilon_i^{-1}; \quad (290)$$

$$\alpha_- = \frac{\ln W}{\ln Z} < 0; \quad (291)$$

此虚拟集合的负维数性质是值得进一步探讨的研究方向。

对于自相似分形测度，基于分数阶微积分的计算方程（234）式要比基于分维微积分的方程（245）式更简洁。其中自相似分形构造方式，仅是理解从整数维到分数维的非线性演进途径，而并不具有线性的逆向还原性质。

5 结 论

5.1 关于天体运行背景介质理论的连续轨道描述

在天体运行的连续轨道理论方面，介绍了基础假设及能量（质量）、引力、速度方程，给出 Binet 方程的具体形式及在极弱场、弱场与强场中时的表述和行星近日点进动角的解析分析，包括天体超光速运行轨道方程及其近似解析解，讨论了其与 Einstein 广义相对论的联系与区别。

5.2 关于天体运行背景介质理论的离散轨道描述

在天体运行的离散轨道理论方面，介绍了其所采用的分维数学描述方法、基础假设，依据所得到的具体天体运行的离散轨道方程，给出了太阳系行星、天王星卫星、地球卫星、绕月航天器等离散轨道的理论预言数据，并对其与连续轨道理论共同的背景介质理论基础给出初步展望。其中作为对天体在较广泛区域作用曲线的初步推论，指出天体仅由引力难以形成质量密度趋于无穷大的理想黑洞，目前得到的结论尚不足以刻画至微至广的极致层面。

5.3 关于幂函数的分维微积分及其分数阶微积分的联系

讨论了分维分维导数的位置假设及幂函数的分维导数形式假设，探讨了幂函数的分维积分与其范数的对应关系，分析了分维微积分与分数阶微积分在计算趋势方面的联系与区别。

分析表明分维微积分基础不足，运算困难，不具有广泛的关联性和一致性，在真正的非整数阶微积分严格数学定义及逻辑推演体系建立前，对自然现象的深入探讨应继续以分数阶微积分作为趋势性分析基础。

5.4 关于自相似分形测度计算的非整数阶微积分方程

在分形测度的计算方面，探讨了自相似分形扩展与分维扩展的差分方程描述方法，明确了分形测度的非整数阶微积分形式定义，依据幂函数的趋势性微积分方程表述，讨论了基于分数阶微积分与分维微积分的自相似分形测度趋势性计算方程，并在简略估计及细节趋势二个层面计算了几种典型自相似分形测度。

5.5 初步展望

虽然上述四个分支方向给出的分析过程及结论较目前其它方法略显自然解析，但由于理论的基础假设还存在明显的经验成分，推演过程及结论在极限上仍依赖于经典理论所提供的形式验证，方程中存在的待定常数还需由观测数据统计计算予以校核确认，尚有待进一步建立诸如具有明确几何意义的非整数阶微积分数学定义形式、分形测度与现象演化守恒特征量的关系方程等，故可以肯定，上述四个方面的研究远不是很基本的，而仅是在近似正确与完全错误之间的漫游，其给出的描述亦仅是未来理想解析体系投影在探索历史上的断续轮廓。

参考文献（References）：

[1] F W Warburton. The Advance of the Perihelion of Mercury [J]. Phys Rev, 1946, 70: 86 ~ 87.

[2] Irwin I Shapiro. A century of relativity[J]. Rev Mod Phys, 1999, 71: S41~ S53 .

[3] E V Pitjeva. Relativistic effects and solar oblateness from radar observations of planets and spacecraft[J]. Astronomy Letters, 2005, 31(5): 340~349.

[4] 阎坤. 天体运行的介质层壳与离散轨道引论[J]. 地球物理学进展, 2004, 19(4): 984~995.
Yan K. Introductions on the medium shell and discrete orbits of celestial bodies motion[J]. Progress in Geophysics(in Chinese)，2004，19(4): 984~995.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/celestial-pdf.pdf

[5] 阎坤. 天体运行轨道的一般性Binet方程形式[J]. 地球物理学进展，2005，20(2): 534~539.
Yan K. The general expression of Binet equation about celestial bodies motion orbits[J]. Progress in Geophysics(in Chinese)，2005，20(2): 534~539.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/celestialBinet-pdf.pdf

[6] Anna M Nobili, Clifford M Will. The real value of Mercury's perihelion advance [J]. Nature, 1986, 320: 39~ 41.

[7] Giona M. Fractal Calculus on [0, 1][J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1995, 5(6): 987~1000.

[8] Kyallee Dalrymple, Robert S Strichartz, Jade P Vinson. Fractal differential equations on the Sierpinski gasket[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 1999, 5(1): 203~284.

[9] Rybaczuk M, Kedzia A, Zielinski W. The concept of physical and fractal dimension II. The differential calculus in dimensional spaces[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12(13): 2537~2552.

[10] M D Ruiz Medina, V V Anh, J M Angulo. Stochastic fractional-order differential models with fractal boundary conditions[J]. Statistics & Probability Letters, 2001, 54(1): 47~60.

[11] Abhay Parvate, A D Gangal. Fractal differential equations and fractal -time dynamical systems[J]. Pramana-J Phys, 2005, 64(3): 389~409.

[12] 阎坤. 宇宙分维构造及其数学基础[J]. 地球物理学进展，2004，19(3): 709~716.
Yan K. Fractal dimension structure of Cosmos and its mathematical foundations[J]. Progress in Geophysics(in Chinese)，2004，19(3): 709~716.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/cosmosandmaths-pdf.pdf

[13] Christoph Bandt. Self-Similar Sets 7. A Characterization of Self -Similar Fractals with Positive Hausdorff Measure[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1992, 114(4): 995~1001.

[14] Robert S. Strichartz. Self-Similar Measures and Their Fourier Transforms. II[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1993, 336(1): 335~361.

[15] Rolf Riedi. An Improved Multifractal Formalism and Self-Similar Measures[J]. Journal of Math Analysis and Applications, 1995, 189: 462~490.

[16] Siegfried Graf. On Bandt's tangential distribution for self-similar measures[J]. Monatshefte für Mathematik, 1995, 120(3): 223~246.

[17] 阎坤. 地球空间稳定核素的趋势分析方程与物质的超光速运动规律[J]. 地球物理学进展，2006, 21(1): 38~47.
Yan K. The tendency analytical equations of stable nuclides and the superluminal velocity motion laws of matter in geospace[J]. Progress in Geophysics(in Chinese)，2006, 21(1): 38~47.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/vacuumenergy-pdf.pdf

[18] http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/linearsequence-pdf.pdf