本文框架内容发表在：
阎坤. 天体运行轨道的一般性 Binet 方程形式[J]. 地球物理学进展，2005，20(2)：534～539.
Yan Kun. The general expression of Binet equation about celestial bodies motion orbits[J]. Progress in Geophysics(in Chinese with abstract in English)，2005，20(2)：534～539.

天体运行轨道的一般性 Binet 方程形式

阎 坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘 要：通过讨论已有质速关系的方程形式，给出质速关系的等效极坐标方程及其 Binet 方程，进而给出质速关系及质能关系的几个较为具体的方程形式，包括超光速运动形式。随后应用质能关系探讨介质层壳弯曲方法中能量方程解的一般形式，给出天体运行轨道的一般性 Binet 方程及其在弱场、强场时的近似解表述，给出行星近日点进动、光线弯曲的解析分析。

关键词：天体运行轨道，质速关系方程， Binet 方程，近日点进动，光线弯曲，引力频移

The general expression of Binet equation about celestial bodies motion orbits

YAN Kun

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute，Xi'an 710061，China)

Abstract By discussing the existent equations of mass-velocity relation, an equivalent polar coordinate equation and its Binet equation of the mass-velocity relation are given, and expressions of the mass-velocity relation and mass-energy relation are given too, which include forms of superluminal (also faster-than-light or FTL) motion. Subsequently, using the mass-energy relation, the general expression of the solution of the energy equation on the medium shell curve method is discussed, and general expression of Binet equation and its approximate solutions about orbits of the celestial bodies motion in weak and strong gravitational field are given. Further more, analysis solutions of the advance of the perihelion of planets and bending of light for the gravitational force are given.

Keywords orbit of the celestial bodies motion, equations of mass-velocity relation, Binet equation, superluminal motion, advance of the perihelion of planets, bending of light, gravitational frequency shift

0 引 言

天体运行轨道的方程形式依赖于质能关系方程，而质能关系方程可由质速关系方程确定。如果目前包括超光速运动形式的已有单程光速可变方程及质速关系方程等探索研究[1]是具有深刻意义的，那么通过对其深入讨论应可得到与已有结论相融合，同时又能展示新的物理内容的较为广泛的方程形式。在将质能关系方程直接应用到在天体运行轨道方面，采用介质层壳弯曲的方法已给出了能量方程的一特殊解及天体运行轨道的一特殊 Binet 方程形式[2]，但尚未给出较为一般的形式。

本文通过一具体质速关系的圆锥曲线方程，初步给出质速关系的极坐标方程及其等效的 Binet 方程，介绍了基于双程平均光速基本不变或近似守恒上的单程光速可变方程表述，给出质速关系及质能关系的几个具体形式，接着讨论了宇宙分维构造中元素周期性嵌套规律与正负电子对湮灭产生电磁辐射、以及与精细结构常数之间存在的对应关系、粒子质量间隙等方面内容；随后通过质能关系方程讨论能量方程的一般解，并给出天体运行轨道的一般性 Binet 方程形式、及其在弱场与强场时方程解的表述，进而对行星近日点进动、在星体引力作用下光线轨迹弯曲进行解析分析，是为对介质层壳弯曲描述方法中天体运行轨道方程[2]的补充及对 Einstein 提出相对论理论的百年纪念。

1 质速关系的等效Binet方程形式

1.1 等效 Binet 方程

通过能量交换方法目前已能够得到包括 Einstein 质速关系方程、二个超光速质速关系方程在内的若干结论，其中一适合所有速度的方程形式为[1]

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1+V^2c^{-2}}}\,, \tag{1}$$

式中 m_0、V、m 分别为粒子的静止质量、运动速度及运动质量，c 为真空中光速。

将方程（1）式转化为相应的圆锥曲线方程形式

$$\left(\frac{cm^{-1}}{cm_0^{-1}}\right)^2-\left(\frac{m_0^{-1}V}{cm_0^{-1}}\right)^2=1\,; \tag{2}$$

可得上面方程（2）式仅为下面等效极坐标方程

$$\rho=\frac{l_0}{1-e\cos(\theta-\theta_0)} \tag{3}$$

的特殊形式。这里 ρ、l_0、e 分别为等效极坐标的极径、半通径、偏心率，θ、θ_0 分别为等效角度及初值；适当地选择 θ 可使初值 $\theta_0=0$。

作者简介 阎坤，男，1962年10月生，吉林榆树人，1983年毕业于长春地质学院，目前主要从事非线性科学及天体物理研究。(Email: yankun@nature.ac.cn)

进一步追溯，可得方程（3）式是下面等效 Binet 方程的解析解

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho^{-1}}{\mathrm{d}\theta^2}+\rho^{-1}=l_0^{-1} 。\quad（4）$$

1.2 质速关系及质能关系的几个具体方程形式

对 Michelson-Morley 实验的干涉条纹近似零移动分析，在弱程度的双程平均光速近似守恒（基本不变）时，从数学方程变换方向探索可得单程光速可变方程；其一是由方程变换方法引入速度方向参数 q_r 的方程形式[3]

$$c_\pm=c(1\mp q_r)^{-1}，$$

其二是将真空作为一种介质考虑，由方程等效方法引入速度方向参数 $n_\pm$(等效折射率）的方程形式[1]

$$c_\pm=cn_\pm^{-1}\pm V_{\mathrm{lm}}，$$

皆包含超光速运动表述；这里 V_{lm} 为光路中介质的运动速度，$c_\pm$ 为正向光速 c_+ 与反向光速 c_-，$c>V_{\mathrm{lm}}\geq 0$。

由方程等效方法可得 $n_\pm$ 及 $c_\pm$ 分别为

$$n_\pm\approx 0.5(V_{\mathrm{lm}}c^{-1})^{-2}[\sqrt{1+4(V_{\mathrm{lm}}c^{-1})^2}-1]，\quad（5）$$

$$c_\pm\approx c\pm V_{\mathrm{lm}}+0.5c[\sqrt{1+4(V_{\mathrm{lm}}c^{-1})^2}-1]；\quad（6）$$

即得在方程变换方法中待定的方向参数 q_r 具体形式为

$$q_r\approx 0.5(V_{\mathrm{lm}}c^{-1})^{-1}[\sqrt{1+4(V_{\mathrm{lm}}c^{-1})^2}-1]；\quad（7）$$

极限上，方程（7）式当 $4(V_{\mathrm{lm}}c^{-1})^2<<1$ 时，有

$$q_r\approx 0.5(V_{\mathrm{lm}}c^{-1})^{-1}[[1+2(V_{\mathrm{lm}}c^{-1})^2]-1]=V_{\mathrm{lm}}c^{-1}；\quad（8）$$

而当 $V_{\mathrm{lm}}c^{-1}\to 1$ 时，则有

$$q_r\to 0.5(\sqrt{5}-1)。\quad（9）$$

基于双程平均光速基本不变（近似守恒），可由三个物理等效模型得到相同的单程光速可变方程（6）式[1]，但其本质上都是物理妥协折中及数学方程变换性质的近似描述，并不具有原理层面的深刻普适意义，仅是为将来的严谨解析理论提供些许前期铺垫及过渡性参照。

对于目前双程光速近似不变的实验或等效实验，还应该保持审慎开放的学术态度；当光路足够长、测量精度足够高时，双程平均光速未必守恒或不变。

现以等效 Binet 方程（4）式为基础，其解为等效极坐标方程（3）式，一般展开可得 $m=m(Vc^{-1})$ 在 e 为各值域中几个较为具体的、包括超光速运动的方程形式为

$$m_{1\mathrm{A}}=(1-e^2)\frac{m_0}{\sqrt{1-(1-e^2)V^2c^{-2}}}，\quad 0\leq e<1 \quad（10）$$

$$m_{1\mathrm{B}}=\sqrt{1-e^2}\frac{m_0}{\sqrt{1-(1-e^2)^2V^2c^{-2}}}，\quad 0\leq e<1 \quad（11）$$

$$m_2=(e^2-1)\frac{m_0}{\sqrt{1+(e^2-1)V^2c^{-2}}}，\quad e>1 \quad（12）$$

$$m_3=\sqrt{e^2-1}\frac{m_0}{\sqrt{(e^2-1)^2V^2c^{-2}-1}}，\quad e>1 \quad（13）$$

$$m_4=\sqrt{0.5cV^{-1}}m_0 \quad，\quad e=1 \quad（14）$$

$$m_5=2c^2V^{-2}m_0 \quad，\quad e=1 。\quad（15）$$

上述方程（12）～（15）四式为超光速运动（$V>c$）形式，方程（12）、（14）、（15）三式则允许速度为光速运动（$V=c$），而且（12）式适合所有速度的运动形式。

对于超光速运动，由方程（12）～（15）三式得

$$m(Vc^{-1}\to\infty)\to 0 \quad；\quad（16）$$

而对于低于光速时的方程（10）、（11）、（12）三式，因

$$m(V=0)=m_0，$$

故得方程（10）、（11）二式中 e 有相同取值

$$e=0，\quad（17）$$

及得方程（12）式中 e 的取值为

$$e=\sqrt{2}；\quad（18）$$

考虑方程（13）式中 e 亦与（12）式中 e 有相同取值 $e=\sqrt{2}$；则即分别得 $V<c$ 的 Einstein 质速关系方程

$$m_1=\frac{m_0}{\sqrt{1-V^2c^{-2}}}，\quad V<c \quad（19）$$

以及适合所有速度情况的方程（1）式形式

$$m_2=\frac{m_0}{\sqrt{1+V^2c^{-2}}}，\quad（20）$$

和 $V>c$ 时的质速关系形式

$$m_3=\frac{m_0}{\sqrt{V^2c^{-2}-1}} \quad；\quad V>c 。\quad（21）$$

根据动能 E_{mk} 方程

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{mk}}=\frac{\mathrm{d}(mV)}{\mathrm{d}t}(V\,\mathrm{d}t)，$$

这里 t 为时间；积分得

$$E_{\mathrm{mk}}=\int V\,\mathrm{d}(mV)=mV^2-0.5\int m\,\mathrm{d}V^2 。\quad（22）$$

对于速度低于光速（$V<c$）的运动形式，因

$$E_{\mathrm{mk}}(V=0)=0，$$

故将方程（19）式～（21）式及（14）式、（15）式分别代入方程（22）式，可得其相应动能方程形式分别为

$$E_{\mathrm{mk}\,1}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-V^2c^{-2}}}-m_0c^2，\quad（23）$$

$$E_{\mathrm{mk}\,2}=m_0c^2-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1+V^2c^{-2}}}，\quad（24）$$

$$E_{\mathrm{mk}\,3}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{V^2c^{-2}-1}}+m_0c^2，\quad（25）$$

$$E_{\mathrm{mk}\,4}=\frac{1}{3}\sqrt{0.5c}m_0V^{\frac{3}{2}}+C_4，\quad（26）$$

$$E_{\mathrm{mk}\,5}=2m_0c^2[1-\ln(Vc^{-1})]+C_5；\quad（27）$$

式中 C_4、C_5 为待定常量；这里考虑方程（25）式在 $Vc^{-1}\to\infty$ 时与方程（24）式具有相同的趋势值 m_0c^2。

上述诸式（尤其是质量方程（14）、（15）二式及能量方程（26）、（27）二式）需要来自于实验及理论的深入分析予以考证，确认其可能存在的正确性及适用范围。

因目前只有低于光速运动（$V<c$）的形式（19）式通过实验验证，故本文以下为便于结论比较，将以方程（23）式为基础进行讨论，即得同于 Einstein 狭义相对论形式的能量 E_{m} 方程为

$$E_{\mathrm{m}}=E_{\mathrm{mk}\,1}+m_0c^2=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-V^2c^{-2}}}。\quad（28）$$

1.3 质能关系与宇宙分维构造中元素周期性嵌套规律

天体运行轨道的分析较侧重于局部区域天体的过程分析（微分运算）及守恒分析（积分运算）；而对于宇宙层面的构造分析，具体天体、星系、乃至星系团的运动形式便退至次要位置，大尺度或小尺度大数量的统计分析、趋势分析变得重要了，在数理方法上其亦是具体天体运行方程的数学边界条件及物理介质背景。互为背景及各个层面的真实背景，其物理性质的差异是需要认真而仔细地甄别的。

在物质构造及运动规律方面，由大尺度的宇宙对天体运动所提供的背景的物质性质，与天体本身的构成物质应具有相近的、乃至部分地具有共同的物理学规律。

在资料[4]中关于宇宙分维构造的诠释里曾给出核素图中原子核（稳定核、天然放射核、人工放射核）内中子数N与质子数（原子序数）Z之间趋势关系的简略方程形式为

$$N = 192\tan[0.007(Z-1)]\text{；} \tag{29}$$

得其当

$$0.007(Z-1) = 0$$

与

$$0.007(Z-1) = 0.5\pi$$

时，中子数N取二个极限值

$$N = 192\tan[0] = 0\text{，}$$

与

$$N = 192\tan[0.5\pi] \to +\infty\text{；}$$

即得原子序数在该大周期内（包含目前整个元素周期表在内的一个大周期）的起始点Z_{FS}、终止点Z_{FE}分别为

$$Z_{\mathrm{FS}} = 1\text{；} \tag{30}$$

$$Z_{\mathrm{FE}} = \frac{0.5\pi}{0.007} + 1 \approx 225\text{。} \tag{31}$$

一方面，根据元素的 Moseley 定律K_α谱线频率形式，有K_α谱线频率f与原子序数Z之间有

$$f = 0.75cR_\infty(Z-1)^2\text{，}$$

其中$R_\infty = 1.097373\times10^7\ \mathrm{m}^{-1}$为 Rydberg 常数。

由上式得本大周期内原子序数极限在方程（31）式的$Z_{\mathrm{FE}} = 225$时相应元素的K_α谱线频率f_{FE}为

$$f_{\mathrm{FE}} = 0.75cR_\infty(Z_{\mathrm{FE}}-1)^2 = 1.238\times10^{20}\ \mathrm{Hz}\text{。} \tag{32}$$

另一方面，根据正负电子互相湮灭时产生两个向相反方向射出电磁辐射光子的现象，再由上述 Einstein 质能关系$E_{\mathrm{p}} = m_{\mathrm{e}}c^2$及 Einstein 的光子能量公式$E_{\mathrm{p}} = hf_{\mathrm{p}}$（推广的 Planck 能量子公式），可得每个光子频率f_{p}为

$$f_{\mathrm{p}} = h^{-1}E_{\mathrm{p}} = h^{-1}m_{\mathrm{e}}c^2 = 1.236\times10^{20}\ \mathrm{Hz}\text{，} \tag{33}$$

式中m_{e}为电子质量，h为 Planck 常数。

由方程（32）、(33）二式即得相对误差小于 0.17%的元素K_α谱线频率f_{FE}与光子频率f_{p}之间对应方程为

$$f_{\mathrm{FE}} = f_{\mathrm{p}}\text{。} \tag{34}$$

上述依据元素周期性嵌套分布规律、Moseley 定律、正负电子对湮灭生产电磁辐射光子、Einstein 相对论质能关系式及 Einstein 光子能量公式这五个方面的规律得到方程（34）式的过程初步证明，在本大周期内最大原子序数的元素，其K_α谱线频率与正负电子湮灭时产生的二个光子的频率相对应。

一般地在趋势上，有呈现出正负粒子对特征的粒子质量$m_{\mathrm{p}Z}$与原子序数Z之间的能量对应关系方程

$$0.75hcR_\infty(Z-1)^2 = m_{\mathrm{p}Z}c^2\text{，} \tag{35}$$

即有在趋势上的粒子质量分布方程

$$m_{\mathrm{p}Z} = 0.75hc^{-1}R_\infty(Z-1)^2\text{。} \tag{36}$$

特别地，当$Z=1$、$Z=2$时，由粒子质量分布方程（36）式，得相应的粒子质量m_{p1}、m_{p2}分别为

$$m_{\mathrm{p1}} = 0.75hc^{-1}R_\infty(1-1)^2 = 0\text{；} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{p2}} &= 0.75c^{-1}hR_\infty(2-1)^2 \\ &= 1.819\times10^{-35}\ \mathrm{kg} \\ &\approx 2\times10^{-5}m_{\mathrm{e}}\text{。} \end{aligned} \tag{38}$$

上述结果对于估计诸如中微子层面粒子的质量量级具有参考意义。

由方程（29）式，当

$$0.007(Z-1) = \pi$$

与

$$0.007(Z-1) = 1.5\pi$$

时，中子数N亦取二个极限值

$$N = 192\tan[\pi] = 0\text{，}$$

与

$$N = 192\tan[1.5\pi] \to +\infty\text{；}$$

即得可能存在的下一个大周期内原子序数起始点Z_{SS}、终止点Z_{SE}分别为

$$Z_{\mathrm{SS}} = \frac{\pi}{0.007} + 1 \approx 450\text{，} \tag{39}$$

$$Z_{\mathrm{SE}} = \frac{1.5\pi}{0.007} + 1 \approx 674\text{。} \tag{40}$$

若在这一可能存在的大周期内原子序数起始点Z_{SS}、终止点Z_{SE}亦分别对应着相应的正负粒子对，则依据方程（36）式可得其质量m_{SS}、m_{SE}分别为

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{SS}} &= 0.75c^{-1}hR_\infty(Z_{\mathrm{SS}}-1)^2 \\ &= 3.667\times10^{-30}\ \mathrm{kg} \approx 4m_{\mathrm{e}}\text{；} \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{SE}} &= 0.75c^{-1}hR_\infty(Z_{\mathrm{SE}}-1)^2 \\ &= 8.239\times10^{-30}\ \mathrm{kg} \approx 9m_{\mathrm{e}}\text{。} \end{aligned} \tag{42}$$

依据方程（31）、(39）二式，得原子序数在 226～449 之间没有原子排列；同时结合方程（36）式，亦得相对应的呈现出正负粒子对特征的粒子在趋势层面的质量间隙，如在趋势上质量为$2m_{\mathrm{e}}$、$3m_{\mathrm{e}}$的粒子较为罕见。

作为探讨，趋势关系方程（29）式中的常数 0.007 与 Sommerfeld 精细结构常数 0.007297 比较接近，故方程（29）式可表述为精细结构常数的形式

$$N = 182\tan[\alpha(Z-1)]\,, \tag{43}$$

式中α为精细结构常数，

$$\alpha = e_{\mathrm{q}}^2(2\varepsilon_0 hc)^{-1} = 7.297\times 10^{-3}\,;$$

这里e_{q}为电子电荷量，ε_0为真空介电常数。

由上二式得以精细结构常数表示的目前元素周期表原子序数的可能极限$Z_{\mathrm{FE}\alpha}$为

$$Z_{\mathrm{FE}\alpha} = 0.5\pi\alpha^{-1} + 1 = 216\,。 \tag{44}$$

这一结果与方程（31）式中$Z_{\mathrm{FE}} = 225$相比较有约 4%的相对误差，同时按照该趋势方程则得可能存在的下一个大周期内原子序数起始点$Z_{\mathrm{SF}\alpha}$、终止点$Z_{\mathrm{FE}\alpha}$分别为

$$Z_{\mathrm{SF}\alpha} = \pi\alpha^{-1} + 1 = 432\,, \tag{45}$$

$$Z_{\mathrm{FE}\alpha} = 1.5\pi\alpha^{-1} + 1 = 646\,。 \tag{46}$$

根据元素谱线的 Moseley 定律形式、Rydberg 常数（$R_\infty = 0.5h^{-1}\alpha^2 m_{\mathrm{e}}c$）、Sommerfeld 精细结构常数、以及方程（46）式，得本大周期内元素一谱线能量E的中子数函数形式为

$$E = 4\pi^{-2} m_{\mathrm{e}} c^2 \arctan^2(0.00549N)\,。 \tag{47}$$

方程（47）式基本与元素的$\mathrm{K_{abs}}$谱线[5]位置相对应。

上述诸式的准确性尚需要来自实验数据的检验，以进一步确认宇宙分维构造中元素周期性嵌套规律与基本粒子的正负粒子对相互作用规律、以及与精细结构常数之间可能存在的对应关系。

2 天体运行轨道的一般性Binet方程形式

2.1 能量方程的一般解

根据介质层壳弯曲方法，目前已给出能量方程及其一特殊条件解为[2]

$$r^2\,\mathrm{d}E_{\mathrm{m}} + \eta E_{\mathrm{m}} E_{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}r = 0\,, \tag{48}$$

$$E_{\mathrm{m}} = mc^2 = m_0c^2\exp\left[\eta\frac{M_0c^2}{r}\right], \tag{49}$$

式中η为介质层壳常数，r为粒子与物体间的作用距离，E_{M}及E_{m}即分别为作用物体及质点粒子的能量。

方程（48）式的一般解能量E_{m}及势能A_{mr}方程为

$$E_{\mathrm{m}} = mc^2 = m_0c^2\exp\left[\eta\frac{M_0c^2}{r} + \sigma\right], \tag{50}$$

$$A_{\mathrm{mr}} = m_0c^2 - m_0c^2\exp\left[\eta\frac{M_0c^2}{r} + \sigma\right], \tag{51}$$

式中σ为粒子运行轨道曲线特征待定常量；其一般是与粒子运行轨道曲线中r的最大值$r_{\max}$相关的待定常量。

根据势能方程（51）式，得作用力F_{Mm}方程为

$$F_{\mathrm{Mm}} = -\frac{\mathrm{d}A_{\mathrm{mr}}}{\mathrm{d}r} = -\eta c^4\frac{M_0m_0}{r^2}\exp\left[\eta\frac{M_0c^2}{r} + \sigma\right]。 \tag{52}$$

由方程（52）式得二个条件解分别为

$$F_{\mathrm{Mm}} = -\eta c^4\frac{M_0m_0}{r^2}\left[1 + \eta\frac{M_0c^2}{r} + \sigma\right],$$

$$\eta\frac{M_0c^2}{r} + \sigma \ll 1 \tag{53}$$

$$F_{\mathrm{Mm}} = -\eta c^4\frac{M_0m_0}{r^2}\,,\quad \eta\frac{M_0c^2}{r} + \sigma \to 0\,。 \tag{54}$$

由方程（54）式即得 Newton 引力方程

$$F_{\mathrm{Mm}} = -G\frac{M_0m_0}{r^2}$$

中的引力常数G为

$$G = c^4\eta\,。 \tag{55}$$

根据方程（18）、（50）二式得粒子运动速度方程为

$$V_{\mathrm{m}}^2 = c^2\left[1 - \exp\left[-\frac{2GM_0}{c^2r} - 2\sigma\right]\right]; \tag{56}$$

即得其一极限形式为

$$V_{\mathrm{m}}^2 = \frac{2GM_0}{r} + 2c^2\sigma$$
$$= GM_0\left[\frac{2}{r} + \frac{2c^2\sigma}{GM_0}\right],\quad \frac{2GM_0}{c^2r} + 2\sigma \ll 1 \tag{57}$$

式中V_{m}为粒子的运动速度。

方程（57）式与 Newton 引力理论的活力积分公式

$$V_{\mathrm{m}}^2 = GM_0\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]$$

相同；式中a为行星轨道半长径，得粒子运行轨道曲线特征待定常量σ为

$$\sigma = -\frac{GM_0}{2c^2a}\,。 \tag{58}$$

方程（48）～（55）式仍延续 Newton 力学理论的框架模式，即：作用，微分，积分；激励，演化，守恒。

Newton 引力理论主要适用于类如太阳系规模层次里的行星、卫星等物体运动规律描述；而在更细微与更广大的规模层次上，则有其相应的与 Newton 引力理论存在明显差异的、但亦存在紧密联系及逻辑延展过渡的运动方程描述；即诸引力（包括斥力、作用振荡及平衡自由）理论皆有其适用的规模层次，而与之相邻规模层次的描述方程则近似成为边界条件或物理常数。

一方面，在相对静态上，物体有向与自身质量密度趋同方向运动的趋势；另一方面，在动态上，物体有向与背景间可交换能量相平衡、状态互补方向演化的趋势。内蕴要义即为：密度趋同，能量平衡，状态互补。

2.2 天体运行轨道的一般性 Binet 方程形式

对于方程（57）式有 Newton 引力方程组

$$\begin{cases} V_{\mathrm{m}}^2 = \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{2GM_0}{r} + 2c^2\sigma, \\ r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = L\,, \end{cases} \tag{59}$$

式中φ为天体轨道平面的极坐标角度，e为天体轨道的偏心率，L为天体扫面速度常量的二倍，其表示为

$$L = \sqrt{a(1-e^2)GM_0}\,。$$

将方程（59）式消去时间t后即得 Newton 引力理论的 Binet 方程形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0\,,\tag{60}$$

式中参量

$$u=\frac{GM_0}{r}\,,\quad u_0=\left(\frac{GM_0}{L}\right)^2=\frac{GM_0}{a(1-e^2)}\,。\tag{61}$$

天体运行的参量方程为

$$V_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}r}+\frac{GM_0}{L}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0\,。\tag{62}$$

相应地对于方程（56）式有

$$\begin{cases}V_{\mathrm{m}}^2=\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\\ \quad=c^2\left[1-\exp\left[-\dfrac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma\right]\right]\,,\\ r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=L\exp\left[-\dfrac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma\right]\,。\end{cases}\tag{63}$$

由方程（63）式，消去时间参量t后得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2=c^2u_0[\exp(4c^{-2}u+4\sigma)-\exp(2c^{-2}u+2\sigma)]\,;\tag{64}$$

对φ求导即得天体运动轨道的一般性 Binet 方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0[2\exp(4c^{-2}u+4\sigma)-\exp(2c^{-2}u+2\sigma)]\,。\tag{65}$$

在极弱场时，考虑

$$4c^{-2}u+4\sigma\to 0\,,$$

将方程(65)式右边予$c^{-2}u+\sigma$以零阶 Taylor 级数展开，即得 Newton 引力理论的 Binet 方程（60）式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0\,,\quad 4c^{-2}u+4\sigma\to 0\,。\tag{66}$$

2.3 在强场情况下的 Binet 方程近似解

作为讨论，将方程（65）式表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0\exp(2c^{-2}u+2\sigma)[2\exp(2c^{-2}u+2\sigma)-1]\,;$$

则在强场情况下，当

$$2\exp(2c^{-2}u+2\sigma)>>1\text{、}2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma)>>u$$

时，方程（65）式近似成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}=2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma)\,;\tag{67}$$

这里u_0、σ相应地为与强场时r方程曲线特征相关的待定常量。在趋势上，当上述第一个条件成立时，一般地第二个条件即同时成立。

将方程（67）式转化形式为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma)\,;\tag{68}$$

积分得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=c^2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma)+C_{00}\,,\tag{69}$$

式中C_{00}为待定常量。

在强场时因$2c^{-2}u+2\sigma>>1$，故由方程（64）式得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2=c^2u_0[\exp(4c^{-2}u+4\sigma)-\exp(2c^{-2}u+2\sigma)]\approx c^2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma)\,;\tag{70}$$

在强场时一般地有$c^2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma)>>u^2$；方程（70）式成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\approx c^2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma)\,;\tag{71}$$

故得（69）式中的常量$C_{00}=0$；方程（69）式成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=c^2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma)\,。\tag{72}$$

强场时轨道方程（72）式可由方程（64）式直接得到。

由方程（72）式，得φ的解为

$$\varphi=\pm 0.5c\sqrt{u_0^{-1}}\exp(-2c^{-2}u-2\sigma)+C_{01}\,;\tag{73}$$

式中C_{01}为待定常量；即得u、r的相应解为

$$u=-c^2\sigma-0.5c^2\ln[\pm 2c^{-1}\sqrt{u_0}(\varphi-C_{01})]\,,\tag{74}$$

$$r=\frac{GM_0}{-c^2\sigma-0.5c^2\ln[\pm 2c^{-1}\sqrt{u_0}(\varphi-C_{01})]}\,;\tag{75}$$

这里当取“＋”号、且$0<\varphi-C_{01}<<c\sqrt{u_0^{-1}}$时，或当取“－”号、且$0<C_{01}-\varphi<<c\sqrt{u_0^{-1}}$时，方程（73）～（75）式皆为实解；其变化范围为

$$0<r<<c^{-2}GM_0(-\sigma-0.5\ln 2)^{-1}\,。\tag{76}$$

将方程（75）式表示为一般形式

$$r=\frac{l_{\ln}}{1+\kappa\ln[\pm\tau(\varphi-C_{01})]}\,;\tag{77}$$

式中$l_{\ln}$、κ、τ为r方程曲线特征常量；得不同方程曲线形态之间的常量关系方程为

$$l_{\ln}=-c^{-2}GM_0\sigma^{-1}=2a\,,\ \kappa=0.5\sigma^{-1}\,,\ \tau=2c^{-1}\sqrt{u_0}\,;$$

这里常量$l_{\ln}$与κ之间还可表示为

$$\kappa=-0.5c^2(GM_0)^{-1}l_{\ln}=-c^2a(GM_0)^{-1}\,。\tag{78}$$

同时相应地，得在强场情况下u_0、σ与r方程曲线特征常量的关系为

$$u_0=0.25c^2\tau^2\,,\tag{79}$$

$$\sigma=0.5\kappa^{-1}\,。\tag{80}$$

依上述φ、r的实解得在极强场$2c^{-2}u+2\sigma>>1$时有

$$0<C_{01}-\varphi<<0.5c\sqrt{u_0^{-1}}\exp(-1)\,,\tag{81}$$

$$0<r<<c^{-2}GM_0(0.5-\sigma)^{-1}\,。\tag{82}$$

3 行星近日点进动的一般性解析分析

在弱场 $4c^{-2}u+4\sigma<<1$ 时，将方程（65）式右边予以 $c^{-2}u+\sigma$ 以一阶 Taylor 级数展开，得 Binet 方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=u_0[2(1+4c^{-2}u+4\sigma)-(1+2c^{-2}u+2\sigma)]$$
$$=u_0[1+6c^{-2}u+6\sigma]; \tag{83}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}+(1-6c^{-2}u_0)u=(1+6\sigma)u_0; \tag{84}$$

方程（84）式的解为

$$u=u_0\frac{1+6\sigma}{1-6c^{-2}u_0}+C_0\cos[\sqrt{1-6c^{-2}u_0}(\varphi-C_1)]$$
$$=\varepsilon_{00}[1+\varepsilon_{01}\cos[\varepsilon_{02}(\varphi-C_1)]], \tag{85}$$

故有在弱场时行星运行轨道 r 方程的一般形式为

$$r=\frac{l_{\cos}}{1+\varepsilon_{01}\cos[\varepsilon_{02}(\varphi-C_1)]}; \tag{86}$$

这里 $C_0>0$ 为待定常量，C_1 为角度初值（适当地选择 φ 可使初值 $C_1=0$）；诸常量分别为

$$\varepsilon_{00}=u_0(1+6\sigma)(1-6c^{-2}u_0)^{-1},$$
$$l_{\cos}=GM_0\varepsilon_{00}^{-1},$$
$$\varepsilon_{01}=C_0\varepsilon_{00}^{-1},\quad \varepsilon_{02}=\sqrt{1-6c^{-2}u_0}。$$

依据方程（86）式，当

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=r^2 l_{\cos}^{-1}\varepsilon_{01}\varepsilon_{02}\sin[\varepsilon_{02}(\varphi-C_1)]=0 \tag{87}$$

时，行星处于远日距离 $r_{\max}$ 或近日距离 $r_{\min}$；当行星处于其中的近日点距离 $r_{\min}$ 时，由上述方程即得行星轨道第 n 周及第 $n+1$ 周角度 φ_n 及 φ_{n+1} 的方程及 C_0 分别为

$$\varepsilon_{02}(\varphi_n-C_1)=2n\pi,$$
$$\varepsilon_{02}(\varphi_{n+1}-C_1)=2(n+1)\pi,$$
$$C_0=GM_0 r_{\min}^{-1}-\varepsilon_{00};$$

则有

$$\varepsilon_{02}(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=2\pi。 \tag{88}$$

对于方程（88）式，取行星运行轨道相邻二周近日点展开的角度

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n=\varphi_0,$$

即得 φ_0 的方程为

$$\varphi_0=\frac{2\pi}{\varepsilon_{02}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-6c^{-2}u_0}}; \tag{89}$$

在 $6c^{-2}u_0<<1$ 时，方程（89）式成为

$$\varphi_0\approx 2\pi[1+3c^{-2}u_0]=2\pi+6\pi c^{-2}u_0; \tag{90}$$

故得行星轨道近日点进动角 $\Delta\varphi_0$ 为

$$\Delta\varphi_0=\varphi_0-2\pi=6\pi c^{-2}u_0=\frac{6\pi GM_0}{c^2a(1-e^2)}。 \tag{91}$$

方程（91）式与 Einstein 广义相对论给出的结论[6,7]一致；从方程（84）式始上述解析分析过程也较资料[2]给出的分析过程稍具一般性。

由上述分析可见，将方程（65）式右边予 $c^{-2}u+\sigma$ 以 Taylor 级数的零阶展开得到 Newton 引力理论的 Binet 方程形式，一阶 Taylor 级数展开成的 Binet 方程解则与 Einstein 广义相对论得出的结论一致。

4 在星体引力作用下光线轨迹弯曲的Binet方程及其解析解

4.1 光线轨迹弯曲的 Binet 方程及其解析解

对于从遥远处发出、并经由一半径为 R 的星体表面、又去至极远处的光线，因 $V_{\mathrm{m}}\approx c$、常量 $L\approx cR$，故参照方程（63）式得光线受到恒星作用的微扰动方程形式为

$$\begin{cases} r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=cR\exp\left[-\dfrac{2GM_0}{c^2r}-2\sigma\right], \\ c^2=\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2。\end{cases} \tag{92}$$

与方程（63）式相比，上述微扰动方程则表明光线的运动速度及方向仅在微量上受到恒星的扰动，而在整体上基本不依赖于恒星的作用。

将方程（92）式消去时间 t 后，得相应的 Binet 方程形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=2u_0\exp(4c^{-2}u+4\sigma); \tag{93}$$

在极弱场时将方程（93）式右边予 $c^{-2}u+\sigma$ 以进行零阶 Taylor 级数展开，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=2u_0,\quad 4c^{-2}u+4\sigma\to 0。 \tag{94}$$

因在近星点处

$$u(\varphi=0)=\frac{GM_0}{R}=c\sqrt{u_0},$$

故方程（94）式的解为

$$u=2u_0+c\sqrt{u_0}(1-2c^{-1}\sqrt{u_0})\cos\varphi。 \tag{95}$$

当 $r\to\infty$ 时 $u=0$，由上式得单边光线旋转角度 φ_∞ 的方程为

$$2u_0+c\sqrt{u_0}(1-2c^{-1}\sqrt{u_0})\cos\varphi_\infty=0, \tag{96}$$

解得

$$\varphi_\infty=\arccos[-2c^{-1}\sqrt{u_0}(1-2c^{-1}\sqrt{u_0})^{-1}]; \tag{97}$$

当 $2c^{-1}\sqrt{u_0}<<1$ 时，方程（97）式的二单边解(入射及射出) 角度 $\varphi_{\infty1}$、$\varphi_{\infty2}$ 分别为

$$\varphi_{\infty1}=0.5\pi+2c^{-1}\sqrt{u_0}, \tag{98}$$

$$\varphi_{\infty2}=-0.5\pi-2c^{-1}\sqrt{u_0}; \tag{99}$$

故有经由星体表面的光线双边总的偏转角度ϕ为

$$\phi=(\varphi_{\infty1}-\varphi_{\infty2})-\pi$$
$$=[\pi+4c^{-1}\sqrt{u_0}]-\pi=\frac{4GM_0}{c^2R}\text{。} \quad (100)$$

上述依据介质层壳弯曲模型给出的关于在星体引力作用下光线偏转角的分析结论，与 Einstein 相对论给出的结果[6,7]相一致。

4.2 光线引力频移数值量级的初步估计

当极弱场时，根据方程（98）、（99）二式得光线在星体表面切向上从极远处入射至星体表面、及又从星体表面射出去极远处，光线于波长为$\lambda_{\infty1}$、λ_R尺度在运动的垂直方向上平均累计位移Δr_1、Δr_2分别为

$$\Delta r_1=(0.5\pi-\varphi_{\infty1})\lambda_{\infty1}=-2c^{-1}\sqrt{u_0}\lambda_{\infty1}\text{，} \quad (101)$$

$$\Delta r_2=(-0.5\pi-\varphi_{\infty2})\lambda_R=2c^{-1}\sqrt{u_0}\lambda_R\text{。} \quad (102)$$

对于沿星体表面径向上从极远处入射至星体表面、及又从星体表面射出去极远处的光线，若星体对光线在运动方向于波长为$\lambda_{\infty1}$、λ_R尺度上的累计位移仍满足方程（101）、（102）二式，则有

$$\lambda_R-\lambda_{\infty1}=-2c^{-1}\sqrt{u_0}\lambda_{\infty1}\text{，} \quad (103)$$

$$\lambda_{\infty2}-\lambda_R=2c^{-1}\sqrt{u_0}\lambda_R\text{；} \quad (104)$$

得引力频移数值量级的初步估计为

$$\frac{f_R-f_{\infty1}}{f_{\infty1}}=2c^{-1}\sqrt{u_0}=\frac{2GM_0}{c^2R}\text{，} \quad (105)$$

$$\frac{f_{\infty2}-f_R}{f_R}=-2c^{-1}\sqrt{u_0}=-\frac{2GM_0}{c^2R}\text{；} \quad (106)$$

式中$\lambda_{\infty1}$、$f_{\infty1}$，λ_R、f_R，$\lambda_{\infty2}$、$f_{\infty2}$分别为光线在距星体极远距离的入射点处、至星体表面时、又射出至极远处时的波长及频率。

将方程（101）、（102）二式直接应用于方程（103）、（104）二式是属于数值量级估计层面的初步探讨性质的，还需要进一步给出严格证明过程以确认其有效性。

上述分析初步给出光线在星体引力作用下频移的数值量级估计方程（105）、（106）二式，偏离于验证目前 Einstein 广义相对论引力频移$GM_0(c^2R)^{-1}$的有关白矮星中天狼 B（SiriusB）和 40 波江 B（40EriB）红移观测数据[7,8]，而与 Pound-Snider 实验[9]给出的数据结论较为接近。

5 结 论

本文介绍了基于双程平均光速近似守恒(近似不变）上的单程光速可变方程表述，探讨了粒子运动质速关系方程的一般形式，讨论了宇宙分维构造中元素周期性嵌套规律与正负电子对湮灭产生电磁辐射、以及与精细结构常数之间的对应关系、呈现出正负粒子对特征的粒子质量间隙等；对介质层壳弯曲描述方法予以了补充，初步给出了质速关系的等效 Binet 方程、天体运行轨道的一般性 Binet 方程形式及其弱场解和强场解，进而讨论了行星近日点进动、光线弯曲的解析分析过程。

对于质速关系描述，本文的分析结果初步表明诸多质速关系式都可以从等效 Binet 方程（4）式自然得出，故其背景基础确宜值得深入研究考证。通过深入地研究方程（4）式的物理意义，继续向上追溯，或可以确立新的更为深刻的基本规律。

与 Einstein 相对论在行星近日点进动、光线弯曲分析中的二个 Binet 方程非线性形式[6,7]相比较，本文给出的 Binet 方程形式（65）式及（93）式明显较为复杂，且参照极弱场理论和弱场理论框架建立的方程在强场时具有解（77）式的局限性，但其二个极限形式（85）式、（95）式的解析解分析过程却较目前包括 Einstein 广义相对论在内的已有分析推演方法稍显自然简练，是为更深入地理解前人的引力理论及进一步探讨自然的引力现象提供可能的分析途径及参考方向。

物理机理与数学方程相结合可延展出一系列结论；适当地探讨分析数学方程的负解及复变函数解，有助于明晰物理演化的潜势及递续、方程形式的转变及其诸解之间的联系，进而总括自然现象演化过程的规律谱阵。

在科学发展的层面，物理学没有不可深入探讨的理论框架，但现下至少有三个敏感区:（Ⅰ）关于双程平均光速近似守恒的单程光速可变方程;（Ⅱ）关于波粒二象性的介质作用方程;（Ⅲ）关于天体运行轨道的平直空间方程。

超光速运动规律、波粒二象性机理、天体运行轨道方程，这三个紧密联系的重要前沿领域，在远景趋势上皆可归结于对真空、及真空的诸级背景能量和信息构造研究，取得根本进展的标志即是构造新的物理思想及数学描述方法，引入更为基本的常数，阐释更为广泛的现象,并解析开 Newton 引力常数G及 Planck 量子常数h。

目前似乎处在新的 Kepler（狭义相对论、量子理论、广义相对论）之后、Newton 之前的时代，Planck 及 Einstein 的工作结论及思想则是连接过去并延伸向未来的重要环节。

参考文献（References）:

[1] 阎坤．关于超光速及量子分形的能量交换描述方法[R]．西安：西安现代非线性科学应用研究所，2004-10-12。
Yan Kun. Energy-exchange descriptions on the superluminal velocity and quantum fractal[R]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 12 Oct 2004.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/physics-pdf.pdf

[2] 阎坤．天体运行的介质层壳与离散轨道引论[J]．地球物理学进展，2004，19(4)：784～795。
Yan Kun. Introductions on the medium shell and discrete orbits of celestial bodies motion[J]. Progress in Geophysics(in Chinese with abstract in English)，2004，19(4): 984～995.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/celestial-pdf.pdf

[3] ZHANG Yuan-zhong, Nester James M. On test theories of special relativity. CCAST-93-17, ASITP-93-50 (Submitted to Phys. Rev. D), Aug 1993, 14p.

[4] 阎坤．宇宙分维构造及其数学基础[J]．地球物理学进展，2004，19(3)：709～716。
Yan Kun. Fractal dimension structure of Cosmos and its mathematical foundations[J]. Progress in Geophysics(in Chinese with abstract in English)，2004，19(3)：709～716.
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/cosmosandmaths-pdf.pdf

[5] http://jan.ucc.nau.edu/~wittke/Microprobe/Xray-MoseleysLaw.html

[6] 俞允强．广义相对论引论[M]．北京：北京大学出版社，2004，39～169。

[7] Weber J．广义相对论与引力波[M]．陈凤至、张大卫 译，北京：科学出版社，1979，52～65。

[8] 李宗伟，肖兴华．天体物理学[M]．北京：高等教育出版社，2003，229～230。

[9] Pound R V, Snider J L．Effect of gravity on gamma radiation[J]. Phys. Rev.，1965, 140: B788～B803。