本文框架内容发表在：
阎坤. 天体运行的介质层壳与离散轨道引论[J]. 地球物理学进展，2004，19(4)：984～995.
Yan Kun. Introductions on the medium shell and discrete orbits of celestial bodies motion[J]. Progress in Geophysics(in Chinese)，2004，19(4)：984～995.

天体运行的介质层壳与离散轨道引论

阎 坤
(西安现代非线性科学应用研究所, 西安 710061)

摘　要：采用介质层壳弯曲的唯象方法，在规整三维空间中给出了能量方程及物体间的能量引力形式表述，其引力方程的二个条件解分别与Newton引力理论及Einstein引力理论的有关结果相近。讨论了目前分维微积分与分数阶微积分相比在函数方面的局限性，给出了相似扩展方程，随后通过讨论天体运行轨道的基线扩展特征，给出了天体运行的离散轨道方程，并以太阳系行星及部分卫星为例，给出了这些天体运行离散轨道方程的具体表述形式。

关键词：介质层壳弯曲，离散轨道方程，能量方程，分维微积分的局限，分数阶微积分，相似扩展方程，分维扩展

Introductions on the medium shell and discrete orbits of celestial bodies motion

YAN　Kun
(Xi’an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi’an 710061, China)

Abstract　By using phenomenological method for the medium shell curve, an energy equation on three dimensions regular space and the energy-gravitation form about gravitational interaction between bodies are given. Further more, two condition solutions of the gravitational expression is close by with the results of Newton’s gravitational theory and Einstein’s general relativity respectively. The localizations in the functions of the fractal dimension calculus compared with the fractional-order calculus at present are discussed, and the similar expanded equation is given. Subsequently，by discussing the expanded baseline property on the celestial motion orbit, the discrete orbital equation of the celestial bodies motion are given. And referring to the related orbital data of planets and some satellites in the solar system, the concrete expression on the discrete orbit of the celestial bodies motion are given.

Keywords　medium shell curve, discrete orbital equation of celestial bodies motion, energy equation, localization of fractal dimension calculus, fractional order calculus, similar expanded equation, fractal dimension expanded

0　引　言

从历史角度看，在天体运行描述方面自Newton的天体力学之后，Einstein的广义相对论[1,2]较为经典，其弯曲空间的物理思想、采用Riemann几何的描述方法、取得的研究结论、乃至哲学意义等，对来者的影响都是深远的[3]。上述二个理论在数学方法上采用的基本是纯粹数学坐标系框架。如果在规整三维空间中将用于描述的数学坐标系赋予相应的天体运行所在背景介质的物理属性，以较为简略的能量方程形式对天体间的引力予以探讨描述，并能够部分地融合上述理论的部分结论，则仍是具有意义的研究方向。

另一方面，直至目前（包括M理论），分析计算表明在基本粒子层面显著的量子效应[4]，在天体运动方面的影响却是极其微弱的。至少在太阳系范围内，引力在起主导作用。如果天体运行亦存在相应的量子效应，则其形式与已有量子理论或许具有类似的方程表述，但其常数可能将具有与Planck常数不同的概念含义及数值量级。

本文就此首先采用介质层壳的物理唯象方法，在规整三维空间中给出能量方程及能量引力表述形式；探讨目前分维微积分[5]与分数阶微积分比较在函数方面的局限性及物理学原理在现象方面的普适性；给出相似扩展方程，通过对天体运行轨道在分维扩展及分形扩展二个层次的探讨，给出天体运行基线的离散轨道方程，并以太阳系诸行星为例，讨论了天体离散轨道方程的具体表述形式，是为对天体在径向介质层壳及环向离散轨道这二个方向上轮廓及部分细节的探讨描述。

作者简介　阎坤，男，1962年10月生，吉林榆树人，1983年毕业于长春地质学院，目前从事非线性科学及天体物理研究。
(Email: yankun@nature.ac.cn)

1 背景介质赋予数学坐标系以物理性质的意义及能量方程

目前对自然现象的描述较依赖于数学坐标系，以及由其得到的数学变换。

历史上，Descartes 创造性地建立了数学坐标系，将 Euclid 的几何图形置于坐标系中予以解析，随后由 Newton、Euler 等进一步将其微分、变分细化，并有效地应有到自然现象的解释描述中。在低速度、低能量的情况下，直接应有数学坐标系能够得到较为准确的物理学规律；但进入高速度、高能量的情况时，直接将自然现象置于数学坐标系中予以描述所得到的物理学结论多时已不具有普适性，而随后数学修补工作所得到的辅助结论在物理学解释上亦往往是很勉强的。

在流体力学领域以外，一些科学家曾试图考虑背景介质对自然现象演化的影响，但后来多在 1887 年前后关于以太背景、地球运动、局域光速之间关系的 Michlson-Morley 实验结论影响下，于各自的理论表述形式中略过了。尤其在基本粒子及天体运动方面，目前基本是将其直接置于数学坐标系中进行描述，而没有将自然现象所处的背景介质与用于数学描述的坐标系相结合，并作为一根本原则确定下来。对于物理学，数学描述确可表达物理思想及原则，并通过数学本身的逻辑予以适当地延展发挥；物理学里除个别基本概念外，包括原理在内的所有内容都紧密地与数学中从数论到几何学的表述相联系，每一次进展亦都得益于数学提供的演绎分析方法，历经从物理思想通过数学逻辑推演再到物理结果的过程。数学逻辑推演描述了物理规律，但其不是物理规律本身。现象及其所处的背景演化是物理学研究的主要方向。

重新审慎考虑自然现象所处的背景介质的物理性质，将自然现象放到其所处的背景介质中予以描述，赋予数学坐标系以物理属性，则可确定物体在背景介质中运动演化是其与背景介质（乃至更深层背景介质）相互作用能量平衡的过程。在物理机制上，一方面，物体高速运动时会将背景介质的物理性质激发出来；另一方面，细微层面的粒子会受到背景介质的不可忽略的显著反作用及扰动。

根据上述背景介质赋予数学坐标系以物理属性的原则，并参照 Einstein 广义相对论的弯曲空间思想及狭义相对论的质能关系方程，下面以较为简略的形式引入能量方程假设，对质点粒子在介质层壳中的运动规律作出探讨性的分析描述，或可予 Newton 及 Einstein 引力理论以一种可能途径的点滴诠释。

能量方程假设：一初始能量为静止能量 m_0c^2 的自由质点粒子在能量为 E_M 的物体作用下，从 r 到 $r+\mathrm{d}r$ 处作功，粒子能量 $E_\mathrm{m}=mc^2$ 的方程为

$$r^2\,\mathrm{d}E_\mathrm{m}+\eta E_\mathrm{m}E_\mathrm{M}\,\mathrm{d}r=0 \quad , \tag{1}$$

式中 η 为介质层壳常数，E_m 为质点粒子的 Einstein 能量

$$E_\mathrm{m}=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-V_\mathrm{m}^2c^{-2}}} ,$$

m_0、V_m 分别为质点粒子的质量及在物体作用下产生的运动速度，c 为真空中光速。

由方程（1）式有粒子能量解的函数形式以及粒子势能、作用力分别为

$$E_\mathrm{m}=mc^2=f(C_{\mathrm{r}0}r^{-1}) \quad , \tag{2}$$

$$A_\mathrm{mr}=m_0c^2-E_\mathrm{m} , \quad A_\mathrm{mr}(r\to\infty)=0 \tag{3}$$

$$F_\mathrm{Mm}=-\frac{\mathrm{d}A_\mathrm{mr}}{\mathrm{d}r} , \tag{4}$$

式中 $C_{\mathrm{r}0}$ 为待定常量，$r\ge r_0$，r_0 为物体的半径，$C_{\mathrm{r}0}r^{-1}$ 为无量纲数。

2 势能方程及其引力方程

2.1 势能方程

对于能量方程（1）式，当物体整体自旋转能量 E_Mro 的影响及由质点粒子能量变化引起物体能量的变化皆可忽略时，根据 Einstein 质能关系，有物体能量

$$E_\mathrm{M}=M_0c^2 ,$$

这里 M_0 为物体的质量。

由以上诸式解得粒子在物体作用下的能量方程、势能方程为

$$E_\mathrm{m}=mc^2=m_0c^2\exp\left(\eta\frac{M_0c^2}{r}\right) \quad , \tag{5}$$

$$A_\mathrm{mr}=m_0c^2-m_0c^2\exp\left(\eta\frac{M_0c^2}{r}\right) \quad 。 \tag{6}$$

2.2 引力方程及其与 Newton、Einstein 引力理论的联系

根据势能方程（6）式，得作用力方程及其二个条件解分别为

$$F_{\mathrm{Mm}} = -\frac{\mathrm{d}\,A_{\mathrm{mr}}}{\mathrm{d}\,r} = -\eta c^4 \frac{M_0 m_0}{r^2} \exp\left(\eta \frac{M_0 c^2}{r}\right), \quad (7)$$

$$F_{\mathrm{Mm}} = -\eta c^4 \frac{M_0 m_0}{r^2}\left(1+\eta \frac{M_0 c^2}{r}\right), \quad rM_0^{-1} >> \eta c^2 \quad (7\mathrm{A})$$

$$F_{\mathrm{Mm}} = -\eta c^4 \frac{M_0 m_0}{r^2} \quad , \quad \eta M_0 c^2 r^{-1} \to 0 \quad (7\mathrm{B})$$

方程（7B）式与 Newton 引力方程

$$F_{\mathrm{Mm}} = -G\frac{M_0 m_0}{r^2}$$

具有相同的形式，故可确定 Newton 引力常数

$$G = c^4 \eta\,, \quad (8)$$

方程（7）～（7B）成为

$$F_{\mathrm{Mm}} = -G\frac{M_0 m_0}{r^2}\exp\left(\frac{GM_0}{c^2 r}\right), \quad (7\mathrm{C})$$

$$F_{\mathrm{Mm}} = -G\frac{M_0 m_0}{r^2}\left(1+\frac{GM_0}{c^2 r}\right), \quad rM_0^{-1} >> Gc^{-2} \quad (7\mathrm{D})$$

$$F_{\mathrm{Mm}} = -G\frac{M_0 m_0}{r^2} \quad , \quad GM_0 c^{-2} r^{-1} \to 0 \quad (7\mathrm{E})$$

方程（7E）式为 Newton 引力理论形式，（7D）式则与 Einstein 引力理论的有关引力解[1] 形式相近。以上述分析的观点看，物体之间的引力作用是通过介质层壳进行的。

除由势能方程（6）式可给出 Newton 的引力方程形式外，对于能量方程及其条件解能量方程（5）式，亦应给出在一极限情况下与 Newton 引力理论相关的方程表述形式。根据方程（5）、（8）二式得

$$1-\frac{V_{\mathrm{m}}^2}{c^2} = \exp\left(-\frac{2GM_0}{c^2 r}\right) \quad , \quad (9)$$

故有质点粒子在引力作用下的运动速度及其一条件解形式分别为

$$V_{\mathrm{m}} = c\sqrt{1-\exp\left(-\frac{2GM_0}{c^2 r}\right)} \quad , \quad (10)$$

$$V_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2GM_0}{r}} \quad , \quad rM_0^{-1} >> Gc^{-2} \quad (10\mathrm{A})$$

显然上面方程（10A）式与 Newton 引力理论的逃逸速度方程（或能量守恒方程）是一致的。

上述分析是从介质层壳弯曲及其能量方程开始建立引力模型的，其参照的基础是 Newton 引力理论、Einstein 相对论的质能关系及弯曲空间。与此介质层壳模型相比较，中国汕头大学章钧豪教授的狭义相对论引力理论[6]是从平直时空及狭义相对论有关结论建立的引力模型；这二个模型的出发点有所不同，部分结论相同或相近；在与广义相对论的已有结论对比方面，狭义相对论引力理论进行了较为全面的研究讨论，作出了细致的工作。

下面给出行星运动轨道方程及其近日点进动的一个较为简略的轮廓层面的讨论。

对于方程（10A）式有 Newton 引力方程组

$$\begin{cases} V_{\mathrm{m}}^2 = \left(\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 + \left(r\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 = \dfrac{2GM_0}{r}, \\ r^2\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = L\,, \end{cases}$$

式中 φ 为行星轨道平面的极坐标角度，

$$L = \sqrt{a(1-e^2)GM_0}$$

为行星扫面速度常数的二倍，a、e 分别为行星轨道半长径、偏心率。

行星运行的参量方程为

$$V_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\,V_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\,r} + \frac{GM_0}{L}\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = 0\,。$$

相应地对于（10）式有

$$\begin{cases} V_{\mathrm{m}}^2 = \left(\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 + \left(r\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 \\ \qquad = c^2\left(1-\exp\left(-\dfrac{2GM_0}{c^2 r}\right)\right) , \\ r^2\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = L\exp\left(-\dfrac{2GM_0}{c^2 r}\right) 。\end{cases} \quad (11)$$

由方程（11）式得行星运动轨道的 Binet 方程形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\,\varphi^2} + u = u_0[2\exp(4c^{-2}u) - \exp(2c^{-2}u)]\,, \quad (12)$$

式中参量

$$u = \frac{GM_0}{r}\,, \quad u_0 = \left(\frac{GM_0}{L}\right)^2 。$$

将方程（12）式右边予以零阶 Taylor 级数展开，得 Newton 引力理论的 Binet 方程形式为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2}+u=u_0 \quad , \quad \frac{GM_0}{c^2 r}\to 0 \qquad (12A)$$

将方程（12）式右边进行一阶 Taylor 级数展开，得相应的 Binet 方程形式为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2}+(1-6c^{-2}u_0)u=u_0 \,, \quad \frac{GM_0}{c^2 r}<<1 \qquad (13)$$

方程（13）式的解为

$$u=u_0(1-6c^{-2}u_0)^{-1}+C_0\cos[\sqrt{1-6c^{-2}u_0}(\varphi+C_1)]\,, \qquad (14)$$

这里$C_0>0$为待定常量，C_1为角度初值；适当地选择φ可使初值$C_1=0$。

当$du/d\varphi=0$，相应地对于行星近日点距离$r_{\min}$，u取极大值，得常量C_0及行星轨道相邻二周近日点进动角$\Delta\varphi$的方程为

$$C_0=GM_0 r_{\min}^{-1}-u_0(1-6c^{-2}u_0)^{-1}\,,$$

$$\sqrt{1-6c^{-2}u_0}(2\pi+\Delta\varphi)=2\pi \,, \quad \varphi=2\pi+\Delta\varphi$$

故得行星轨道近日点进动角为

$$\Delta\varphi=6\pi c^{-2}u_0=6\pi\left(\frac{GM_0}{cL}\right)^2=\frac{6\pi GM_0}{c^2 a(1-e^2)}\,。 \qquad (15)$$

方程（15）式与 Einstein 相对论给出的结论一致。上述诸式是在恒星质量远大于行星质量（$M_0>>m_0$）的情况下得到的结果；对于质量相近的双星进动，则需考虑采用约化质量的方法进行相应的分析讨论。

2.3 介质层壳常数及其相关性质

根据方程（8）式得介质层壳常数

$$\eta=Gc^{-4}=8.26\times10^{-45}\,\mathrm{s^2m^{-1}kg^{-1}}\,,$$

故有

$$\eta=8.26\times10^{-45}\,\mathrm{N}^{-1}=\frac{1}{1.21\times10^{44}\,\mathrm{N}}=\frac{1}{F_0} \quad ,$$

$$\eta=\frac{G}{c^4}=\frac{\sqrt{\hbar Gc^{-3}}}{c^2\sqrt{c\hbar G^{-1}}}=\frac{l_{\mathrm{Pl}}}{m_{\mathrm{Pl}}c^2} \quad , \qquad (16)$$

其中

$$l_{\mathrm{Pl}}=\sqrt{\hbar Gc^{-3}}=1.616\times10^{-35}\,\mathrm{m}\,、$$

$$m_{\mathrm{Pl}}=\sqrt{c\hbar G^{-1}}=2.177\times10^{-8}\,\mathrm{kg}$$

分别为 Planck 长度、质量，$F_0=1.21\times10^{44}\,\mathrm{N}$。

在方程（16）式中，介质层壳常数η通过真空中光速c与引力常数G相联系。作为对真空中光速与诸如气体介质分子分布关系的一种唯象探讨，由 Avogadro 定律的 Avogadro 常数

$$N_{\mathrm{A}}=6.022\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}\,、$$

理想气体摩尔体积常数

$$V_{\mathrm{Am}}=0.0224\,\mathrm{m^3mol^{-1}}\,,$$

得理想气体的分子线分布常数为

$$N_{\mathrm{L}}=(N_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{Am}}^{-1})^{1/3}=2.995\times10^8\,\mathrm{Um^{-1}}\,,$$

则可初步给出c与N_{L}之间的数值唯象关系为

$$c=n_{\mathrm{U}}N_{\mathrm{L}} \quad , \qquad (17)$$

其中常数$n_{\mathrm{U}}=1.0009477\,\mathrm{m^2s^{-1}U^{-1}}$， U 为 1 个分子的单位表示。一方面，从物理直观上常数n_{U}与单个分子在单位时间的旋转面积相关，部分地相似于天体运行的 Kepler 第二定律的内容表述；另一方面，与在地面高度上的空气折射率 1.00027 相比较，在数值量级上常数n_{U}又与理想气体的折射率相关，但由于其所附带的单位为$\mathrm{m^2s^{-1}\,U^{-1}}$，故其不是通常意义下的折射率。

这里引入 U（Unit）作为 1 个分子（或 1 个元素）的辅助单位表示，可稍明晰N_{L}及n_{U}数值的物理含义。

更深入的研究将表明，介质层壳常数η及真空中光速c与背景介质的物理性质相关，在背景介质下所呈现的现象过程是其自然起伏波动、集聚消解的变化表现。

2.4 势能函数的数学边界条件展望

对于方程（6）、（7）二式，如果考虑物体亦为质点（$r_0\to0$）的情况，则当$r\to0$时会出现势能及作用力函数发散的问题。

一种可能的途径是对势能函数予以适当的数学形式变换，仅使其在$r\to0$时的数学边界条件收敛于一有限值，而基本不改变势能函数在其它区域原有的描述。这对于还未深入了解相邻层面尺度的规律以前，具有数学处理（函数在所描述的层面尺度上连续且收敛）及物理标记（突出所描述层面尺度上的主要势垒及作用力屏障特征）的简化作用，且由于粒子在距物体无穷小近处时与在无穷大远处时一样受力为零（是自由的），对于进一步研究诸如夸克禁闭及渐近自由等问题具有参考意义。

数学边界条件仅是为物理思想的数学实现给出的，是属于数学性质的边界条件，其只具有在所描述现象层面上的物理意义，不表示自然本身的真实性质。

自然本身的真实性质是未知的。引入势能函数数学边界条件的物理原因还在于，在不同的现象尺度层面上 $r \to 0$，其各所具有的物理内涵表述及数学解析形式也是不同的；某一领域现象层面的 $r \to 0$ 尺度，可能是另一领域现象层面尺度的上限大数；上一层面的数学零值蕴涵着下一层面无限区域的处在变化中的物理内容；在相邻层面及相同层面上，自然现象相互间的状态交换及其各阶导数的动平衡，是自然现象持续变化、状态传递状态的动力。

在细节方面，（1）不同尺度层面所具有的物理性质及有效数学表述也是不同的，高值势垒或正或负、高值作用力屏障或为引力或为斥力，是处在多层面尺度变化中的，单一具体的势能函数及作用力函数难以对从 $r \to 0$ 到 $r \to \infty$ 之间的广泛区域予以全程所有层面的描述；（2）越过高值作用势垒或作用力屏障后可能进入一段坦途，而这段坦途亦可能是更深层面上作用势垒或作用力屏障上升沿或下降沿的细微构成部分；在这更深层面上回望，原来层面上复杂的图景仅构成一单调平滑的微小区域，分维微积分可能是其深入研究的描述方法。

3 分维微积分的局限性与物理学原理的普适性

3.1 分维微积分的概要脉络及其局限性

目前分维微积分在函数

$f(x) = x^k$（$k > 0$）

的约定性运算方面初步取得一些结论[5],但在广泛的函数形式方面有极大的局限性，意义十分微弱，进一步的分析讨论宜直接根据分数阶微积分方法进行描述。

在从分维导数经由分维微积分至自相似分形测度结论的脉络概要上主要包括：

前提条件或位置假设：分维导数 $\mathrm{D}^{\alpha} f(x)$ 处于从 $\mathrm{D}^{\alpha_1} f(x)$ 到 $\mathrm{D}^{\alpha_2} f(x)$ 之间，通过方程

$$\mathrm{D}^{\alpha_1} f(x) - \mathrm{D}^{\alpha_2} f(x) = 0 \text{，} 0 \le \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 \le 1$$

的根 x_i（如果存在）所在位置 $(x_i, \mathrm{D}^{\alpha_1} f(x)(x = x_i))$，即在根 x_i 所在位置有

$$[\mathrm{D}^{\alpha_1} f(x)]_{x=x_i} = [\mathrm{D}^{\alpha_2} f(x)]_{x=x_i} = [\mathrm{D}^{\alpha} f(x)]_{x=x_i} \text{，} \tag{18}$$

这一前提条件或位置假设，不能跨越整数阶延伸，只能在相邻整数阶之间进行趋势性运算，仅是属于对类如幂函数形式的非整数阶导数简略估计运算描述。

分维导数：

$$\mathrm{D}^{\alpha} x^k = k^{\alpha} x^{k-\alpha} \text{，} \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{19}$$

$$\mathrm{D}^{\alpha} x^k = \mathrm{D}^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} \mathrm{D}^{\mathrm{int}\,\alpha} x^k \quad \text{，} \alpha \ge 1$$

$$\mathrm{D}^{\alpha} x = x^{1-\alpha} \quad \text{，} \quad 0 \le \alpha \le 1$$

分维微分：

$$\mathrm{d}^{\alpha} x^k = \mathrm{D}^{\alpha} x^k (\mathrm{d}\,x)^{\alpha} \quad \text{，} \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{20}$$

$$\mathrm{d}^{\alpha} x^k = \mathrm{D}^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} \mathrm{D}^{\mathrm{int}\,\alpha} x^k (\mathrm{d}\,x)^{\mathrm{int}\,\alpha} (\mathrm{d}\,x)^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} \text{，} \quad \alpha \ge 1$$

分维积分：当 $[\mathrm{I}^{\alpha} x^k]\big|_{x=0} = 0$ 时，

$$\mathrm{I}^{\alpha} x^k = (k + \alpha)^{-\alpha} x^{k+\alpha} \text{，} \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{21}$$

$$\mathrm{I}^{\alpha} x^k = \mathrm{I}^{\mathrm{int}\,\alpha} \mathrm{I}^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} x^k \text{，} \quad \alpha \ge 1$$

自相似分形测度：自相似分形为一集合初始测度 M_0 于标度 ε 层次上集合单位 m 的数量 n（为自然数，广义上取为实数）与 ε 之比正比于 n 相对 ε 的变化率

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,\varepsilon} + \alpha \frac{n}{\varepsilon} = 0 \text{，} \quad n(\varepsilon = 1) = 1 \tag{22}$$

式中 α 为自相似分形维数。

自相似分形测度 M 在 $\alpha \ge 1$ 时的非整数阶微分方程为

$$\mathrm{d}^{\alpha-1} M = \phi(\alpha) M_0 (\mathrm{d} M_0)^{\alpha-1} \text{，} \quad M(M_0 = 0) = 0 \tag{23}$$

式中 $\phi(\alpha)$ 为 α 的函数。在真正的非整数阶微积分理论建立前，其中取

$$\phi(\alpha) = 1 \tag{24}$$

时以进行测度的简略估计；取

$$\phi(\alpha) = \alpha^{-1} \tag{25}$$

时以进行测度的细节趋势计算；可得基于分维微积分的自相似分形测度趋势性计算方程为

$$M = \begin{cases} [\phi(\alpha^{-1})]^{-\alpha} \,\mathrm{fact}^{\alpha} \alpha^{-1} M_0^{\alpha}, & 0 < \alpha \le 1 \\ \phi(\alpha) \,\mathrm{fact}^{-1} \alpha M_0^{\alpha}, & \alpha \ge 1 \end{cases} \tag{26}$$

其中 $\mathrm{fact}\,\alpha$ 为 α 的实数阶乘运算

$$\mathrm{fact}\,\alpha =$$

$$\begin{cases} (\alpha + 1 - \mathrm{int}\,\alpha)^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} \prod\limits_{i=1}^{\mathrm{int}\,\alpha - 1} (\alpha - \mathrm{int}\,\alpha + 1 + i), & \alpha \ge 2 \\ (\alpha + 1 - \mathrm{int}\,\alpha)^{\alpha - \mathrm{int}\,\alpha} \quad, & 2 > \alpha \ge 1 \end{cases}$$

当 $0.5 < \alpha < 2$ 时，自相似分形的测度计算方程简化为

$$M=\begin{cases}[\phi(\alpha^{-1})]^{-\alpha}\alpha^{\alpha-1}M_0^{\alpha},\ 0.5<\alpha\le 1.0\\ \phi(\alpha)\alpha^{1-\alpha}M_0^{\alpha},\qquad 1.0\le\alpha<2.0\end{cases}\quad(27)$$

对于幂函数的分数阶导数，在保留传统整数阶导数的局域属性时，有

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}x^{p}=\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-\alpha)}x^{p-\alpha},\quad 0\le\alpha\le 1\quad(28)$$

其在初值为 0、$p=1$ 时的积分方程为

$$\mathrm{I}^{\alpha-1}x=[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}x^{\alpha};\quad(29)$$

则根据方程（23）式得基于分数阶微积分得到的自相似分形测度趋势性计算方程为

$$M=\begin{cases}[\phi(\alpha^{-1})]^{-\alpha}[\Gamma(1+\alpha^{-1})]^{\alpha}M_0^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1\\ \phi(\alpha)[\Gamma(1+\alpha)]^{-1}M_0^{\alpha},\qquad \alpha\ge 1\end{cases}\quad(30)$$

这里需着重指出，资料[5]中所给出的分维微积分包含着脱漏及错误，诸如依据整数阶微积分的分段趋势性近似估计方程

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}y\to\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}y^{\alpha}}y,\quad 0\le\alpha\le 1$$

$$\mathrm{D}^{\alpha}x\to x^{1-\alpha},\quad 0\le\alpha\le 1$$

直接延伸推广成

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}y=\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}y^{\alpha}}y,\quad 0\le\alpha\le 1\quad(31)$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}y=\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^{\alpha}y^{1-\alpha}=\begin{cases}y,\qquad \alpha=0\\ \alpha^{\alpha}[\mathrm{D}y^{\alpha^{-1}}]^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1\end{cases}\quad(32)$$

故其仅仅适用于类如函数 $f(x)=x^{k}$（$k>0$）形式的趋势层面简略估计运算，同时由其得到的诸推演结论也不具有普适深刻的基础性意义。

3.2 Γ 函数的二个近似计算公式

通过对 Γ 函数的深入分析，可得其二个近似等式为

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)}=s^{\alpha}\left(1+\frac{1}{7.4s}\sin(\alpha\pi)\right),\quad(33)$$

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)}s^{s-\alpha}=\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-(1-\alpha))}s^{s-(1-\alpha)},\quad(34)$$

式中 $0\le\alpha\le 1$，$s\ge 0.5$。当 $s>2.5$ 时，方程（33）式可进一步近似表示为

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)}=s^{\alpha};$$

故得 Γ 函数近似值计算的二个简略公式为

$$\Gamma(N+\alpha)=N^{\alpha-1}N!,\quad N\ge 3\quad(35)$$

$$\Gamma(N+2\alpha)=(N+\alpha)^{2\alpha-1}N!,\quad N\ge 1\quad(36)$$

式中 $0\le\alpha\le 1$，$N!$ 为自然数 N 的阶乘。上述二式相比较，方程（36）式的计算精度比方程（35）式的高。

3.3 分维微积分与分数阶微积分的联系与区别

分数阶导数的一些结论是从 Γ 函数直接默认推广得到的，其中保留整数阶局域性的幂函数分数阶导数为方程（28）式。根据（33）、（34）二式，对于函数 $f(x)=x^{s}$（$s\ge 2.5$）有

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)}x^{s-\alpha}=s^{\alpha}x^{s-\alpha};\quad(37)$$

这表明在此条件下分维导数与分数阶导数近似相等。

对于分维导数，函数 $f(x)=x^{s}$ 在 $x=s$ 处的所有分维导数都相等，

$$s^{\alpha}s^{s-\alpha}=s^{\beta}s^{s-\beta}=s^{s};$$

而对于分数阶导数，函数 $f(x)=x^{s}$ 只在其二分数阶满足条件 $\alpha+\beta=1$ 时，二分数阶导数才在 $x=s$ 处相等；这里 $0\le\alpha\le 1$、$0\le\beta\le 1$。

3.4 部分函数的分维导数及分数阶导数形式讨论

根据条件方程（18）式，因对于所有的 x 恒有

$$\mathrm{D}\exp x-\exp x=0;$$

故得

$$\mathrm{D}^{\alpha}\exp x=\exp x,\quad 0\le\alpha\le 1\quad(38)$$

分维导数位置假设与方程（31）及（32）二式在数学解析上包含着脱漏和错误，远不具有基础层面的普适深刻意义，依其得到的下面二式亦仅仅是非整数阶导数的趋势性估计运算方程

$$\mathrm{D}^{\alpha}\exp(\sigma x)=\sigma^{\alpha}\exp x,\quad 0\le\alpha\le 1\quad(39)$$

$$\mathrm{D}^{\alpha}1=\begin{cases}1,\ \alpha=0\\ 0,\ 0<\alpha\le 1\end{cases}\quad(40)$$

这里 σ 为常数。

上述方程中诸参量的含义相对其它部分内容独立；当在其它部分出现时，会予以相应的含义说明。

3.5 非线性过程的性质及相对于现象的近似性

从目前得到的结论分析，分维微积分的显著特征是结果与过程相关，对于不同时为整数的二实数 α 与 β，当 $|\alpha|>0$、$|\beta|>0$，且 $|\alpha|\ne|\beta|$ 时，

$$\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}^{\beta}f(x)\ne\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{D}^{\alpha}f(x);$$

上式这一非线性过程的简化表示形式为

$$\alpha_{\mathrm{N}}+\beta_{\mathrm{N}}\ne\beta_{\mathrm{N}}+\alpha_{\mathrm{N}}.\quad(41)$$

仅从基于分维微积分与分数阶微积分的自相似分形测度计算方面分析，目前的分维微积分与分数阶微积分都是属于整数阶微积分的平凡外推结果，而不是严格数学意义上的非整数阶微积分形式；其中分维微积分没有解析意义，且在数学基础层面包含着脱漏及错误，仅是粗略趋势性计算估计，而分数阶微积分已经具有半解析基础，能够进行较为广泛的运算；严格的非整数阶微积分仍需要从最基础的定义形式开始构造，具有明确的几何意义，秉承整数阶导数的局域属性，能够直接应用到诸如分形生成过程描述及测度计算等方面。如果未来真正的非整数阶导数理论具有部分的、乃至是完全的局域性特征，那么可以初步展望：

（1）函数 $f(x)$ 在某一点 $x=x_0$ 处，如果相邻整数阶导数 $[\mathrm{D}^n f(x)]_{x=x_0}$ 、$[\mathrm{D}^{n+1} f(x)]_{x=x_0}$ 都存在，那么其之间的非整数阶导数 $[\mathrm{D}^{\alpha} f(x)]_{x=x_0}$ 未必存在；

（2）如果相邻整数阶导数 $[\mathrm{D}^n f(x)]_{x=x_0}$ 存在、$[\mathrm{D}^{n+1} f(x)]_{x=x_0}$ 不存在，那么其之间的非整数阶导数 $[\mathrm{D}^{\alpha} f(x)]_{x=x_0}$ 可能存在；

这里 n 为从 0 开始的自然数，$n<\alpha<n+1$；其中后一点在较为广泛的意义上与类如 Weierstrass 函数形式相关。在此过程，创建与理解，天壤之别。

自然现象的演化是甚为复杂的过程，现象本身的诸多层面、所处背景的诸多层面都在参与，且这些层面本身亦处在变化之中。目前无论是线性的还是非线性的方法，在理论上尚需包含三步理想简化处理：一是对所描述现象的物理思想原则表述，二是对物理原则的数学方程（含边界条件）实现，三是对数学方程的求解。经过这三步理想简化处理得到的结果，一般已不足以对现象在轮廓及其细节二个层面上予以清晰描述，常常需有所侧重。这其中引入质点、物理常数、理想边界条件是必要的，但由于它们都各自包含着相应的物理内容，表面上是已知实际上却是未知，所以许多时即便仅在单一的层面上能够给出现象演化的大致趋势就已实属不易了。

3.6 物质结构层面与相应的能量交换方式

目前研究探索的主要方向之一是物质结构与相应的能量交换方式；从一般哲学角度考虑，物质是无限可分的，但相对于一定时期的实验能力极限，可能存在物质相对的终极构成层面。其标志为，当用某种粒子能量试图打开或分割一粒子时，其至少又生成二个在质量上与原来被分割粒子相等、但状态互补的粒子群。产生粒子群的机理为用于分割的粒子与被分割的粒子及其背景介质相互作用，物质来源为用于分割的粒子、被分割的粒子及其背景介质，由诸多具有这种性质的被分割粒子构成的谱系即可能为我们所能够认识物质的相对终极构成层面。

在此能量交换过程，粒子间及粒子与其背景介质间能量的交换至少有二个途径，其一是在粒子整体层面上的运动能量交换，其二是在粒子构成层面上的转化能量交换；这二个途径在一些能量交换中可同时进行。当粒子从背景介质中所获得的能量被其构成物质单元吸收，而此物质构成单元又远低于我们所能够认识的物质层面时，则可能观察不到粒子内能的变化，能量从表观上消失了。在相反过程，当少许能量作用于粒子，并透过粒子整体层面激发到其物质构成单元时，物质构成单元所吸收的能量可能会被激发出来，表现为粒子在整体上获得了比作用于粒子的少许能量更多的能量。这种能量吸收、激发过程未必是互逆过程，而且在更细微层面上的能量表述形式及量级层面应与目前已知的能量表述形式有所不同。对于这种粒子间能量吸收、激发的振荡过程，应该说是更为普遍的、较为基本的在各个层面上进行的自然演化过程，只是多时其用于激发和被激发出的能量细微的层面及温和的程度不为我们所明确感知。自然的状态及演化与此诸层面的能量交换过程相联系，其有助于对包括类星体及微类星体在内的能量吸收及释放现象予以初步理解。

3.7 物理学原理的普适性及初步展望

在理论体系方面，目前的物理学理论对于自然现象的描述多属切向性的，即理论相对于现象演化是导数性质的，较为完整的描述需要多点的导数，然后方能近似确定现象演化模式，这使得现有的理论总是由多个分支理论复合构成。如果不对理论予以适当条件限制，而将其透过所适用的尺度直接应用到二端极限层面，则即便理论与自然现象演化过程有一些交点，但在整体上所得出的推演结论远离现象演化过程，其结论本身也易出现不连续或发散的问题。物理学原理就其根本是描述自然现象的，故简洁有效是为至要。

持续的探索积累，亦在不断发现新的原理，建立相应的新的理论体系；前面理论的某些假设成为后续理论中的自然结果，但个别常数仍然作为基本量被保留下来。通过更深入地研究解析开这些常数，将能够建立更普适的物理学理论基础。而更新的、更为深刻的规律携带新的常数将出现在未来的物理学基础理论中。变化的参量通过相对不变的常数联系在一个或一组方程中，每一次理想化处理都带来无穷或发散的问题，即便在所涉及的层面上描述结果亦存在着无法消除的不确定性面向。物质的质量、结构、运动状态、

惯性及其与背景介质的关系描述应联立在一组方程中，由于逻辑本质的脱漏性及局域动态瞬间标记的局限性，将难以构建一种描述（包括由几种描述构成的复合描述）成为物理学的终级形式。

自然总是处于多层面背景变化过程，同时具有无限的创造性，这使得理论体系仅通过过去及现在难以完备地描述未来。未来将有未来的景象。虽即如是，然深刻地回顾历史，则或可部分地展望未来。总结人类近 3000 多年来的探索历史，在人们对这个世界的来源及演化的认识过程中，从约公元前 1000 年前后 Siddhartha 的背景验证到公元 1690 年前后 Newton 的数理框架，先后有代表性地产生了六次大的周期性进展（Siddhartha、李耳（Li Er ?）、Jesus、Muhammad、经院哲学、自然哲学），其时间间隔为 510~560 年左右。深入地考察，Leonardo da Vinci、Galileo Galilei、Isaac Newton，究竟无别。虽然自 Newton 的数理框架后三百多年来也取得了若干次进展，但从整体性质上基本是规整空间的、机械性的、局部物质层面的，在根本意义上尚未对自然取得更深入的认识及理解。从目前探索的深度及广度方面展望，到公元 2200～2250 年前后，或将产生下一阶段的认识，其在 Siddhartha 及 Newton 的传承上将给出物质世界的较为统一的描述图案，将对包括我们自身在内的世界的来源、结构及演化给出深刻理解。如果适时建立起的新的理论在消解来者已有困惑的同时，仅少许甚至未添加或诱发新的障碍，则是为至理。现在，通过对一些自然现象予以轮廓或趋势方面的探讨描述，对已有的部分结论予以适当拓展，对尚未足够关注的现象展开充分的讨论，以为未来的理论提供尽可能简洁有效的前期基础准备。

4 相似扩展方程与天体运行轨道曲线的扩展特征

4.1 相似扩展方程及其展开形式

从上述分维数学方法及物理学原理角度分析，在自然现象演化过程中，其局部细节变化与整体远景变化相联系，对应参量 x 、 y 的函数关系为

$$f_{\mathrm{p}}(\Delta x,\Delta y)=f_{\mathrm{w}}(x,y) \quad 。\qquad (42)$$

如果在标度 ε 层面上数量 n（为自然数，广义上取为实数）相对 ε 局部细节的变化率与整体远景的平均变化率相联系，则由方程（42）式得相似扩展方程

$$f_{\mathrm{p}}(\frac{\Delta n}{\Delta\varepsilon})=f_{\mathrm{w}}(s(n,\varepsilon)\frac{n}{\varepsilon}) \quad ,\qquad (43)$$

式中 $s(n,\varepsilon)$ 为相似函数。

由方程（43）式得相似扩展方程最简单的具体形式为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,\varepsilon}\right|=\left|s(n,\varepsilon)\frac{n}{\varepsilon}\right|,\qquad n(\varepsilon=1)=1 \qquad (44)$$

其二个展开方程为

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,\varepsilon}+s(n,\varepsilon)\frac{n}{\varepsilon}=0,\qquad n(\varepsilon=1)=1 \qquad (45)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,\varepsilon}-s(n,\varepsilon)\frac{n}{\varepsilon}=0,\qquad n(\varepsilon=1)=1 \qquad (46)$$

当 $s(n,\varepsilon)$ 相对 n 、 ε 为常数时，分别取方程（45）式中 $s(n,\varepsilon)=\alpha$ 、方程（46）式中 $s(n,\varepsilon)=\beta$ ，则有

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,\varepsilon}+\alpha\frac{n}{\varepsilon}=0,\qquad n(\varepsilon=1)=1 \qquad (47)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,\varepsilon}-\beta\frac{n}{\varepsilon}=0,\qquad n(\varepsilon=1)=1 \qquad (48)$$

由方程（22）式得方程（47）式是自相似分形方程，式中 α 为分形维数。为略加区分这二个展开形式，将方程（47）式称为分形扩展方程，将方程（48）式称为分维扩展方程，则相应地 α 为分形扩展维数， β 为分维扩展维数。

4.2 分形扩展与分维扩展的性质

由方程(47)式得分形扩展曲线的分形扩展维数 α 及在标度 ε （ $\varepsilon=\lambda l_0^{-1}$ ）层面上的长度 l 为

$$\alpha=-\frac{\ln n}{\ln\varepsilon} \quad ,\qquad (49)$$

$$l=n\lambda=l_0 n^{1-\alpha^{-1}} \quad ,\qquad (50)$$

式中 l_0 为分形初始长度， λ 为分形单位。

由方程（49）式，当 $\lambda<l_0$ 时， $\varepsilon<1$ ，得 $\alpha>0$ ；而当 $\lambda>l_0$ 时， $\varepsilon>1$ ，得 $\alpha<0$ 。

根据方程（48）式得分维扩展曲线的分维扩展维数 β 及在标度 ε （ $\varepsilon=\lambda l_0^{-1}$ ）层面上的长度 l 为

$$\beta=\frac{\ln n}{\ln\varepsilon} \quad ,\qquad (51)$$

$$l=n\lambda=l_0 n^{1+\beta^{-1}} \quad ,\qquad (52)$$

式中 l_0 为扩展初始长度， λ 为扩展单位。

由方程（51）式，当 $\lambda<l_0$ 时， $\varepsilon<1$ ，得 $\beta<0$ ；而当 $\lambda>l_0$ 时， $\varepsilon>1$ ，得 $\beta>0$ 。

在分形扩展方程（47）式中， α 表示的是几何形状本身的几何维数，其较侧重于几何性质的描述，表示几何形状是 α 维的；而在分维扩展方程（48）式中， β 表示的是数量变化的维数，较侧重于数量性质的描述，其已不具有几何形状维数的含义，其表示数量是以 β 维扩展的。

为避免与目前在数学空集研究中引入负维数的含义相悖，对于$\lambda < l_0$的过程，采用分形扩展方程（47）式较为合适；而对于$\lambda > l_0$的过程，则应用分维扩展方程（48）式较为适宜。尤其对于自然现象演化的分析，这样略加区分可稍明晰诸参量在所描述的现象中各自对应的物理含义。

4.3 天体运行轨道基线的二个扩展层次

通过对绕核运动粒子及天体环绕主星体运动的深入分析可以初步确定，其轨道曲线主要包含二个扩展层次，一是粒子在核作用下产生运行轨道基线的分维扩展层次，二是在背景介质及其它粒子作用下于轨道基线一维势阱中再次产生的整体上环绕基线、细节上下一重环绕上一重的多重分形扩展层次。其中对于相对稳定的离散轨道，n取自然数（或特殊的有理数）。

对于在$\lambda < l_0$一维势阱中运动的粒子，采用分形扩展方法描述较为合适，如量子分形方法；而对于$\lambda > l_0$时绕核运动粒子的基线描述，则采用分维扩展方法更为简洁准确。

是故对于第一个层次，由方程（52）式得在初始扩展长度l_0上分维扩展生成的轨道基线长度为

$$l_n = n\lambda = l_0 n^{1+\beta^{-1}} ,$$

这里分维扩展维数$\beta > 0$。

对于第二个层次，由方程（50）式得在基线l_n上分形扩展生成的轨道分形曲线长度为

$$l_{nJ} = J\lambda_s = l_n J^{1-\alpha^{-1}},$$

这里J取特定的自然数，λ_s为该扩展层次上的分形单位或波长，分形扩展维数$\alpha \ge 1$。

由上述二式得这二个层次的复合扩展曲线长度为

$$l_{nJ} = l_0 n^{1+\beta^{-1}} J^{1-\alpha^{-1}} 。\tag{53}$$

仅在生成轨道基线的分维扩展层次上，对于氢原子中绕核作圆周运动的电子，当$Vc^{-1} << 1$时，根据方程（52）式$l = n\lambda$及 De Broglie 波长$\lambda = h(m_{e0}V)^{-1}$，即可得电子运动轨道基线的 Bohr 半径、能量为

$$r_{en} = \hbar^2 (Ze_C^2 m_{e0})^{-1} n^2 ,$$

$$E_{en} = -0.5\hbar^{-2} m_{e0} (Ze_C^2)^2 n^{-2} ;$$

其分维扩展初始长度及扩展维数分别为

$$l_{e0} = 2\pi\hbar^2 (Ze_C^2 m_{e0})^{-1} ,\tag{54}$$

$$\beta_e = 1.00 ,\tag{55}$$

这里n为主量子数，h为 Planck 常数，$\hbar = (2\pi)^{-1} h$，Z为 Coulomb 力常数，m_{e0}、e_C分别为电子的质量、电荷量，V为电子在轨道基线的平均运动速度。

在生成基线的扩展层次上，虽然天体环绕主星体的运行与电子绕核运动都属于分维扩展性质，但因电子的 De Broglie 波长已知，故可直接应有方程（52）式$l = n\lambda$部分；对于天体运行，则尚需首先确定初始分维扩展长度，然后依据方程（52）式给出其离散轨道方程。

5 天体运行的离散轨道方程

5.1 天体运行的离散轨道方程

对于天体的运行，下面主要讨论其在主星体作用下产生轨道基线的分维扩展层次的性质。

天体运行轨道基线的初始扩展长度假设：天体在主星体作用下生成其运行轨道基线周长l_n的初始扩展长度为

$$l_0 = 2\pi\mu E_M^{\kappa} ,\tag{56}$$

其中μ为天体运行离散轨道常数，κ为待定常数，E_M为天体围绕的主星体能量；对于天体运行相对稳定的离散轨道，n取自然数。

根据方程（52）、（56）二式得天体运行的离散轨道方程为

$$l_n = 2\pi\mu E_M^{\kappa} n^{1+\beta^{-1}} 。\tag{57}$$

考虑忽略主星体整体自旋转能量的影响，有

$$E_M = E_{M0} = M_0 c^2 ,$$

这里M_0为主星体的质量。方程（57）式成为

$$l_n = 2\pi\mu E_{M0}^{\kappa} n^{1+\beta^{-1}} 。\tag{58}$$

方程（58）式中的天体离散轨道常数μ、待定常数κ、分维扩展维数β需根据有关天体的轨道周长数据进行迭代计算。对于太阳系，在相邻行星轨道之间有可能还存在若干离散轨道区域，包括若干小行星轨道区域。如果确定了这些常数，则可根据太阳系的诸多卫星轨道数据检验其可能的正确性。

5.2 离散轨道常数及其所对应的有关参量尺度

通过对太阳系部分行星及其卫星轨道基线数据的分析，初步确定天体离散轨道常数μ、待定常数κ、分维扩展维 1 数β的数值估计分别为

$$\mu = 6.00\times10^{-20}\ \mathrm{m^{-0.21}kg^{-0.605}s^{1.21}} ,\tag{59}$$

$$\kappa = 0.605 ,\tag{60}$$

$$\beta = 1.00 。\tag{61}$$

方程（58）、（56）式成为

$$l_n = 2\pi\mu E_{\mathrm{M}0}^{0.605} n^2 \quad , \qquad (62)$$

$$l_0 = 2\pi\mu E_{\mathrm{M}0}^{0.605} \quad 。 \qquad (63)$$

上述分析采用的是分维扩展方法，得分维扩展维数为 $\beta = 1.00$，其表示维数为 1.00 的线性扩展。如果在此生成轨道基线层次上采用分形扩展方法，则相应地得分形扩展维数

$$\alpha = -\beta = -1.00 \text{。}$$

由于尚未考虑各作用天体整体旋转能量等有关运动能量的影响，所以诸常数更为准确的数值还有待于深入研究分析予以确定。

下面初步给出天体运行介质层壳常数及离散轨道常数所相对应的有关其它参量的数值量级。

根据介质层壳常数数值及方程（59）式得

$$\frac{\eta}{\mu} = 1.377 \times 10^{-25}\ \mathrm{J}^{-0.395} = \frac{1}{(8.70 \times 10^{62}\ \mathrm{J})^{0.395}} = \frac{1}{E_0^{0.395}} \text{，} \qquad (64)$$

式中能量常数 $E_0 = 8.70 \times 10^{62}$ J。

由方程（64）式及 $F_0 = 1.21 \times 10^{44}$ N 得一等效距离常数为

$$L_0 = E_0 F_0^{-1} = 7.19 \times 10^{18}\ \mathrm{m} = 4.81 \times 10^7\ \mathrm{AU} = 760\ \ \mathrm{ly}\text{。} \qquad (65)$$

如果考虑 Einstein 能量 $E_0 = M_{\mathrm{eq}0} c^2$，则得一等效质量为

$$M_{\mathrm{eq}0} = E_0 c^{-2} = 9.68 \times 10^{45}\ \mathrm{kg} = 4.87 \times 10^{15} M_{\mathrm{sun}} \text{，}$$

这里 M_{sun} ＝1.989×10^{30}kg 为太阳的质量。

上述数值与银河系目前已知的数据相比较，在半径尺度上约为银河系（10^{5}ly）的 1%、银核（7000 ly）的 10%，在质量量级约为银河系（10^{42}kg）的 10^4 倍。

根据方程（62）式及主星体质量即可计算更多天体的离散轨道方程。

6 太阳系行星及部分卫星离散轨道方程的具体形式

根据方程（7A）式，当天体等效在基线轨道上的平均线速度 $\overline{V_r} << c$、距主星体径长 $r >> GM_0 c^{-2}$ 时，方程（7A）式简化为方程（9A）的 Newton 引力理论，在 $M_0 >> m_0$ 时有椭圆轨道基线周长为

$$l = [1.5[1 + (1 - e^2)^{0.5}] - (1 - e^2)^{0.25}]\pi a \quad ,$$

式中 a、e 分别为天体轨道椭圆基线半长径、偏心率。当 $e^2 << 1$ 时，上式简化为

$$l = 2(1 - 0.25e^2)\pi a \text{；}$$

得天体运行轨道所在的离散层数理论计算值为

$$n_{\mathrm{t}} = \sqrt{l_0^{-1} l} \text{。}$$

6.1 太阳系中诸行星运行的离散轨道

根据太阳质量为 1.989×10^{30}kg 的数据及方程(62）式，得其诸行星离散轨道方程为

$$l_n = 0.0975 n^2\ \mathrm{AU} \quad \text{；} \qquad (66)$$

将诸行星轨道数据与方程（66）式进行比较，得含有一相对 1％小数值 0.001AU 波动量的方程为

$$l_n = (0.0975 \pm 0.001) n^2\ \mathrm{AU} \quad \text{。} \qquad (67)$$

方程（67）式中的波动量 0.001AU 可进一步从行星基线的第二扩展层次分形扩展予以深入探讨分析。

由方程（67）式及诸行星半长径及偏心率数据，得诸行星离散轨道分布表（见表 1）。

表 1 太阳系行星离散轨道分布表

Table 1 The distribution of discrete orbits of planets in the solar system

行星	轨道数据 半长径 (AU)	偏心率	周长 (AU)	理论值及采用的 l_0 值	近似层数
水星	0.387	0.206	2.406	4.97 (0.0975)	5
金星	0.723	0.007	4.543	6.86 (0.0965)	～7
地球	1.000	0.017	6.283	8.03 (0.0975)	8
火星	1.524	0.093	9.555	9.90 (0.0975)	10
木星	5.203	0.048	32.673	18.31 (0.0975)	18 ～19
土星	9.539	0.056	59.869	24.91 (0.0965)	25
天王星	19.267	0.046	120.99	35.05 (0.0985)	35
海王星	30.240	0.008	190.00	44.03 (0.0980)	44
冥王星	39.554	0.250	244.64	49.96 (0.0980)	50

由哈雷彗星轨道半长径为 17.95AU、偏心率为 0.967、轨道周长为 77.651AU 的数据，得其离散轨道在第 28 层（l_0 取 0.0985AU，n_{t} 计算值为 28.08）。

取太阳赤道平均直径以 1.39×10^6km 计，太阳系前四层距日心的平均距离（AU）分别为：第 1 层（0.0155±0.00016，约在距太阳表面外 1 个太阳直径距离的附近）、第 2 层（0.0621±0.00064，约在距太阳表面外 6 倍太阳直径距离的附近）、第 3 层（0.140±0.0014）、第 4 层（0.248±0.0025）；而在冥王星以远，第 55 层（46.94±0.481）、第 60 层（55.86±0.573）。随着层数的增加，层间间隔与距日心距离相比逐渐减小，以及波动量的覆盖，使得离散轨道已渐于呈现连续的性质，此时层数亦仅具有象征性的意义了。

上述太阳系诸行星运行离散轨道的分析计算由于引入波动量（0.001AU），所以其结论是较为初步的。

太阳系诸行星轨道在尺度上跨越100多倍的距离，其在广袤的天宇中运行时，行星之间、及与所携带的卫星之间都在相互作用，其本身即处于演化过程中，运行轨道可能是处在相应的离散轨道上（或在附近波动），也可能是处于二层离散轨道之间，其各方面性质都是动态的，加之太阳整体旋转能量及运动能量的影响作用，所以更为准确的描述还有待进一步深入探讨研究。

6.2 天王星诸卫星运行的离散轨道

根据天王星质量为 8.689×10^{25}kg 及方程（62）式，得其卫星离散轨道方程为

$$l_n = 3.36\times10^4 n^2 \ \text{km}。 \qquad (68)$$

由诸卫星的半长径与偏心率数据及方程（68）式，得天王星诸卫星的离散轨道分布表（见表 2）。

表 2 天王星诸卫星离散轨道分布表

Table 2 The distribution of discrete orbits of satellites in the Uranian system

天卫	轨道数据			理论计算值	近似层数
	半长径 (10^3km)	偏心率	周长 (10^3km)		
Ⅵ	50	0.000	314.2	3.06	3
Ⅶ～	54～75	0.000	339.3～	3.18～	3～4
XⅣ			471.2	3.74	
XⅤ	86	0.000	540.4	4.01	4
Ⅴ	129.4	0.027	812.9	4.92	5
Ⅰ	191.0	0.003	1200.1	5.98	6
Ⅱ	266.3	0.005	1673.2	7.06	7
Ⅲ	435.9	0.002	2738.8	9.03	9
Ⅳ	583.5	0.001	3666.2	10.46	10～11

取天王星赤道半径为 2.59×10^4km，得前二层等效离散轨道距天王星中心的平均距离为：第 1 层（5348km）、第 2 层（2.139×10^4km），皆小于天王星赤道半径；第 3 层离散轨道则在距天王星中心 1 个天王星直径距离附近；第 8 层离散轨道周长为 2.150×10^6km，距天王星中心平均距离为 3.422×10^5km，现尚未发现卫星。

太阳相对天王星所在位置为绕天王星的天体运行离散轨道的第 734 层处（n_t 计算值为 733.96）。

6.3 地球卫星运行的离散轨道

根据地球质量为 5.976×10^{24}kg 的数据及（62）式，得其卫星离散轨道方程为

$$l_n = 6.65\times10^3 n^2 \ \text{km}。 \qquad (69)$$

由月球轨道半长径及偏心率数据及方程（69）式，得地球卫星离散轨道分布表（见表 3）。

表 3 地球卫星离散轨道分布表

Table 3 The distribution of discrete orbits of satellites in the Earth system

卫星	轨道数据			理论计算值	近似层数
	半长径 (10^3km)	偏心率	周长 (10^3km)		
月球	384.4	0.055	2413.4	19.05	19

取地球半径平均值为 6371km，得前二层等效离散轨道距地心的平均距离为：第 1 层 1058km，其相当于在地核中的固体内核圈 G 层（0~1251km）内；第 2 层距地心 4234km，相当于在地幔中的下地幔 D′层（3671~5371km）内；第 3 层离散轨道则处在地球表面外 3154km 处的大气圈外层。

太阳相对地球所在位置为绕地天体运行离散轨道的第 376 层处（n_t 计算值为 375.96）。

6.4 绕月天体运行的离散轨道

根据月球质量为 7.3506×10^{22}kg 的数据及方程（62）式，得绕月天体运行的离散轨道方程为

$$l_n = 465 n^2 \ \text{km}。 \qquad (70)$$

取月球平均半径为 1738km，根据方程（70）式，得绕月天体离散轨道的前 4 层平均半径皆小于月球半径，第 5、10、20 层分别在月球表面外的 112km、5663km、27865km 处。

地球相对月球所在位置为绕月天体运行离散轨道的第 72 层处（n_t 计算值为 72.04）。

对于木星、土星及海王星等行星的卫星，其所在位置多分布在离散轨道附近及相邻离散轨道之间，这可能与离散轨道常数数值计算的准确性以及行星卫星系统所处的演化阶段有关，其可能的理论细节还需要进一步的探讨分析。

7 结 论

本文以上主要在天体运行的介质层壳弯曲、分维数学方法、离散轨道三个方面进行了探讨分析。

7.1 在天体运行的介质层壳弯曲方面

（1）探讨了背景介质赋予数学坐标系以物理属性的意义，初步建立了天体运行的能量方程；

（2） 给出了能量方程的能量解及势能解，其作用力方程的二个条件解与 Newton 引力理论及 Einstein 引力理论在相同条件下的结论相同或相近；给出了行星运行轨道的一种 Binet 方程形式。

（3） 分析了作用力方程相当于 Newton 引力方程的引力增加量，讨论了介质层壳常数及其部分性质。

7.2 在分维数学方法及物理学原理性质方面

（1） 讨论了分维微积分的基础缺失及在函数形式方面的局限性，即使是对于幂函数，分维微积分也仅仅是属于粗略趋势性估计的方法，远不具有数学解析基础，是属于试错性质的；深入的非整数阶微积分方程探讨仍然应以分数阶微积分理论作为分析基础；

（2） 探讨了非线性理论对其所描述现象的近似性，讨论了物理学原理及其相应理论体系的若干性质，对未来的进展给予了初步展望。

7.3 在天体运行的离散轨道方面

（1） 从分维数学及物理学原理角度给出了相似扩展方程及其二个展开形式：分形扩展方程与分维扩展方程，分析了分形扩展与分维扩展的性质及区别；

（2） 给出了天体运行轨道基线分维扩展与分形扩展的二个扩展层面及相应性质；

（3） 建立了天体运行轨道基线分维扩展的初始长度方程，进而给出了天体运行轨道的离散方程，初步确定了相关待定常数的数值量级；

（4） 给出了太阳系行星及部分卫星运行的离散轨道方程具体形式，同时给出了有关星体所在的离散轨道近似层数。

7.4 值得进一步研究探讨的参考方向

上述关于天体运行介质层壳弯曲及离散轨道的分析仅是属于探讨性质的，乃至尚不能确定是具有深刻意义的；即便其包含正确的成分，但较为严谨的理论形式仍需进一步的研究分析予以考证确认。

然无论如何，上述分析仍给予一些轮廓层面的启示；目前包括中间轨道理论在内的有关行星、卫星及人造卫星等诸天体的运动状态描述方程基本是属于力平衡性质的，如对于人造卫星，微量扰动将有可能迫使其运动状态发生很大的改变；如果通过对天体运行离散轨道分布的深入分析能够证明存在离散轨道区域，则此区域应是相对稳定的轨道区域，在此区域运行的天体，即使受到微量扰动，运动状态亦不会发生大的改变，且有可能逐渐恢复到受扰动以前的运动状态。这确是值得深入研究探讨的方向。

对于天体运动，除上述二个方向之外，还有重要的第三个方向，即关于天体公转运动、自转运动、及其构成物质运动这三个层面的统一描述框架。在该方向上，这三个层面是相互制约影响的，要结合起来（方程耦和联立）探讨研究。对于这个方向，一个有意义的途径是加深对地球公转、自转（速率及方向）、全球板块（及内部物质）运动规律的认识理解，而目前已获得的及即将获得的关于地球诸多方面研究成果[7~13]为朝该方向深入探讨奠定了基础。从地质及古生物演化方面的资料初步分析，一个可供参考的可能含有些许正确成分的切入点是：地球大陆从所集聚的一极附近周期性地移动分解并经由赤道向地球的另一极附近集聚，期间地球公转平均距离、自转速率（乃至自转方向）亦在发生相应的耦和变化。这个周期振荡模式的建立或将有助于人们深入认识地球的演化及运动规律，包括对从早寒武纪至晚白垩纪期间地质及古生物演化过程的细节刻画。

参考文献（References）：

[1] Weber J. 广义相对论与引力波[M]. 陈凤至、张大卫 译，北京：科学出版社，1979，54～63。

[2] 俞允强. 广义相对论引论[M]. 北京：北京大学出版社，2004，39～169。

[3] 周培源. 论Einstein引力理论中坐标的物理意义和场方程的解[J]. 中国科学，1982，A辑(4)：334～345。

[4] Dirac P.A.M. The Principles of Quantum Mechanics[M]. Oxford，1985。

[5] 阎坤. 宇宙分维构造及其数学基础[J]. 地球物理学进展，2004，19(3)：709～716。
http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/cosmosandmaths-pdf.pdf

[6] 章钧豪，陈湘. 狭义相对论引力理论对三个经典相对论引力实验的解释.
http://www.newpo.com/4/index.htm

[7] 周永胜，何昌荣. 大陆岩石圈流变研究进展与高温高压流变实验现状[J]. 地球物理学进展，2004，19(2)：246～254。

[8] 叶正仁, 朱日祥. 地幔对流与岩石层板块的相互耦合及影响—(II)地幔混合对流理论及其应用[J]. 地球物理学报，1996，39(1)：47～57。

[9] 刘光鼎，李庆谋，刘少华. 全球变化的地球物理测井研究[J]. 地球物理学进展，1999，14(4)：1～6。

[10] 李国营，彭龙辉，许厚泽. 自转微椭、非均匀地球的潮汐变形[J]. 地球物理学报，1996，39(5)：672～678。

[11] 刘光鼎. 20世纪地球科学的发展[J]. 地球物理学进展，2000，15(2)：1～6。

[12] 刘振兴. 地球空间双星探测计划[J]. 地球物理学报，2001，44(4)：573～578。

［13］ 滕吉文. 21世纪地球物理学的机遇与挑战[J]. 地球物理学进展，2004，19(2)：208～215。