

阎坤. 新型冠状病毒肺炎感染数据的 PSSIR 模型方程分析方法及其趋势预测 [Report]. 西安现代非线性科学应用研究所, 2020-02-22.

YAN Kun. Analysis method of PSSIR model equations and its tendency prediction for the infection data of the novel coronavirus pneumonia(NCP) in China[Report]. Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 22 February 2020.

<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/ModelEquations-pdf.pdf>

新型冠状病毒肺炎感染数据的 PSSIR 模型方程分析方法及其趋势预测

阎坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘要: 通过对 2003 年北京与香港二城市 SARS 病毒感染数据的分析讨论及基于在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间中国境内新型冠状病毒肺炎确诊感染人数数据的公布资料, 采用简洁的一般饱和过程分析方法, 给出了相应的偏对称方程(欠对称或弱对称方程)形式, 进而由偏对称方程讨论了小样本数据量时的 SIR 模型方程组, 给出了 PSSIR 模型方程形式及其近似解, 在趋势层面分析计算了中国境内及中国境内除湖北省外地区新型冠状病毒肺炎感染累计数据, 给出了相应的拐点位置与趋势预测的阶段性价限值, 分析结果为病毒感染疫情发展过程的多变量非线性动力学方程组描述提供参考。

关键词: 新型冠状病毒肺炎, SARS 病毒, 感染数据, 偏对称方程, PSSIR 模型方程, 近似解, 趋势预测

Analysis method of PSSIR model equations and its tendency prediction for the infection data of the novel coronavirus pneumonia(NCP) in China

YAN Kun (yankun@nature.ac.cn)

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, by discussing the cumulative number of people of confirmed SARS(severe acute respiratory syndrome) virus infection in Beijing and Hongkong in 2003, and basing on the data of the number of novel coronavirus pneumonia(called NCP or 2019-nCoV(2019-new coronavirus)) confirmed infection in China between 11 January and 21 February 2020, using the simple analysis method of the general saturation process, corresponding partial-symmetrical equations(or weak-symmetrical equations) are given. Then by using the partial-symmetrical equations, the SIR model equations with the small sample data volume are discussed, PSSIR model equations and its approximate solutions are given preliminarily, and the accumulated data of the novel coronavirus pneumonia infection in China and in China except for Hubei Province are analyzed and calculated tentatively. At the same time, corresponding inflection point position and stage limit value of tendency prediction are given too. The results of this paper provide a reference for the description of multivariable nonlinear dynamic equations in the development of viral infection.

Keywords novel coronavirus pneumonia, SARS virus, infection data, partial-symmetrical equations, PSSIR model equations, approximate solutions, tendency prediction

0 引言

本文基于 2003 年北京及香港二城市 SARS 病毒感染累计数据及 SIR 模型方程分析^[1,2], 依据中国境内新型冠状病毒感染累计数据在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日的公布资料^[3], 参考一般饱和过程的偏对称方程分析方法^[4,5], 讨论了 SIR 模型方程, 给出了 PSSIR 模型方程形式及其趋势性近似解, 简略分析计算了中国境内及中国境内除湖北省外地区新型冠状病毒感染累计数据, 给出相应的趋势预测方程及拐点位置与阶段性极限值, 为病毒感染疫情发展过程多因素多变量动力学方程描述提供参考。

1 病毒感染过程累计病例数据的偏对称方程形式及其曲线形态特征

依据北京在 2003 年 4 月 21 日~6 月 11 日、香港在 2003 年 3 月 17 日~6 月 14 日的 SARS 病毒感染确诊累计人数数据^[1,2], 其数据曲线形态如图 1 所示。

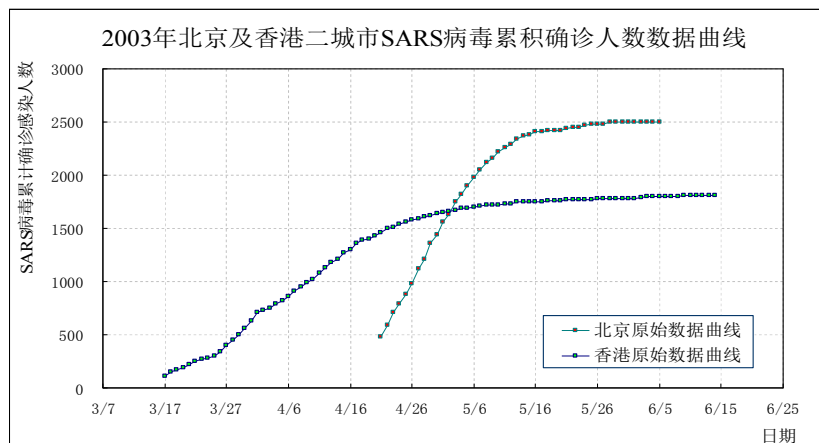


图 1 2003 年北京及香港二城市 SARS 病毒确诊感染累计人数数据曲线

由图 1 所示的曲线可见, 病毒感染累计人数数据具有前期缓慢增长(见图中香港数据曲线)、中期快速增长、后期平稳饱和的演化特征。

依据一般饱和过程的连接方程分析方法^[4, 5], 对于病毒感染累计确诊病例数据变化过程曲线, 有偏对称连接方程形式

$$P = P_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(t-t_0)] - \exp[-\alpha_2(t-t_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(t-t_0)]}, \quad (1)$$

式中 t 为时间或日期, P 为病毒确诊累计感染病例参量, A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 为待定常量; t_0 、 P_0 为平衡点坐标, 在平衡点处 $P(t=t_0) = P_0$; t 、 t_0 可同取日期, 也可同取距离同一日期的间隔天数; 参量 P 主要包括现有确诊病例人数、累计已治愈具有免疫力人数及感染病毒后累计死亡人数。

方程 (1) 式在平衡点 $t = t_0$ 、 $P(t = t_0) = P_0$ 处, 其一阶及二阶导数方程值分别为

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{2} A(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \frac{d^2 P}{dt^2} &= \frac{1}{2} A(\alpha_1^2 - \alpha_2^2); \end{aligned}$$

即方程 (1) 式的偏对称特征与 α_1 、 α_2 相关; 当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时, 方程 (1) 式曲线的拐点坐标与平衡点坐标处于同一位置, 偏对称特征消失。

病毒感染确诊累计病例参量 P 包括现有确诊病例人数、累计治愈人数及感染病毒后累计死亡人数。方程 (1) 式主要兼顾了参量 P 曲线在开始、结束二段特征的构造形式; 对于更为一般的需要对参量 P 曲线中间过程亦给出趋势描述, 并考虑病毒感染累计确诊数据曲线在前端及后续阶段均近似为水平线, 且病毒感染累计数据在前期为 0 值的特征, 从数据处理角度, 则在饱和过程的偏对称方程表述方向, 可直接参照方程 (1) 式, 将参量 P 方程构造表示为曲线在开始、中间、结束三段特征的分式拓展的二个偏对称方程 P_{FUS} 与 P_{BUS} 形式

$$\begin{aligned} P_{FUS} &= P_0 + P_0 \frac{\exp[\alpha_1(t-t_0)] - \kappa \exp[-\alpha_1(t-t_0)] - (1-\kappa) \exp[-\alpha_2(t-t_0)]}{\exp[\alpha_1(t-t_0)] + \kappa \exp[-\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa) \exp[-\alpha_2(t-t_0)]} \\ &= \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{BUS} &= P_0 + P_0 \frac{\rho \exp[\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[\alpha_2(t-t_0)] - \exp[-\alpha_1(t-t_0)]}{\rho \exp[\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[\alpha_2(t-t_0)] + \exp[-\alpha_1(t-t_0)]} \\ &= P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}; \quad (3) \end{aligned}$$

式中 κ 、 ρ 为待定常量, $0 \leq \kappa \leq 1$, $0 \leq \rho \leq 1$; P_{\max} 为 P 的计算极限值或饱和值, $P_{\max} = 2P_0$ 。

由方程 (2) 式得其一阶导数方程或微分方程形式为

$$\begin{aligned} \frac{dP_{FUS}}{dt} &= P_{\max} \frac{2\kappa\alpha_1 \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}{[1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]^2} \\ &= P_{\max}^{-1} P_{FUS}^2 [2\kappa\alpha_1 \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]; \quad (4) \end{aligned}$$

由方程 (3) 式得其一阶导数方程或微分方程形式为

$$\begin{aligned} \frac{dP_{BUS}}{dt} &= P_{\max} \frac{2\rho\alpha_1 \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}{[1 + \rho \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]^2} \\ &= P_{\max}^{-1} [P_{\max} - P_{BUS}]^2 [2\rho\alpha_1 \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]; \quad (5) \end{aligned}$$

由方程 (4) 式得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_{FUS}}{dt^2} &= \frac{2P_{FUS}}{P_{\max}} [2\kappa\alpha_1 \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]] \frac{dP_{FUS}}{dt} \\ &\quad - P_{\max}^{-1} P_{FUS}^2 [4\kappa\alpha_1^2 \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]; \quad (6) \end{aligned}$$

由方程 (5) 式得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_{BUS}}{dt^2} &= -\frac{2}{P_{\max}} (P_{\max} - P_{BUS}) [2\rho\alpha_1 \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]] \frac{dP_{BUS}}{dt} \\ &\quad + P_{\max}^{-1} (P_{\max} - P_{BUS})^2 [4\rho\alpha_1^2 \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]; \quad (7) \end{aligned}$$

在平衡点 $t = t_0$ 处, 依据方程 (2) 式、(4) 式得

$$P_{FUS} = 0.5P_{\max},$$

$$\frac{dP_{FUS}}{dt} = 0.25P_{\max} [2\kappa\alpha_1 + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2)];$$

依据方程 (3) 式、(5) 式得

$$P_{BUS} = 0.5P_{\max},$$

$$\frac{dP_{BUS}}{dt} = 0.25P_{\max} [2\rho\alpha_1 + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2)];$$

则在平衡点 $t = t_0$ 处方程 (6) 式成为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_{FUS}}{dt^2} &= \frac{2}{P_{\max}} (0.5P_{\max}) [2\kappa\alpha_1 + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2)] [0.25P_{\max} [2\kappa\alpha_1 + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2)]] \\ &\quad - P_{\max}^{-1} (0.5P_{\max})^2 [4\kappa\alpha_1^2 + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2)^2] \\ &= 0.25P_{\max} [[2\kappa\alpha_1 + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2)]^2 - 4\kappa\alpha_1^2 - (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2)^2] \\ &= 0.25P_{\max} \kappa(1-\kappa) [4\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) - 4\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2] \\ &= 0.25P_{\max} \kappa(1-\kappa) [2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2] \\ &= -0.25P_{\max} \kappa(1-\kappa) [\alpha_1 - \alpha_2]^2; \end{aligned} \quad (8)$$

方程 (7) 式成为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_{BUS}}{dt^2} &= -\frac{2}{P_{\max}} (P_{\max} - 0.5P_{\max}) [2\rho\alpha_1 + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2)] [0.25P_{\max} [2\rho\alpha_1 + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2)]] \\ &\quad + P_{\max}^{-1} (P_{\max} - 0.5P_{\max})^2 [4\rho\alpha_1^2 + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2)^2] \\ &= 0.25P_{\max} [4\rho\alpha_1^2 + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - [2\rho\alpha_1 + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2)]^2] \\ &= 0.25P_{\max} \rho(1-\rho) [4\alpha_1^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)] \\ &= 0.25P_{\max} \rho(1-\rho) [\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2] \\ &= 0.25P_{\max} \rho(1-\rho) [\alpha_1 - \alpha_2]^2. \end{aligned} \quad (9)$$

因 $0 \leq \kappa \leq 1$ 、 $0 \leq \rho \leq 1$ 、 $P_{\max} > 0$, 所以方程 (8) 式、(9) 式在平衡点 $t = t_0$ 处有

$$\frac{d^2 P_{FUS}}{dt^2} = -0.25P_{\max} \kappa(1-\kappa) [\alpha_1 - \alpha_2]^2 \leq 0; \quad (10)$$

$$\frac{d^2 P_{BUS}}{dt^2} = 0.25P_{\max} \rho(1-\rho) [\alpha_1 - \alpha_2]^2 \geq 0. \quad (11)$$

其中当 $\kappa = 0$ 、 $\rho = 0$, 或 $\kappa = 1$ 、 $\rho = 1$, 或 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时, 方程 (10) 式、(11) 式分别为

$$\frac{d^2 P_{FUS}}{dt^2} = -0.25P_{\max} \kappa(1-\kappa) [\alpha_1 - \alpha_2]^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 P_{BUS}}{dt^2} = 0.25P_{\max} \rho(1-\rho) [\alpha_1 - \alpha_2]^2 = 0;$$

而当 $0 < \kappa < 1$ 、 $0 < \rho < 1$ 、 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 时, 方程 (10) 式、(11) 式则分别为

$$\frac{d^2 P_{FUS}}{dt^2} = -0.25P_{\max} \kappa(1-\kappa) [\alpha_1 - \alpha_2]^2 < 0,$$

$$\frac{d^2 P_{BUS}}{dt^2} = 0.25P_{\max} \rho(1-\rho) [\alpha_1 - \alpha_2]^2 > 0.$$

方程 (10) 式、(11) 式表明, 方程 (2) 式曲线的拐点坐标处在平衡点坐标之前或与之重合位置, 即方程 (2) 式为前偏对称方程形式; 而方程 (3) 式曲线的拐点坐标处在平衡点坐标之后或与之重合位置, 即方程 (3) 式为后偏对称方程形式。

对于方程 (2) 式及方程 (3) 式, 当 $\kappa = 0$ 及 $\rho = 0$ 时, 其皆成为

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_0 \frac{\exp[\alpha_1(t-t_0)] - \exp[-\alpha_2(t-t_0)]}{\exp[\alpha_1(t-t_0)] + \exp[-\alpha_2(t-t_0)]} \\ &= P_0 + P_0 \frac{\exp[\alpha_2(t-t_0)] - \exp[-\alpha_1(t-t_0)]}{\exp[\alpha_2(t-t_0)] + \exp[-\alpha_1(t-t_0)]} \\ &= P_0 + P_0 \tanh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]; \end{aligned} \quad (12)$$

当 $\kappa = 1$ 及 $\rho = 1$ 时, 取 $\alpha_1 = \alpha$, α 为待定常量; 此时二方程皆直接退化为

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_0 \tanh[\alpha(t-t_0)] \\ &= \frac{P_{\max}}{1 + \exp[-2\alpha(t-t_0)]}. \end{aligned} \quad (13)$$

由方程 (13) 式得

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{2\alpha}{P_{\max}} P^2 \exp[-2\alpha(t-t_0)] \\ &= \frac{\alpha P_0}{\cosh^2[\alpha(t-t_0)]} \\ &= \alpha P_0 [1 - \tanh^2[\alpha(t-t_0)]] = \alpha [2P - P_0^{-1} P^2]. \end{aligned} \quad (14)$$

方程 (12)、(13) 二式皆为双曲正切函数, 亦是经典 S 型曲线方程或 Logistic 方程的等效形式, 方程曲线拐点坐标与曲线平衡点坐标处于同一位置, 偏对称特征消失, 转化为全对称方程形式; 方程在数学上已经被很好地研究及应用, 具有较为广泛的一阶或二阶非线性动力学方程关联性。

其中当分别应用方程 (2) 式与方程 (13) 式时, 则在 $t \approx t_0$ 平衡点附近区域, 二式分别简化为

$$\begin{aligned} P_{\text{FUS}} &\approx \frac{P_{\max}}{1 + \kappa[1 - 2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa)[1 - (\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]} \\ &= \frac{P_{\max}}{2 - [(1+\kappa)\alpha_1 + (1-\kappa)\alpha_2](t-t_0)}, \\ P &\approx \frac{P_{\max}}{1 + [1 - 2\alpha(t-t_0)]} = \frac{P_{\max}}{2 - 2\alpha(t-t_0)}; \end{aligned}$$

即得方程 (2) 式与 (13) 式中待定常数之间有近似关系方程

$$(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2 \approx 2\alpha. \quad (15)$$

而当分别应用方程 (3) 式与方程 (13) 式时, 则在 $t \approx t_0$ 平衡点附近区域, 二式分别简化为

$$\begin{aligned} P_{\text{BUS}} &\approx P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho[1 + 2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho)[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]} \\ &= P_{\max} - \frac{P_{\max}}{2[1 + 0.5[(1+\rho)\alpha_1 + (1-\rho)\alpha_2](t-t_0)]} \\ &\approx P_{\max} - 0.5P_{\max} [1 - 0.5[(1+\rho)\alpha_1 + (1-\rho)\alpha_2](t-t_0)] \\ &= P_0 + 0.5P_0 [(1+\rho)\alpha_1 + (1-\rho)\alpha_2](t-t_0), \end{aligned}$$

$$P = P_0 + P_0 \tanh[\alpha(t-t_0)] \approx P_0 + \alpha P_0 (t-t_0);$$

亦即得方程 (3) 式与方程 (13) 式中待定常数有近似关系方程为

$$(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2 \approx 2\alpha. \quad (16)$$

一般地, 诸多现象演化过程都存在阶段性极限, 极限之间状态转化传递, 逐次与演化环境相应层面动态平衡, 演化平衡过程可由方程 (1) 式、乃至方程 (13) 式的级数形式予以近似描述^[4, 5]; 对于病毒感染累计确诊病例数据, 仍从数据处理角度, 级数仅取二项, 则其趋势性拟合方程 P_{SER} 为

$$P_{SER} = P_0[1 + \gamma \tanh[\beta_1(t - t_{01})] + (1 - \gamma) \tanh[\beta_2(t - t_{02})]], \quad (17)$$

式中 P_0 、 t_{01} 、 t_{02} 、 γ 、 β_1 、 β_2 为待定常数, $0 \leq \gamma \leq 1$; t 、 t_{01} 、 t_{02} 可同取日期, 或同取距离同一日期的间隔天数, $t_{01} \leq t_{02}$; 病毒感染累计确诊病例参量 P 的极限值为 $P_{max} = 2P_0$ 。

对于方程 (13) 式与方程 (17) 式, 在平衡点 $t \approx t_0$ 及存在 $\max\{\beta_1(t - t_{01}), \beta_2(t - t_{02})\} \approx 0$ 附近区域时, 有

$$P \approx P_0 + P_0\alpha(t - t_0) = P_0[1 + \alpha t - \alpha t_0],$$

$$P_{SER} \approx P_0[1 + \gamma\beta_1(t - t_{01}) + (1 - \gamma)\beta_2(t - t_{02})] \\ = P_0[1 + [\gamma\beta_1 + (1 - \gamma)\beta_2]t - [\gamma\beta_1 t_{01} + (1 - \gamma)\beta_2 t_{02}]];$$

则在分别应用方程 (13) 式与方程 (17) 式的情况下, 二式中的待定常数之间有近似关系式

$$\gamma\beta_1 + (1 - \gamma)\beta_2 \approx \alpha, \quad \gamma\beta_1 t_{01} + (1 - \gamma)\beta_2 t_{02} \approx \alpha t_0; \quad (18)$$

当不存在 $\max\{\beta_1(t - t_{01}), \beta_2(t - t_{02})\} \approx 0$ 附近区域时, 则按方程 (17) 式中二项的区间比例, 方程 (13) 式与方程 (17) 式中的待定常数之间仍近似有关系式

$$t_{01} + (1 - \gamma)t_{02} \approx t_0. \quad (19)$$

由级数方程 (17) 式得其导数方程形式为

$$\frac{dP_{SER}}{dt} = \frac{\gamma\beta_1 P_0}{\cosh^2[\beta_1(t - t_{01})]} + \frac{(1 - \gamma)\beta_2 P_0}{\cosh^2[\beta_2(t - t_{02})]}. \quad (20)$$

由上述方程 (2)、(3)、(13)、(17) 四式, 取第 t 天、第 $t + 1$ 天病毒感染累计病例确诊病例分别为 $P(t)$ 、 $P(t + 1)$, 则相应地得在第 $t + 1$ 天病毒感染新增确诊病例的计算方程 $n(t + 1)$ 为

$$n(t + 1) \times 1 \text{ day} = P(t + 1) - P(t). \quad (21)$$

每日新增计算方程 $n(t + 1)$ 与 $P(t + 1)$ 的导数方程在曲线整体趋势形态上一致, 在相位上有差异。

方程 (13) 式及其导数 (14) 式分别具有旋转对称与轴对称性质, 属于理想情况下的状态; 而分式拓展方程 (2)、(3) 二式与级数方程 (17) 式及其导数方程 (4)、(5)、(20) 三式能够更细微地调节曲线形态, 可广泛用于描述饱和过程在前端及后续阶段均为水平线时具有偏对称或欠对称 (弱对称) 特征的饱和过程曲线。

其中, 分式拓展方程 (2) 式及其导数方程 (4) 式主要描述前偏对称的曲线形态, 如图 2 所示; 方程 (3) 式及其导数方程 (5) 式主要描述后偏对称曲线形态, 如图 3 所示; 而级数方程 (17) 式及其导数方程 (20) 式可基本兼顾前偏对称与后偏对称曲线形态, 如图 4 所示。

直观上, 分式拓展方程 (2)、(3) 二式与级数方程 (17) 式主要表现为旋转偏对称或欠对称特征, 而其导数方程形式 (4)、(5)、(20) 三式则主要表现为轴向偏对称或欠对称特征。

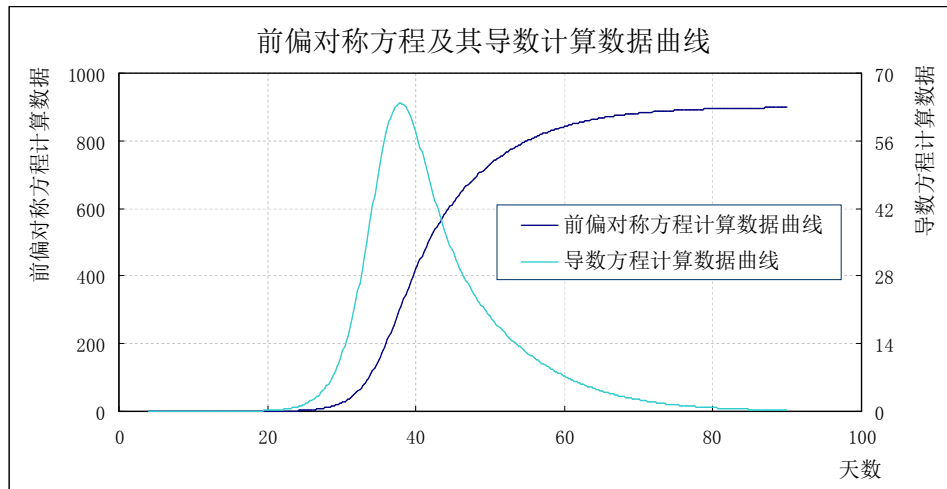


图 2 分式拓展的前偏对称方程及其导数方程计算数据曲线 ($t_0 = 40$)

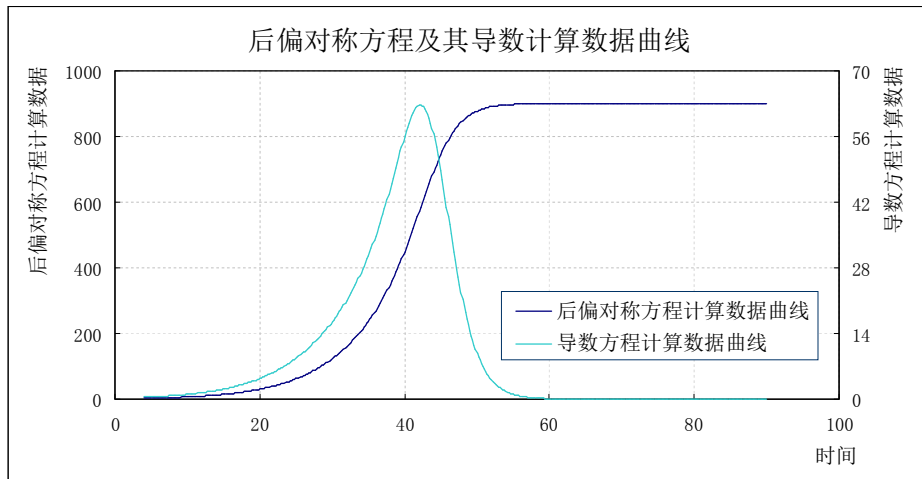


图3 分式拓展的后偏对称方程及其导数方程计算数据曲线 ($t_0 = 40$)

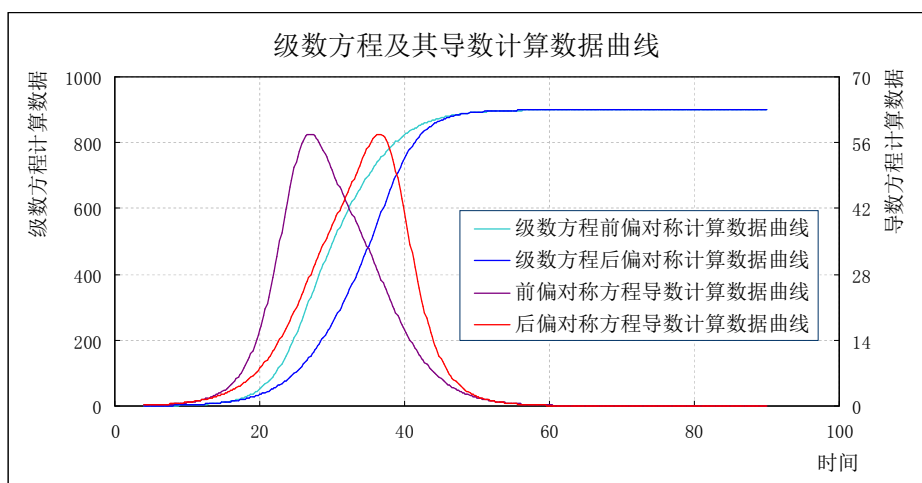


图4 级数方程及其导数方程计算数据曲线

(前偏对称 $t_{01} = 26.0$ 、 $t_{02} = 32.5$ ；后偏对称 $t_{01} = 31.0$ 、 $t_{02} = 37.5$)

由于上述偏对称方程的最小值为 0，最大值或饱和极限值为 P_{\max} ，所以在数理统计意义上，对偏对称方程归一化后，其即转化为广义分布函数 $y_{GD}(t)$ 的形式

$$y_{GD}(t) = \frac{P(t)}{P_{\max}}, \quad 0 \leq y_{GD}(t) \leq 1, \quad \frac{dy_{GD}(t)}{dt} > 0. \quad (22)$$

相应地，其导数方程即转化为广义分布密度函数 $y_{GDD}(t)$ 的形式

$$y_{GDD}(t) = \frac{dy_{GD}(t)}{dt} = \frac{1}{P_{\max}} \frac{dP(t)}{dt}. \quad (23)$$

对于偏对称方程 (2)、(3) 二式，其转化为广义分布函数 y_{GDF} 、 y_{GDB} 的形式分别为

$$y_{GDF} = \frac{P_{FUS}}{P_{\max}} = \frac{1}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}, \quad (24)$$

$$y_{GDB} = \frac{P_{BUS}}{P_{\max}} = 1 - \frac{1}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}; \quad (25)$$

所对应的广义分布密度函数 y_{GDDF} 、 y_{GDDB} 分别为

$$y_{GDDF} = \frac{dP_{GDF}}{dt} = \frac{2\kappa\alpha_1 \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}{[1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]^2}, \quad (26)$$

$$y_{GDDB} = \frac{dP_{GDB}}{dt} = \frac{2\rho\alpha_1 \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}{[1 + \rho \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]^2}. \quad (27)$$

上述病毒感染过程的偏对称方程形式，可为目前的病毒感染数据分析预测及相关非线性动力学方程研究提供参考。

2 PSSIR 模型方程形式及其趋势性近似解

关于病毒感染过程, 目前主要采用经典的 SIR 模型方程组或类似的动力学分析方法分析^[1, 2]; 其中对于经典的 SIR 模型方程组, 先取分析的数据样本总人数为 $N_C(t)$, 其中易感人数为 $S_C(t)$, 感染病人数为 $I_C(t)$, 移出者数量为 $R_C(t)$, 相互间有关系方程

$$S_C(t) + I_C(t) + R_C(t) = N_C(t); \quad (28)$$

当在疫情期间人口波动与样本总量 $N_C(t)$ 相比可以忽略, 即 $N_C(t) = N_{C_0}$ 近似为常量时, 有

$$S_C(t) + I_C(t) + R_C(t) = N_{C_0}; \quad (29)$$

经典的 SIR 模型方程组即表述为

$$\begin{cases} \frac{dS_C}{dt} = -\lambda_C S_C I_C, \\ \frac{dI_C}{dt} = \lambda_C S_C I_C - \mu_C I_C, \\ \frac{dR_C}{dt} = \mu_C I_C, \end{cases} \quad (30)$$

式中 λ_C 、 μ_C 为比率参量。

经典 SIR 模型方程组的特点是因素多、变量多, 侧重机理描述, 具有动力学方程属性, 被广泛地应用与研究; 方程组尚没有解析解, 机理参数不易及时获取, 数值解的分析对初始数据依赖较大。

下面基于病毒感染累计报告病例的偏对称方程 $P(t)$ 及 SIR 模型方程组, 给出 PSSIR 模型方程组形式及其趋势性近似解。本文给出的 PSSIR 模型方程组 (PSSIR model equations), 即是 SIR 模型方程组 (SIR model equations) 与偏对称方程 (Partial-symmetrical equations) 在小样本数据量 (Small sample data volume) 时相复合的方程形式, 是在小样本数据量时对病毒感染过程的趋势性近似描述。

2.1 PSSIR 模型方程及其解的非线性方程形式

一般地, 考察病毒感染疫情的样本总数据量人数为 $N_\Sigma(t)$, 其中易感人数为 $S_\Sigma(t)$, 感染病人数为 $I(t)$, 移出者数量为 $R(t)$, 累积感染报告病例人数为 $P(t)$; 诸参量有下面方程

$$S_\Sigma(t) = S(t) + S_U(t); \quad (31)$$

$$P(t) = I(t) + R(t); \quad (32)$$

$$S_\Sigma(t) + I(t) + R(t) = N_\Sigma(t); \quad (33)$$

式中 $S(t)$ 为将被感染的易感人数, $S_U(t)$ 为终未被感染的易感人数; $P(t)$ 包括现有确诊病例人数 $I(t)$ 、移出者数量 $R(t)$; 移出者数量 $R(t)$ 包括已治愈具有免疫力的累计人数数量 $C(t)$ 与感染病毒后死亡人数的累计数量 $D(t)$, 即

$$R(t) = C(t) + D(t); \quad (34)$$

较为简略地, 在阶段性的局部范围可进一步考虑 $C(t)$ 与 $R(t)$ 的函数关系

$$C(t) = C(R(t))$$

近似表示为其 Taylor 级数的一阶展开形式, 即

$$C(t) \approx qR(t); \quad (35)$$

式中 q 为待定系数, $0 < q < 1$; 这里基于方程 (34) 式, 考虑当 $R(t) = 0$ 时, 有 $C(t) = 0$ 、 $D(t) = 0$ 。

由方程 (34) 式、(35) 式, 得感染病毒后死亡人数累计数量 $D(t)$ 的趋势性近似表示方程形式为

$$D(t) \approx R(t) - qR(t) = (1 - q)R(t)。 \quad (36)$$

依据方程 (32) 式、(33) 式, 得

$$S(t) + I(t) + R(t) = N_\Sigma(t) - S_U(t); \quad (37)$$

则当 $N_\Sigma(t) - S_U(t) = N_0$ 近似为常量时, 得

$$S(t) + I(t) + R(t) = N_0, \quad (38)$$

$$S(t) + P(t) = N_0; \quad (39)$$

这里 $N_0 < N_\Sigma(t)$; 即与样本总数据量 $N_\Sigma(t)$ 相比, N_0 为小样本数据量。

参照经典 SIR 模型方程组 (30) 式形式, 在小样本数据量 N_0 时有病毒感染过程的参量方程组近似形式为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I, \end{cases} \quad (40)$$

式中 λ 、 μ 为比率参量。

依据方程 (39)、(40) 二式, 得由方程 $P(t)$ 表示的 $I(t)$ 与 $R(t)$ 分别为

$$I = -\frac{1}{\lambda S} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\lambda(N_0 - P)} \frac{dP}{dt}; \quad (41)$$

$$R = P - I = P - \frac{1}{\lambda(N_0 - P)} \frac{dP}{dt}. \quad (42)$$

由方程 (40) 式、(41) 式得

$$\frac{dR}{dt} = \mu I = \frac{\mu}{\lambda(N_0 - P)} \frac{dP}{dt};$$

即

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\lambda}{\mu} (N_0 - P) \frac{dR}{dt}; \quad (43)$$

则由方程组 (40) 式及方程 (43) 式, 得 PSSIR 模型方程形式为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\lambda}{\mu} (N_0 - P) \frac{dR}{dt}. \end{cases} \quad (44)$$

PSSIR 模型方程 (44) 式为小样本数据量时的病毒感染过程趋势性近似模型方程, 其主要数学特征为偏对称饱和。其中, $P(t)$ 与 $S(t)$ 互补; $R(t)$ 滞后于 $P(t)$; $I(t)$ 表述了 $R(t)$ 滞后于 $P(t)$ 的程度。

由方程 (44) 式得

$$dR = \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{N_0 - P} dP; \quad \text{or} \quad dR = -\frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{S} dS. \quad (45)$$

方程 (45) 是 PSSIR 模型方程的一个具有显著象征性的近似性解析与趋势性模拟的分水岭。其中, 参量 μ 、 λ 之比 $\mu\lambda^{-1}$ 是关键因素, 若将其取为变量, 则需要进一步给出具体函数形式。

由方程 (45) 式得

$$R = \int \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{N_0 - P} dP, \quad R(P=0) = 0. \quad (46)$$

依据方程 (38) 式、(41) 式及 (46) 式, 得

$$N_0 - P + \frac{1}{\lambda(N_0 - P)} \frac{dP}{dt} + \int \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{N_0 - P} dP = N_0;$$

故有 PSSIR 模型方程 (44) 式的等效非线性方程形式

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dP}{dt} + (N_0 - P) \int \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{N_0 - P} dP - P(N_0 - P) = 0; \quad (47)$$

PSSIR 模型方程 (44) 式解的非线性方程形式则为

$$\begin{cases} S(t) = N_0 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \int \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{N_0 - P(t)} dP(t); R(P(t) = 0) = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \frac{dP(t)}{dt} + [N_0 - P(t)] \int \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{N_0 - P(t)} dP(t) - P(t)[N_0 - P(t)] = 0. \end{cases} \quad (48)$$

2.2 参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为 $P(t)$ 曲线饱和阶段常量时 PSSIR 模型方程的趋势性近似解

在取参量 μ 、 λ 之比 $\mu\lambda^{-1}$ 为常量时的理想简单情况下, 且考虑由方程 (32) 式在前期起始阶段 $P = 0$ 时有 $R = 0$, 即解得 (48) 式中 $R(t)$ 与 $P(t)$ 、或 $R(t)$ 与 $S(t)$ 之间的关系方程为

$$R = \frac{\mu}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_0 - P}, \quad \text{or} \quad R = \frac{\mu}{\lambda} \ln \frac{N_0}{S}. \quad (49)$$

方程 (47) 式成为

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dP}{dt} - \frac{\mu}{\lambda} (N_0 - P) \ln \frac{N_0 - P}{N_0} - P(N_0 - P) = 0; \quad (50)$$

或表示为 $S(t)$ 的非线性方程等效形式

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dS}{dt} + \frac{\mu}{\lambda} S \ln \frac{S}{N_0} + S(N_0 - S) = 0. \quad (51)$$

方程 (50) 式或 (51) 式尚没有严格解析解; 在二方程形式上, 可得其部分地具有近似指数函数和近似双曲正切函数的复合性饱和特征。

下面基于非线性方程 (50) 式讨论参与感染过程的小样本数据量 N_0 。

依据方程 (50) 式, 当 $dP/dt = 0$ 时, 有

$$\mu(N_0 - P) \ln \frac{N_0 - P}{N_0} + \lambda P(N_0 - P) = 0; \quad (52)$$

因这里参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为常量, 故可将方程 (52) 式表示为

$$(N_0 - P) \left[\frac{\mu}{\lambda} \ln \frac{N_0 - P}{N_0} + P \right] = 0. \quad (53)$$

当 $0 \leq P < N_0$ 时, 方程 (53) 式成为

$$\frac{\mu}{\lambda} \ln \frac{N_0 - P}{N_0} + P = 0; \quad (54)$$

其一解为 $P = 0$; 即得方程 (50) 式的一极限解为

$$P = P_{\min} = 0. \quad (55)$$

方程 (54) 式在解 $P = 0$ 之外, 至多还有一数值解, 其部分地取决于 $N_0(\mu\lambda^{-1})^{-1}$ 的值。

对于方程 (52) 式, 在 $P \rightarrow N_0$ 时有

$$\begin{aligned} & \lim_{P \rightarrow N_0} \left[\frac{\mu}{\lambda} (N_0 - P) \ln \frac{N_0 - P}{N_0} + P(N_0 - P) \right] \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \lim_{P \rightarrow N_0} \frac{\ln(N_0 - P) - \ln N_0}{(N_0 - P)^{-1}} \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \lim_{P \rightarrow N_0} \frac{\frac{d}{dP} [\ln(N_0 - P) - \ln N_0]}{\frac{d}{dP} (N_0 - P)^{-1}} \\ &= -\frac{\mu}{\lambda} \lim_{P \rightarrow N_0} (N_0 - P) \\ &= 0; \end{aligned}$$

故得方程 (50) 式的另一极限解为

$$P = P_{\max} \rightarrow N_0. \quad (56)$$

方程 (56) 式为极限形式。

若使方程 (49) 式 $P(t)$ 在 $0 \leq P(t) \leq P_{\max}$ 中全范围适用, 即有 $P_{\max} < N_0$; 由此 $P_{\max} < N_0$ 及依据方程 (56) 式 $P_{\max} \rightarrow N_0$, 则有二自然数 P_{\max} 与 N_0 的近似关系方程为

$$P_{\max} = N_0 - 1; \quad (57)$$

即小样本数据量 N_0 为

$$N_0 = P_{\max} + 1. \quad (58)$$

由方程 (39) 式、(55) 式及 (57) 式, 得 $S(t)$ 的范围为 $1 \leq S \leq P_{\max} + 1$, 即 $S(t)$ 的最小值 S_{\min} 及最大值 S_{\max} 分别为

$$S_{\min} = P_{\max} + 1 - P_{\max} = 1; \quad S_{\max} = P_{\max} + 1 - P_{\min} = P_{\max} + 1. \quad (59)$$

在方程 (59) 式中, $S_{\min} = 1$ 为 $S(t)$ 的临界状态值。由方程 (58) 式, PSSIR 模型方程组中小样本数据量 N_0 一般需要在病毒感染过程中累计报告病例数据在过拐点位置后予以适当校核。

依据方程 (58) 式, 方程 (50)、(51) 二式成为

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dP}{dt} - \frac{\mu}{\lambda} (P_{\max} + 1 - P) \ln \frac{P_{\max} + 1 - P}{P_{\max} + 1} - P(P_{\max} + 1 - P) = 0; \quad (60)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dS}{dt} + \frac{\mu}{\lambda} S \ln \frac{S}{S_{\max}} + S(S_{\max} - S) = 0. \quad (61)$$

由方程 (60) 式, 当 $P \rightarrow 1$ 与 $P \rightarrow P_{\max}$ 时, 方程曲线在前期起始阶段及后期饱和阶段分别有极限形式

$$\lim_{P \rightarrow 1} \frac{dP}{dt} = \mu_{BS} P_{\max} \ln \frac{P_{\max}}{P_{\max} + 1} + \lambda_{BS} P_{\max}, \quad (62)$$

$$\lim_{P \rightarrow P_{\max}} \frac{dP}{dt} = \mu_{ES} \ln \frac{1}{P_{\max} + 1} + \lambda_{ES} P_{\max}; \quad (63)$$

这里 μ_{BS} 、 λ_{BS} 与 μ_{ES} 、 λ_{ES} 分别为参量 μ 、 λ 在方程 $P(t)$ 曲线前期起始阶段的极限值与后期饱和阶段的极限值。

因在 $P \rightarrow 1$ 与 $P \rightarrow P_{\max}$ 时, 方程 (60) 式曲线的前期起始阶段及后期饱和阶段皆有极限形式

$$\lim_{P \rightarrow 1} \frac{dP}{dt} \geq 0, \quad \lim_{P \rightarrow P_{\max}} \frac{dP}{dt} \geq 0;$$

则方程 (62) 式、(63) 式分别成为

$$-\mu_{BS} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max}} + \lambda_{BS} \geq 0;$$

$$-\mu_{ES} \ln [P_{\max} + 1] + \lambda_{ES} P_{\max} \geq 0.$$

在参量 $\lambda_{BS} \neq 0$ 、 $\lambda_{ES} \neq 0$ 时, 即得方程 (60) 式曲线在 $P \rightarrow 1$ 时前期起始阶段与在 $P \rightarrow P_{\max}$ 时后期饱和阶段的参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 常量方程分别为

$$\frac{\mu_{BS}}{\lambda_{BS}} \leq \frac{1}{\ln[1 + P_{\max}^{-1}]}; \quad (64)$$

$$\frac{\mu_{ES}}{\lambda_{ES}} \leq \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]}. \quad (65)$$

在方程 (64) 式、(65) 式中, 因当 $P_{\max} \geq 1$ 时恒有

$$\frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \leq \frac{1}{\ln[1 + P_{\max}^{-1}]}; \quad (66)$$

故由方程 (64) 式、(65) 式、(66) 式得方程 (60) 式中参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 取为常数时的公共解为

$$\frac{\mu}{\lambda} \leq \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]}。 \quad (67)$$

一般地, 考虑方程 $P(t)$ 曲线在 $P \rightarrow P_{\max}$ 时后期饱和阶段的方程 (63) 式极限

$$\lim_{P \rightarrow P_{\max}} \frac{dP}{dt} = 0;$$

时, 则由方程 (65) 式、(67) 式即得方程 (60) 式中参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 常量估计方程为

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]}。 \quad (68)$$

参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 常量估计方程 (68) 式的曲线如图 5 所示。

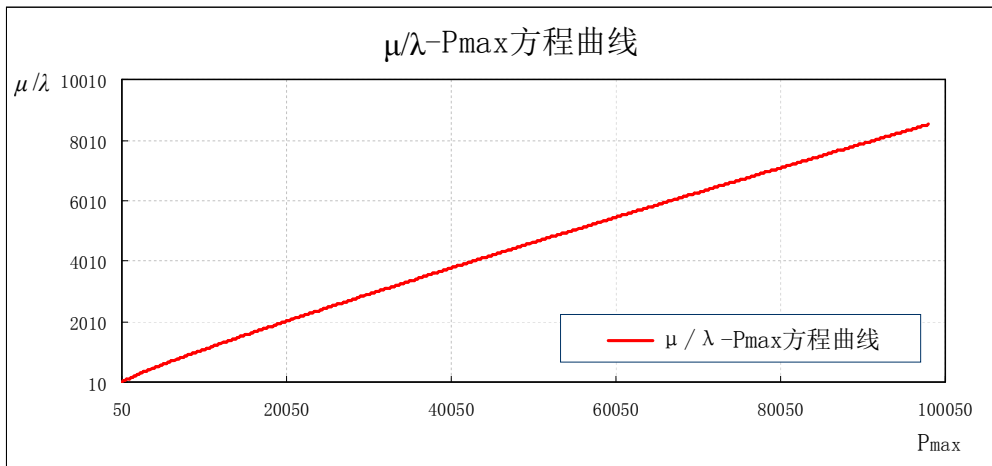


图 5 参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 常量估计方程趋势性曲线 ($P_{\max} \geq 50$)

由参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 常量估计方程 (68) 式, 方程 (49) 式成为

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P(t)} \\ &= P_{\max} - P_{\max} \frac{\ln[P_{\max} + 1 - P(t)]}{\ln[P_{\max} + 1]}。 \end{aligned} \quad (69)$$

依据方程 (68) 式, 方程 (60)、(61) 二式成为

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dP}{dt} - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} (P_{\max} + 1 - P) \ln \frac{P_{\max} + 1 - P}{P_{\max} + 1} - P(P_{\max} + 1 - P) = 0; \quad (70)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dS}{dt} + \frac{S_{\max} - 1}{\ln S_{\max}} S \ln \frac{S}{S_{\max}} + S(S_{\max} - S) = 0。 \quad (71)$$

与偏对称方程 (2)、(3) 二式的一阶微分方程形式 (4)、(5) 二式比较, 方程 (70) 式更为复杂且难以求解; 故在方程 (70) 式中的 $P(t)$ 由偏对称方程 (2)、(3) 二式表示时, 即是 PSSIR 模型方程中的参量 $P(t)$ 近似设置为外挂方程, 其根据对现象演化数据曲线的具体分析得到。

在参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为常量方程 (68) 式的理想简单情况下, 得 PSSIR 模型方程的初步近似解为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P(t)} = P_{\max} - P_{\max} \frac{\ln[P_{\max} + 1 - P(t)]}{\ln[P_{\max} + 1]}; \\ \frac{1}{\lambda} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} [P_{\max} + 1 - P(t)] \ln \frac{P_{\max} + 1 - P(t)}{P_{\max} + 1} - P(t)[P_{\max} + 1 - P(t)] = 0。 \end{cases} \quad (72)$$

由初步近似解 (72) 式, 可得

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}[P_{\max} + 1 - P] = -\frac{dP}{dt} \leq 0,$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P(t)}\right] = \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \frac{1}{P_{\max} + 1 - P} \frac{dP}{dt} \geq 0;$$

且对应地得 $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 诸方程曲线在 $P = P_{\min} = 0$ 时的前期起始阶段极限分别为

$$S_{BS} = P_{\max} + 1, \quad I_{BS} = 0, \quad R_{BS} = 0; \tag{73}$$

在 $P = P_{\max}$ 的后期饱和阶段极限分别为

$$S_{ES} = 1, \quad I_{ES} = 0, \quad R_{ES} = P_{\max}. \tag{74}$$

因初步近似解 (72) 式中非线性方程 $P(t)$ 目前尚无严格解析解, 故当其中的 $P(t)$ 由偏对称方程 (2)、(3) 二式近似表示、参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 常量估计方程取为方程 $P(t)$ 曲线在后期饱和阶段的极限形式时, 则有 PSSIR 模型方程 (44) 式在前偏对称方程 (2) 式时的趋势性近似解为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P(t)}, \\ P(t) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}. \end{cases} \tag{75}$$

在后偏对称方程 (3) 式时的趋势性近似解为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P(t)}, \\ P(t) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}. \end{cases} \tag{76}$$

PSSIR 模型方程 (44) 式是在小样本数据量时动态开放的趋势性近似模型表述, 其中的偏对称方程 $P(t)$ 具有外挂性质, 在基本满足方程 (44) 式的情况下, 根据所研究的具体数据特征, $P(t)$ 可以有多种表述, 并不限于方程 (2)、(3) 二式的形式, 总体上以有效描述所研究的现象演化过程数据曲线特征为根本确立原则。

应该指出, 方程 (50) 式或 (51) 式可采用中间参量法分析探讨其参量解或近似参量解表述, 而近似解 (75) 式及 (76) 式可能仅为中间参量解的强近似显式形式。

对于 PSSIR 模型方程 (44) 式, 当将参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 取为常量时, 其趋势性近似解 (75) 式、(76) 式在表述形式上较为简洁, 具有部分近似及部分解析的性质, 但近似解的灵活性及适应性也较低; 而且, 将具有自然数性质的 $P(t)$ 、 $S(t)$ 、 $I(t)$ 及 $R(t)$ 作为连续函数进行微积分运算, 即使在 P_{\max} 数值较大时, 亦是属于近似的趋势性推演, 其仅为数据分析试算确定参数形式或数值估计时参考。

偏对称方程 $P(t)$ 的外挂性质和方程具体形式需要根据实际疫情数据特征在过拐点后予以校核确认、小样本数据量以及参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 常量估计方程取为方程 $P(t)$ 曲线在后期饱和阶段的极限形式, 实质上也是 PSSIR 模型方程趋势性近似解 (75) 式、(76) 式的显著缺陷及不足之处, 还需要进一步分析研究予以改进完善。

2.3 参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为 $P(t)$ 曲线饱和阶段常量时 λ 及 μ 的方程形式

依据方程 (70) 式, 在方程 $P(t)$ 为近似解 (75) 式、(76) 式中已知形式的情况下, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{dP}{dt} &= [P_{\max} + 1 - P] \left[\frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1 - P}{P_{\max} + 1} + P \right] \\ &= [P_{\max} + 1 - P] \left[P_{\max} \frac{\ln[P_{\max} + 1 - P]}{\ln[P_{\max} + 1]} - P_{\max} + P \right]; \end{aligned}$$

即得由方程 $P(t)$ 表示的参量 $\mu(t)$ 与 $\lambda(t)$ 分别为

$$\lambda(t) = \frac{1}{[P_{\max} + 1 - P(t)][P_{\max} \ln[P_{\max} + 1 - P(t)][\ln[P_{\max} + 1]]^{-1} - P_{\max} + P(t)]} \frac{dP(t)}{dt}; \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \lambda(t) \\ &= \frac{P_{\max}}{[P_{\max} + 1 - P(t)][P_{\max} \ln[P_{\max} + 1 - P(t)] - [P_{\max} - P(t)] \ln[P_{\max} + 1]]} \frac{dP(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (78)$$

在偏对称方程 $P(t)$ 为已知形式的情况下, 依据方程 (69) 式、参量方程 (77) 式、(78) 式中, 得 $\lambda(t)$ 、 $\mu(t)$ 与 $P(t)$ 及 $R(t)$ 之间对应关系的趋势性曲线分别如图 6、图 7 所示。

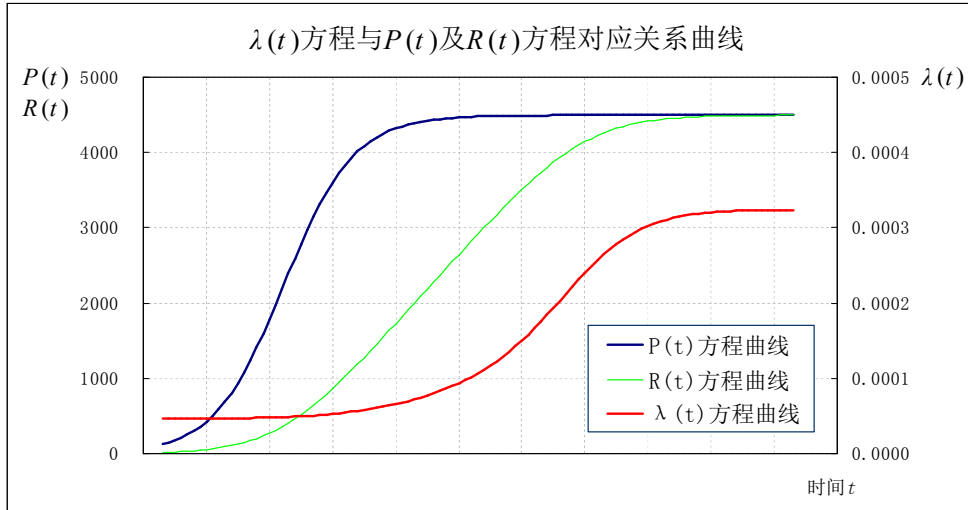


图 6 $\lambda(t)$ 方程与 $P(t)$ 及 $R(t)$ 方程对应关系曲线

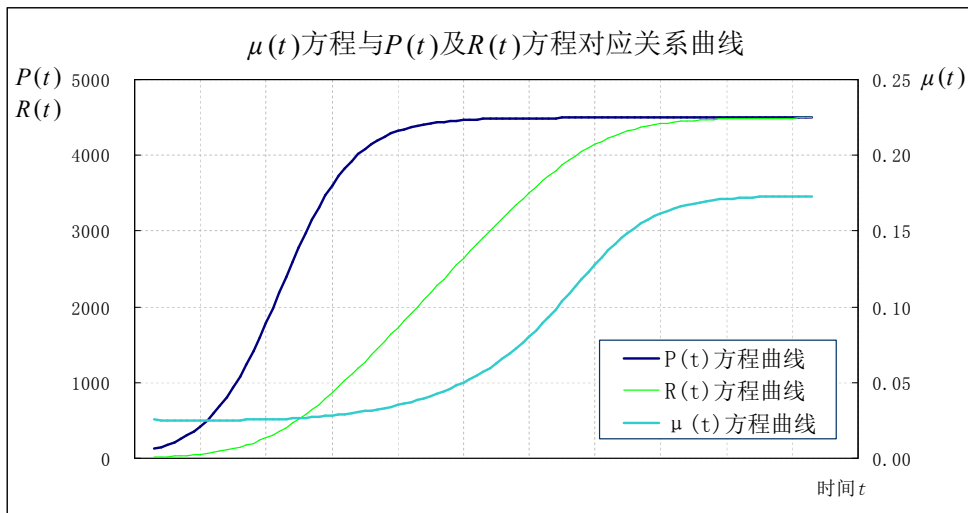


图 7 $\mu(t)$ 方程与 $P(t)$ 及 $R(t)$ 方程对应关系曲线

在图 6、图 7 中表明, 参量 $\lambda(t)$ 与 $\mu(t)$ 在 $P(t)$ 曲线平衡点附近区域缓慢变化, 近似于常量。

下面在参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为常量时, 依据偏对称方程 $P(t)$, 给出 PSSIR 模型方程中参量 $\lambda(t)$ 及 $\mu(t)$ 在方程 $P(t)$ 曲线平衡点邻域的方程近似表示形式。

依据方程 (2) 式及 (3) 式, 在方程 $P(t)$ 曲线 $t \rightarrow t_0$ 的平衡点邻域, $P \approx P_0 = 0.5P_{\max}$, 且有

$$\begin{aligned} P_{\text{FUS}} &\approx \frac{P_{\max}}{1 + \kappa[1 - 2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa)[1 - (\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]} \\ &= \frac{P_{\max}}{2 - [(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2](t - t_0)} \\ &\approx 0.5P_{\max} + 0.25P_{\max}[(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2](t - t_0); \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{BUS}} &\approx P_{\text{max}} - \frac{P_{\text{max}}}{1 + \rho[1 + 2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho)[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]} \\
 &= P_{\text{max}} - \frac{P_{\text{max}}}{2[1 + 0.5[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2](t - t_0)]} \\
 &\approx 0.5P_{\text{max}} + 0.25P_{\text{max}}[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2](t - t_0). \quad (80)
 \end{aligned}$$

由方程 (79)、(80) 二式分别得

$$\frac{dP_{\text{FUS}}}{dt} = 0.25P_{\text{max}}[(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2]; \quad (81)$$

$$\frac{dP_{\text{BUS}}}{dt} = 0.25P_{\text{max}}[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2]. \quad (82)$$

由方程 (77) 式、(81) 式、(82) 式, 及在平衡点邻域 $P \approx P_0 = 0.5P_{\text{max}}$, 得在平衡点邻域前偏对称时 λ_{FUS} 方程与后偏对称时 λ_{BUS} 方程分别为

$$\lambda_{\text{FUS}} = \frac{0.25P_{\text{max}}[(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2]}{[0.5P_{\text{max}} + 1][P_{\text{max}} \ln[0.5P_{\text{max}} + 1][\ln[P_{\text{max}} + 1]]^{-1} - 0.5P_{\text{max}}]}; \quad (83)$$

$$\lambda_{\text{BUS}} = \frac{0.25P_{\text{max}}[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2]}{[0.5P_{\text{max}} + 1][P_{\text{max}} \ln[0.5P_{\text{max}} + 1][\ln[P_{\text{max}} + 1]]^{-1} - 0.5P_{\text{max}}]}; \quad (84)$$

即得 λ_{FUS} 与 λ_{BUS} 分别为

$$\lambda_{\text{FUS}} = \frac{(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2}{[P_{\text{max}} + 2][2[\ln[P_{\text{max}} + 1]]^{-1} \ln[0.5P_{\text{max}} + 1] - 1]}; \quad (85)$$

$$\lambda_{\text{BUS}} = \frac{(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2}{[P_{\text{max}} + 2][2[\ln[P_{\text{max}} + 1]]^{-1} \ln[0.5P_{\text{max}} + 1] - 1]}. \quad (86)$$

由方程 (68) 式, 进而得在平衡点邻域前偏对称时 μ_{FUS} 与后偏对称时 μ_{BUS} 分别为

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{FUS}} &= \frac{P_{\text{max}}}{\ln[P_{\text{max}} + 1]} \lambda_{\text{FUS}} \\
 &= \frac{P_{\text{max}}[(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2]}{[P_{\text{max}} + 2][2 \ln[0.5P_{\text{max}} + 1] - \ln[P_{\text{max}} + 1]]}; \quad (87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{BUS}} &= \frac{P_{\text{max}}}{\ln[P_{\text{max}} + 1]} \lambda_{\text{BUS}} \\
 &= \frac{P_{\text{max}}[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2]}{[P_{\text{max}} + 2][2 \ln[0.5P_{\text{max}} + 1] - \ln[P_{\text{max}} + 1]]}. \quad (88)
 \end{aligned}$$

一般地, 考虑 $P_{\text{max}} \gg 2$, 则由偏对称方程 $P(t)$ 表示的在平衡点邻域 PSSIR 模型方程中 λ_{FUS} 、 λ_{BUS} 及 μ_{FUS} 、 μ_{BUS} 的方程形式 (85) 式~(88) 式分别近似为

$$\lambda_{\text{FUS}} = \frac{(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2}{P_{\text{max}}[1 - 2 \ln 2[\ln P_{\text{max}}]^{-1}]}, \quad (89)$$

$$\lambda_{\text{BUS}} = \frac{(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2}{P_{\text{max}}[1 - 2 \ln 2[\ln P_{\text{max}}]^{-1}]}; \quad (90)$$

$$\mu_{\text{FUS}} = \frac{(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2}{\ln[0.25P_{\text{max}}]}, \quad (91)$$

$$\mu_{\text{BUS}} = \frac{(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2}{\ln[0.25P_{\text{max}}]}. \quad (92)$$

2.4 参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为 $P(t)$ 曲线饱和阶段常量时 PSSIR 模型方程中 $I(t)$ 的最大值估计方程

由 PSSIR 模型方程的趋势性近似解 (72) 式得

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left[P - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P} \right] = \left[1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \frac{1}{P_{\max} + 1 - P} \right] \frac{dP}{dt}; \quad (93)$$

则当

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

时, $I(t)$ 取极限值, 得

$$\frac{dP}{dt} = 0, \quad (94)$$

及

$$1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \frac{1}{P_{\max} + 1 - P} = 0. \quad (95)$$

依据方程 (55) 式、(56) 式及 (70) 式, 对于 $I(t)$ 方程, 则方程 (94) 式对应着 $P(t)$ 曲线在前期起始阶段的极限 $P = P_{\min} = 0$ 时方程 (73) 式中的 $I_{BS} = 0$, 及在后期近于饱和阶段的极限 $P = P_{\max}$ 时方程 (74) 式中的 $I_{ES} = 0$ 。

由方程 (95) 式解得 $I(t)$ 在 $I_{BS} = 0$ 与 $I_{ES} = 0$ 为极大值 $I(t) = I_{\max}$ 时的 $P(t)$ 为

$$P(I = I_{\max}) = P_{\max} + 1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]}; \quad (96)$$

进而由方程 (96) 式及近似解 (72) 式解得 $I(t)$ 为极大值 $I(t) = I_{\max}$ 时 $S(t)$ 与 $R(t)$ 分别为

$$S(I = I_{\max}) = P_{\max} + 1 - \left[P_{\max} + 1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \right] = \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]}; \quad (97)$$

$$\begin{aligned} R(I = I_{\max}) &= \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - [P_{\max} + 1 - P_{\max} [\ln[P_{\max} + 1]]^{-1}]} \\ &= \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{[P_{\max} + 1] \ln[P_{\max} + 1]}{P_{\max}}; \end{aligned} \quad (98)$$

则由近似解 (72) 式及 (96) 式、(98) 式得 $I(t)$ 在 $I_{BS} = 0$ 与 $I_{ES} = 0$ 之间的极大值估计方程为

$$\begin{aligned} I_{\max} &= P(I = I_{\max}) - R(I = I_{\max}) \\ &= \left[P_{\max} + 1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \right] - \left[\frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{[P_{\max} + 1] \ln[P_{\max} + 1]}{P_{\max}} \right] \\ &= P_{\max} + 1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \left[1 + \ln \frac{[P_{\max} + 1] \ln[P_{\max} + 1]}{P_{\max}} \right]. \end{aligned} \quad (99)$$

方程 (96) 式~(99) 式还可由下面的分析得到。

由方程 (40) 式, 得

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{d}{dt} [\lambda SI - \mu I] = \lambda I \frac{dS}{dt} + [\lambda S - \mu] \frac{dI}{dt}; \quad (100)$$

则当

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad I(t) > 0$$

时, 方程 (100) 式成为

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \lambda I \frac{dS}{dt} < 0; \quad (101)$$

得此时 $I(t) = I_{\max}$ 取最大值, 由方程 (44) 式得

$$[\lambda S(I = I_{\max}) - \mu] I_{\max} = 0;$$

即有

$$S(I = I_{\max}) = \frac{\mu}{\lambda}; \quad (102)$$

则由参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 常量估计方程 (68) 式得

$$S(I = I_{\max}) = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]}; \quad (103)$$

及由近似解 (72) 式及 (103) 式得

$$P(I = I_{\max}) = P_{\max} + 1 - S(I = I_{\max}) = P_{\max} + 1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]}; \quad (104)$$

继而得

$$\begin{aligned} R(I = I_{\max}) &= \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - [P_{\max} + 1 - P_{\max} [\ln[P_{\max} + 1]]^{-1}]} \\ &= \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{[P_{\max} + 1] \ln[P_{\max} + 1]}{P_{\max}}; \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} I_{\max} &= P(I = I_{\max}) - R(I = I_{\max}) \\ &= P_{\max} + 1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{[P_{\max} + 1] \ln[P_{\max} + 1]}{P_{\max}} \\ &= P_{\max} + 1 - \frac{P_{\max}}{\ln[P_{\max} + 1]} \left[1 + \ln \frac{[P_{\max} + 1] \ln[P_{\max} + 1]}{P_{\max}} \right]. \end{aligned} \quad (106)$$

由方程 (97)、(98) 二式亦得在 $I(t) = I_{\max}$ 时有

$$\frac{R(I = I_{\max})}{S(I = I_{\max})} = \ln \frac{[P_{\max} + 1] \ln[P_{\max} + 1]}{P_{\max}}. \quad (107)$$

一般地, 对于 $S(t)$ 与 $R(t)$, 因

$$\frac{dS}{dt} \leq 0, \quad \frac{dR}{dt} \geq 0;$$

即 $S(t)$ 曲线主要呈现单调下降特征, $R(t)$ 曲线主要呈现单调上升特征; 故方程 (107) 式表明在 $P_{\max} \geq 12$ 时, 有

$$\frac{R(I = I_{\max})}{S(I = I_{\max})} \geq \ln \frac{13 \ln 13}{12} \approx 1.02 > 1; \quad (108)$$

也即在此情况下 $R(t)$ 与 $S(t)$ 的曲线交点时间处在 $I(t)$ 顶点 (最大值 I_{\max}) 之前的时间位置, 有简略的时间位置判别方程

$$t(R = S) < t(I = I_{\max}), \quad P_{\max} \geq 12. \quad (109)$$

方程 (109) 式对于一般的 PSSIR 模型方程趋势性曲线基本都是适用的。

一般地, 当考虑 $P_{\max} \gg 1$ 时, 方程 (96) ~ (99) 式及 (107) 式则分别近似为

$$P(I = I_{\max}) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}}; \quad (110)$$

$$S(I = I_{\max}) = \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}}; \quad (111)$$

$$I_{\max} = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}} [1 + \ln \ln P_{\max}]; \quad (112)$$

$$R(I = I_{\max}) = \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}} \ln \ln P_{\max}; \quad (113)$$

$$\frac{R(I = I_{\max})}{S(I = I_{\max})} = \ln \ln P_{\max}. \quad (114)$$

2.5 参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为 $P(t)$ 曲线饱和阶段常量时 PSSIR 模型方程的趋势性近似解曲线

在参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为常量时, 依据 PSSIR 模型方程 (44) 式的偏对称形式近似解 (75)、(76) 二式, 其趋势性曲线分别如图 8、图 9 所示; 依据 $I(t)$ 的最大值估计方程 (99) 式, I_{\max}/P_{\max} 与 P_{\max} ($P_{\max} \geq 50$) 的趋势性关系曲线如图 10 所示。

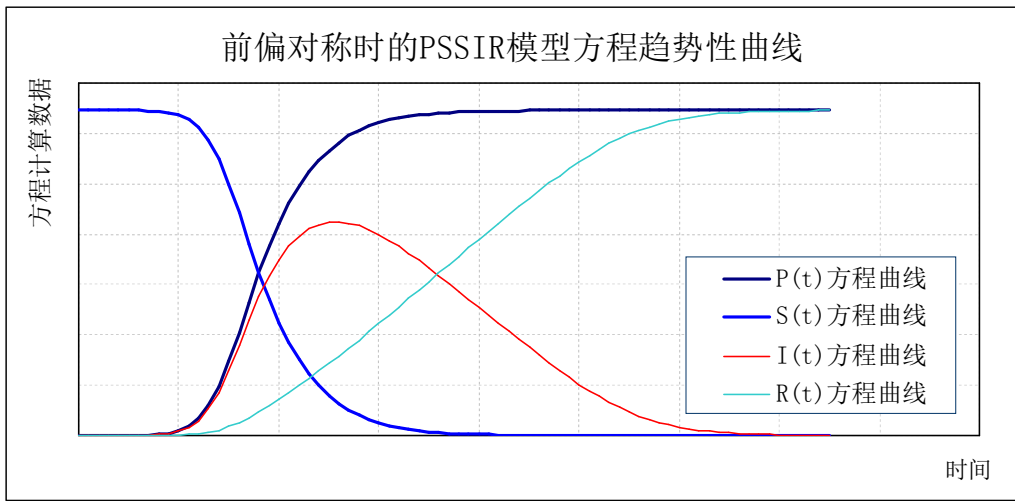


图 8 由前偏对称方程表示的 PSSIR 模型方程趋势性曲线

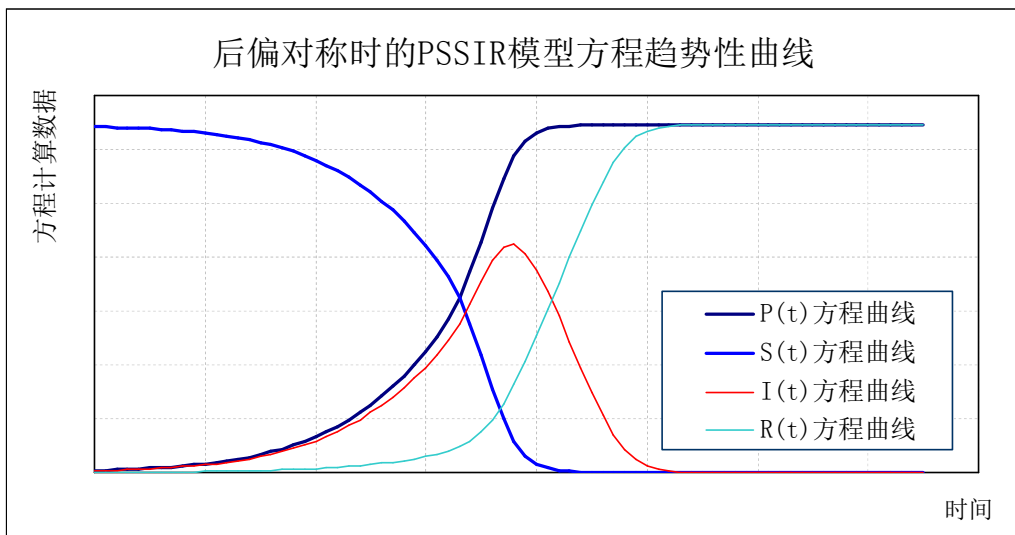


图 9 由后偏对称方程表示的 PSSIR 模型方程趋势性曲线

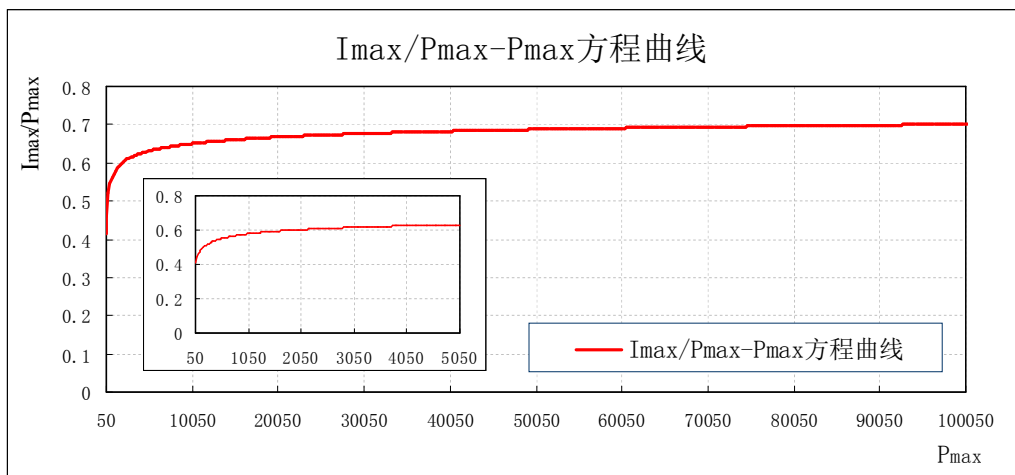


图 10 $I_{\max}/P_{\max}-P_{\max}$ 趋势性近似方程曲线 ($P_{\max} \geq 50$)

2.6 较为一般情况下的 PSSIR 模型方程简略近似解形式

上述分析探讨了参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 在方程 $P(t)$ 曲线饱和阶段为常量时的理想简单情况下, 基于偏对称方程 $P(t)$ 给出了 PSSIR 模型方程形式及其趋势性近似解, 进而给出了 $I(t)$ 的最大值估计方程。

其中, 由 PSSIR 模型方程 (44) 式, 在参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为常量时 $P(t)$ 与 $R(t)$ 的关系方程为

$$P(t) = P_\varepsilon - \exp[-\lambda\mu^{-1}[R(t) - R_0]], \quad (115)$$

这里 P_ε 、 R_0 为待定常量, $P_\varepsilon > P_{\max}$ 。

考虑由 $P(t)$ 与 $R(t)$ 在前期初始时当 $P(t) = 0$ 有 $R(t) = 0$, 故方程 (115) 式成为

$$P(t) = P_\varepsilon[1 - \exp[-\lambda\mu^{-1}R(t)]]。 \quad (116)$$

方程 (116) 式是最简单情况下的饱和过程方程。

下面通过给出方程 (116) 式的一般饱和和方程形式, 探讨 PSSIR 模型方程 (44) 式的一般性简洁近似解。

根据具体数据特征, 累计确诊病例人数 $P(t)$ 与移出者数量 $R(t)$ 之间趋势性关系方程可以有多种表示形式; 包括 $P(R)$ 方程的饱和形式及 $R(P)$ 方程的蠕变形式。计算表明, 与 $R(P)$ 方程的蠕变形式相比较, $P(R)$ 方程的饱和形式运算较为简单易解。

其中简洁地, 可将方程 (116) 式扩展为一般性的饱和过程方程

$$P(t) = P_\varepsilon[1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]] [1 + \varepsilon_2 R(t)], \quad (117)$$

这里 P_ε 、 ε_1 、 ε_2 为待定常数, $0 < \varepsilon_1 \leq 1$, $0 \leq \varepsilon_2 < 1$ 。

由方程 (117) 式得

$$\frac{dP(t)}{dR(t)} = \varepsilon_1 P_\varepsilon \exp[-\varepsilon_1 R(t)] [1 + \varepsilon_2 R(t)] + \varepsilon_2 P_\varepsilon [1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]]。 \quad (118)$$

在近似考虑 $N_0 = P_{\max} + 1$ 时, 由方程 (44) 式得参量 μ 、 λ 之比 $\mu\lambda^{-1}$ 为

$$\frac{\mu}{\lambda} = [P_{\max} + 1 - P(t)] \frac{dR(t)}{dP(t)}; \quad (119)$$

则由方程 (118) 式、(119) 式得参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 的函数表述形式为

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{P_{\max} + 1 - P_\varepsilon [1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]] [1 + \varepsilon_2 R(t)]}{\varepsilon_1 P_\varepsilon \exp[-\varepsilon_1 R(t)] [1 + \varepsilon_2 R(t)] + \varepsilon_2 P_\varepsilon [1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]]}。 \quad (120)$$

由方程 (117) 式, 得当参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为变量情况下的 PSSIR 模型方程 (44) 式在前偏对称与后偏对称时的简略近似解分别为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ P_\varepsilon [1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]] [1 + \varepsilon_2 R(t)] = P(t), \\ P(t) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}。 \end{cases} \quad (121)$$

与

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ P_\varepsilon [1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]] [1 + \varepsilon_2 R(t)] = P(t), \\ P(t) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}。 \end{cases} \quad (122)$$

在近似解 (121)、(122) 二式中, 在偏对称方程 $P(t)$ 及 $P(R)$ 为已知的情况下, PSSIR 模型方程中 $S(t)$ 可直接由 $P(t)$ 得到; $R(t)$ 没有显式解, 需由与 $P(t)$ 的具体对应计算数组得到; $I(t)$ 则由 $P(t)$ 与 $R(t)$ 的差得到。

特别地, 当 $\varepsilon_2 = 0$ 时, 方程 (117) 式退化回方程 (116) 式的表述形式

$$P(t) = P_\varepsilon [1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]]; \tag{123}$$

考虑 $P_\varepsilon > P_{\max}$ 、 $P_{\max} \rightarrow P_\varepsilon$, 则 P_ε 、 P_{\max} 之间有简单关系方程

$$P_\varepsilon = P_{\max} + \phi; \tag{124}$$

式中 ϕ 为待定常数, $\phi > 0$ 。

由方程 (124) 式, 方程 (123) 式成为

$$P(t) = (P_{\max} + \phi)[1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]]。 \tag{125}$$

由方程 (125) 式, 得

$$R(t) = \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)}; \tag{126}$$

考虑 $P(t)$ 曲线在后期饱和阶段当 $P(t) = P_{\max}$ 时, 因 $R(t)$ 相对 $P(t)$ 的滞后性, 有 $R(t) = P_{\max} - \theta$, 这里 θ 为滞后常数, $\theta \geq 0$, 其具有自然数性质, 一般情况下有 $\theta \approx 0$ 。

方程 (126) 式成为

$$P_{\max} - \theta = \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P_{\max}} = \frac{1}{\varepsilon_1} \ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1];$$

解得常数

$$\varepsilon_1 = \frac{\ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1]}{P_{\max} - \theta}; \tag{127}$$

方程 (126) 式成为

$$R(t) = \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)}; \tag{128}$$

PSSIR 模型方程简略近似解 (121) 式与 (122) 式即分别近似成为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)}, \\ P(t) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}。 \end{cases} \tag{129}$$

与

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)}, \\ P(t) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}。 \end{cases} \tag{130}$$

同时方程 (120) 式参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\lambda} &= \frac{P_{\max} + 1 - (P_{\max} + \phi)[1 - \exp[-\varepsilon_1 R(t)]]}{\varepsilon_1 (P_{\max} + \phi) \exp[-\varepsilon_1 R(t)]} \\ &= \frac{1 - \phi + (P_{\max} + \phi) \exp[-\varepsilon_1 R(t)]}{\varepsilon_1 (P_{\max} + \phi) \exp[-\varepsilon_1 R(t)]}。 \end{aligned} \tag{131}$$

当 $\phi = 1$ 时, 参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 方程 (131) 式成为常量形式

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1 - 1 + (P_{\max} + 1)\exp[-\varepsilon_1 R(t)]}{\varepsilon_1 (P_{\max} + 1)\exp[-\varepsilon_1 R(t)]} = \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[P_{\max} + 1]}; \quad (132)$$

方程 (128) 式成为

$$R(t) = \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P(t)}; \quad (133)$$

PSSIR 模型方程简略近似解 (129) 式与 (130) 式分别成为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P(t)}, \\ P(t) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}. \end{cases} \quad (134)$$

与

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + 1}{P_{\max} + 1 - P(t)}, \\ P(t) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}. \end{cases} \quad (135)$$

一般情况下, 在 $P(t)$ 曲线后期饱和阶段 $R(t)$ 相对 $P(t)$ 的滞后常量 $\theta = 0$, 方程 (128) 式成为

$$R(t) = \frac{P_{\max}}{\ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)}; \quad (136)$$

PSSIR 模型方程简略近似解 (129) 式与 (130) 式则进一步分别简化为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max}}{\ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)}, \\ P(t) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}. \end{cases} \quad (137)$$

与

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max}}{\ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)}, \\ P(t) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}. \end{cases} \quad (138)$$

近似解 (137) 式、(138) 式较为简洁适用, 能够对疫情发展的诸多曲线形态予以趋势性描述。

当待定常数 ϕ 、 θ 分别为 $\phi = 1$ 、 $\theta = 0$ 时, PSSIR 模型方程近似解 (129) 式与 (130) 式即分别直接退化为简单的近似解 (75) 式与 (76) 式形式。

由 PSSIR 模型方程近似解 (129) 式或 (130) 式, 可得

$$I(t) = P(t) - \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1} P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)}; \quad (139)$$

即得

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[P(t) - \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - P(t)} \right] \\ &= \left[1 - \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \frac{1}{P_{\max} + \phi - P(t)} \right] \frac{dP(t)}{dt}; \end{aligned} \quad (140)$$

则有 $I(t)$ 为极大值 $I(t) = I_{\max}$ 时的 $P(I(t) = I_{\max})$ 方程为

$$1 - \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \frac{1}{P_{\max} + \phi - P(I = I_{\max})} = 0;$$

解得

$$P(I = I_{\max}) = P_{\max} + \phi - \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]}; \quad (141)$$

进而由近似解 (129) 式或 (130) 式得 $I(t)$ 为极大值 $I(t) = I_{\max}$ 时 $S(t)$ 及 $R(t)$ 分别为

$$S(I = I_{\max}) = P_{\max} + 1 - \left[P_{\max} + \phi - \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \right] = 1 - \phi + \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]}; \quad (142)$$

$$\begin{aligned} R(I = I_{\max}) &= \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \ln \frac{P_{\max} + \phi}{P_{\max} + \phi - [P_{\max} + \phi - [P_{\max} - \theta][\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]]^{-1}} \\ &= \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \ln \frac{[P_{\max} + \phi] \ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]}{P_{\max} - \theta}; \end{aligned} \quad (143)$$

得 $I(t)$ 极大值估计方程为

$$\begin{aligned} I_{\max} &= P(I = I_{\max}) - R(I = I_{\max}) \\ &= \left[P_{\max} + \phi - \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \right] - \left[\frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \ln \frac{[P_{\max} + \phi] \ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]}{P_{\max} - \theta} \right] \\ &= P_{\max} + \phi - \frac{P_{\max} - \theta}{\ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]} \left[1 + \ln \frac{[P_{\max} + \phi] \ln[\phi^{-1}P_{\max} + 1]}{P_{\max} - \theta} \right]. \end{aligned} \quad (144)$$

当待定常数 ϕ 、 θ 分别为 $\phi = 1$ 、 $\theta = 0$ 时, 方程 (141) 式~ (144) 式即退化为简单的方程 (96) 式~ (99) 式形式。

2.7 PSSIR 模型方程的简略近似解曲线

在 $\theta = 0$ 的情况下, 依据 PSSIR 模型方程一般简略近似解 (137) 式与 (138) 式, 可得其趋势性曲线如图 11、图 12 所示。

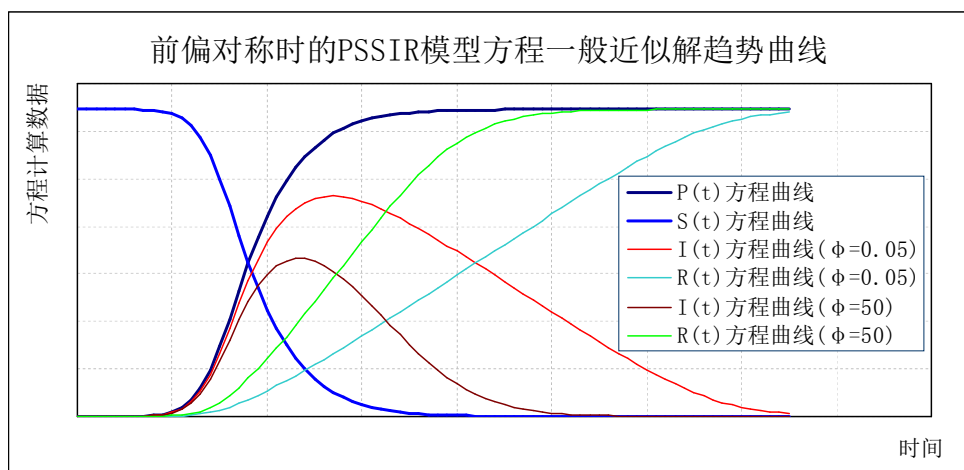


图 11 前偏对称时的 PSSIR 模型方程一般简略近似解趋势曲线 ($\phi = 0.05$ 与 $\phi = 50$)

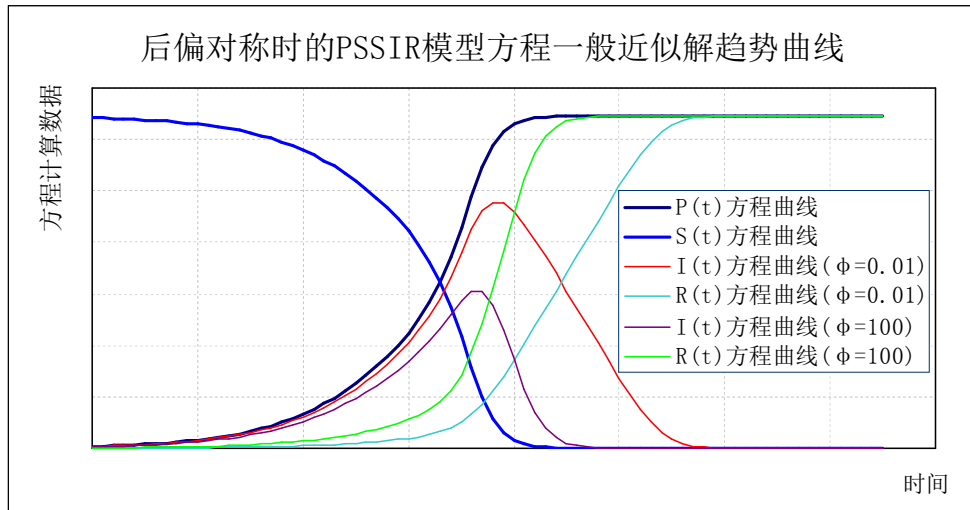


图 12 后偏对称时的 PSSIR 模型方程一般简略近似解趋势曲线 ($\phi = 0.01$ 与 $\phi = 100$)

由 $I(t)$ 极大值估计方程 (144) 式, 得其趋势性曲线如图 13 所示; 其中待定常数 ϕ 的取值分别为 0.01、1、25。

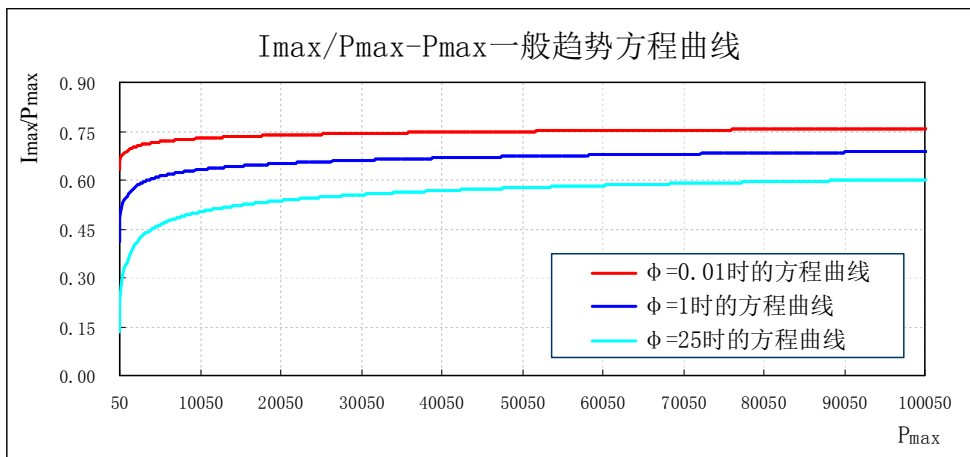


图 13 $I_{\max}/P_{\max} - P_{\max}$ 一般趋势方程曲线 ($P_{\max} \geq 50$)

2.8 滞后函数方法的 PSSIR 模型方程近似解形式及其曲线形态

PSSIR 模型方程形式 (44) 式的特征之一是 $R(t)$ 曲线滞后于 $P(t)$ 曲线; 从数据处理角度分析, 在偏对称方程 $P(t)$ 为已知的情况下, 引入滞后函数 $\tau(t)$, 则有 PSSIR 模型方程 (44) 式在前偏对称方程 (2) 式时的趋势性近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1[t - t_0 - \tau(t)]] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)[t - t_0 - \tau(t)]]}, \\ P(t) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}. \end{cases} \quad (145)$$

在后偏对称方程 (3) 式时的趋势性近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = P_{\max} + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1[t - t_0 - \tau(t)]] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)[t - t_0 - \tau(t)]]}, \\ P(t) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}. \end{cases} \quad (146)$$

引入滞后函数 $\tau(t)$, 在表观上弱化了 PSSIR 模型方程 (44) 式中的微分方程表述, 绕过其非线性方程形式 (48) 式, 由偏对称 $P(t)$ 方程直接计算 $R(t)$ 及 $I(t)$ 。

这里引入滞后函数方法仍是关于 PSSIR 模型方程近似解的趋势性近似计算方法, 是在方程 $P(t)$ 形式为已知、 $R(t)$ 原始基础数据 (或估计数据) 达到 $0.5P_{\max}$ 处情况下的趋势性近似计算分析。

依据方程 $P(t)$ 及 $R(t)$ 数据 (或估计数据) 的具体曲线形态特征, 滞后函数 $\tau(t)$ 可有多种形式; 其中二个参考方程形式为

$$\tau(t) = \sigma_1 \exp[\sigma_2(t - t_{0\tau})]; \quad (147)$$

$$\tau(t) = \sigma_1[1 + \tanh[\sigma_2(t - t_{0\tau})]]; \quad (148)$$

这里 σ_1 、 σ_2 、 $t_{0\tau}$ 为待定系数; 此待定系数可由 $P(t)$ 曲线在平衡点 $t = t_0$ 、 $P(t_0) = 0.5P_{\max}$ 处, $R(t)$ 数据 (或估计数据) 的趋势性纵坐标、横坐标、方程 $R(t)$ 曲线及其原始基础数据在平衡点位置 $t = t_{0R} = t_0 + \tau(t_{0R})$ 、 $R(t_{0R}) = 0.5P_{\max}$ 附近的斜率确定。

其中对于方程 (147) 式, 可转化为

$$\tau(t) = \sigma_1 \exp[\sigma_2(t - t_{0\tau})] = [\sigma_1 \exp(-\sigma_2 t_{0\tau})] \exp(\sigma_2 t) = \zeta_1 \exp(\zeta_2 t); \quad (149)$$

即方程等效为二个待定常数 $\zeta_1 = \sigma_1 \exp(-\sigma_2 t_{0\tau})$ 、 $\zeta_2 = \sigma_2$ 。

在 $R(t)$ 的平衡点位置, 由方程 (149) 式, 有横坐标方程

$$t_{0R} = t_0 + \zeta_1 \exp(\zeta_2 t_{0R}); \quad (150)$$

即得

$$\zeta_1 = [t_{0R} - t_0] \exp(-\zeta_2 t_{0R}). \quad (151)$$

在方程 $P(t)$ 曲线平衡点横坐标 $t = t_0$ 处, 由方程 (149) 式、(151) 式得

$$\tau(t_0) = \zeta_1 \exp(\zeta_2 t_0) = [t_{0R} - t_0] \exp[-\zeta_2(t_{0R} - t_0)] = \delta_{0R} \exp(-\zeta_2 \delta_{0R}); \quad (152)$$

式中 $\delta_{0R} = t_{0R} - t_0$, 为 $P(t)$ 曲线平衡点 $t = t_0$ 与 $R(t)$ 曲线平衡点 $t = t_{0R}$ 之间的时间间距。

依据方程 (145) 式、(1406) 式、(152) 式, 得

$$R(t_0) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[2\alpha_1 \delta_{0R} \exp(-\zeta_2 \delta_{0R})] + (1 - \kappa) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2) \delta_{0R} \exp(-\zeta_2 \delta_{0R})]}; \quad (153)$$

$$R(t_0) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[-2\alpha_1 \delta_{0R} \exp(-\zeta_2 \delta_{0R})] + (1 - \rho) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2) \delta_{0R} \exp(-\zeta_2 \delta_{0R})]}. \quad (154)$$

即可由方程 (153) 式、(154) 式分别迭代计算 ζ_2 值, 然后再将 ζ_2 值分别代入到方程 (151) 式解得 ζ_1 值, 分别得到前偏对称及后偏对称时的滞后函数 (149) 式具体形式。

对于滞后函数 (148) 式, 在方程 $P(t)$ 曲线平衡点 $t = t_0$ 的横坐标位置, 有

$$\tau(t_0) = \sigma_1[1 + \tanh[\sigma_2(t_0 - t_{0\tau})]]; \quad (155)$$

则依据方程 (145) 式、(146) 式, 有

$$R(t_0) = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[2\alpha_1 \sigma_1[1 + \tanh[\sigma_2(t_0 - t_{0\tau})]]] + (1 - \kappa) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2) \sigma_1[1 + \tanh[\sigma_2(t_0 - t_{0\tau})]]]}; \quad (156)$$

$$R(t_0) = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[-2\alpha_1 \sigma_1[1 + \tanh[\sigma_2(t_0 - t_{0\tau})]]] + (1 - \rho) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2) \sigma_1[1 + \tanh[\sigma_2(t_0 - t_{0\tau})]]]}. \quad (157)$$

依据滞后函数 (148) 式, 在方程 $R(t)$ 的平衡点 $t = t_{0R}$ 处有横坐标方程

$$t_{0R} = t_0 + \sigma_1[1 + \tanh[\sigma_2(t_{0R} - t_{0\tau})]]; \quad (158)$$

同时依据方程 (145) 式、(146) 式, $R(t)$ 方程在平衡点 $t = t_{0R}$ 处附近区域近似有

$$\begin{aligned} R(t) &\approx \frac{P_{\max}}{1 + \kappa[1 - 2\alpha_1[t - t_0 - \tau(t)]] + (1 - \kappa)[1 - (\alpha_1 + \alpha_2)[t - t_0 - \tau(t)]]} \\ &\approx 0.5P_{\max}[1 + 0.5[(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2][t - t_0 - \tau(t)]]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(t) &\approx P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho[1 + 2\alpha_1[t - t_0 - \tau(t)]] + (1 - \rho)[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)[t - t_0 - \tau(t)]]} \\ &\approx 0.5P_{\max}[1 + 0.5[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2][t - t_0 - \tau(t)]]; \end{aligned}$$

则分别有

$$\frac{dR(t)}{dt} = 0.25P_{\max} [(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2][1 - \sigma_1\sigma_2 \cosh^{-2}[\sigma_2(t - t_{0r})]]; \quad (159)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = 0.25P_{\max} [(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2][1 - \sigma_1\sigma_2 \cosh^{-2}[\sigma_2(t - t_{0r})]]. \quad (160)$$

当 $R(t)$ 基础数据在平衡点 $t = t_{0R}$ 处附近区域的斜率为 ξ_R 时, 则方程 (159) 式、(160) 式分别成为

$$0.25P_{\max} [(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2][1 - \sigma_1\sigma_2 \cosh^{-2}[\sigma_2(t_{0R} - t_{0r})]] = \xi_R; \quad (161)$$

$$0.25P_{\max} [(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2][1 - \sigma_1\sigma_2 \cosh^{-2}[\sigma_2(t_{0R} - t_{0r})]] = \xi_R. \quad (162)$$

由方程 (156) 式、(158) 式、(161) 式, 可迭代解出前偏对称时的 σ_1 、 σ_2 , t_{0r} ; 由方程 (157) 式、(158) 式、(162) 式, 可迭代解出后偏对称时的 σ_1 、 σ_2 , t_{0r} 。

对于滞后函数 (148) 式中的待定常数, 上述求解过程显然过于复杂。

较为简略的求解途径是, 可先取函数 (148) 式中 $t_{0r} \approx t_0$, 在简洁求得 σ_1 、 σ_2 后, 然后根据具体基础数据曲线形态特征, 适当细调 σ_1 、 σ_2 、 t_{0r} , 最后近似确定滞后函数 (148) 式具体形式。

取滞后函数 (148) 式中的 $t_{0r} \approx t_0$, 有

$$\tau(t) \approx \sigma_1[1 + \tanh[\sigma_2(t - t_0)]]; \quad (163)$$

则对于滞后函数 (163) 式, 在方程 $P(t)$ 曲线平衡点 $t = t_0$ 的横坐标位置, 有

$$\tau(t_0) \approx \sigma_1; \quad (164)$$

依据近似解 (145) 式、(146) 式, 其 $R(t_0)$ 方程分别为

$$R(t_0) \approx \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[2\alpha_1\sigma_1] + (1 - \kappa) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)\sigma_1]}; \quad (165)$$

$$R(t_0) \approx P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[-2\alpha_1\sigma_1] + (1 - \rho) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)\sigma_1]}; \quad (166)$$

即可由方程 (165) 式、(166) 式分别迭代计算 σ_1 的近似值。

当 $R(t)$ 基础数据 (或估计数据) 达到 $0.5P_{\max}$ 处的时间为 t_{0R} 时, 依据近似解 (145) 式、(146) 式, 皆有平衡点处方程

$$R(t = t_{0R}) = R(t_{0R} = t_0 + \tau(t_{0R})) = 0.5P_{\max};$$

即有横坐标方程

$$\tau(t_{0R}) = t_{0R} - t_0; \quad (167)$$

这里 $t_{0R} - t_0$ 为方程 $R(t)$ 曲线在平衡点 $R(t_{0R}) = 0.5P_{\max}$ 处与方程 $P(t)$ 曲线在平衡点 $P(t_0) = 0.5P_{\max}$ 之间的横坐标间距; 取此间距 $\tau(t_{0R}) = t_{0R} - t_0 = t_{\Delta}$, 则由方程 (163) 式得

$$t_{\Delta} \approx \sigma_1[1 + \tanh(\sigma_2 t_{\Delta})]; \quad (168)$$

即由方程 (168) 式得

$$t_{\Delta} \approx \sigma_1[1 + \tanh(\sigma_2 t_{\Delta})] = \frac{2\sigma_1 \exp(\sigma_2 t_{\Delta})}{\exp(\sigma_2 t_{\Delta}) + \exp(-\sigma_2 t_{\Delta})} = \frac{2\sigma_1}{1 + \exp(-2\sigma_2 t_{\Delta})};$$

解得 σ_2 的近似值

$$\sigma_2 \approx \frac{1}{2t_{\Delta}} \ln \frac{t_{\Delta}}{2\sigma_1 - t_{\Delta}}. \quad (169)$$

将初步确定的待定常数 σ_1 、 σ_2 、 t_{0r} 根据具体基础数据曲线形态予以适当细调, 最终给出滞后函数 (148) 式的近似形式。

其中应用滞后函数 (148) 式, 近似地取 $t_{0r} \approx t_0$, 相应地得 PSSIR 模型方程近似解 (145) 式、(146) 式的趋势性曲线如图 14 (σ_1 、 σ_2 分别取比例系数 3.0、0.1, 6.0、0.1)、图 15 (σ_1 、 σ_2 分别取比例系数 5.0、0.01, 10.0、0.01) 所示。

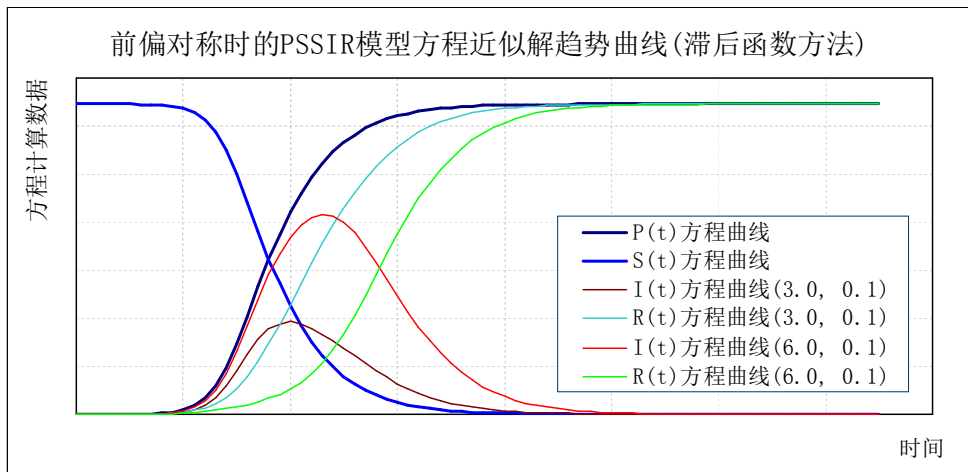


图 14 前偏对称时的 PSSIR 模型方程近似解趋势曲线(滞后函数方法)

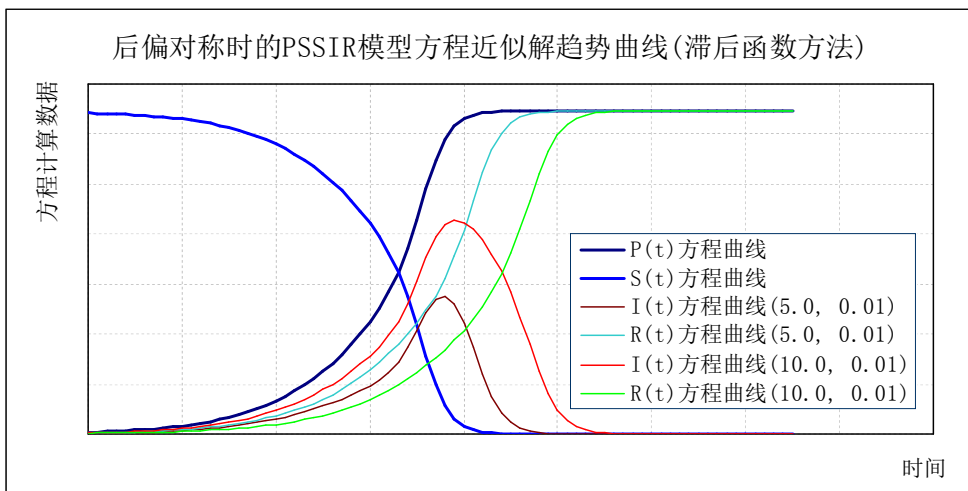


图 15 后偏对称时的 PSSIR 模型方程近似解趋势曲线(滞后函数方法)

上述近似解主要用于在累计病例数据已经过拐点位置,对 PSSIR 模型方程予以趋势性描述。在这个阶段的数据分析讨论,对现有疫情发展过程意义已经降低,仅为将发生的疫情发展过程提供一定程度的参考;而且, PSSIR 模型方程的小样本数据量及近似解中待定常数过多亦是显著不足之处。在已知方程 $P(t)$ 的具体形式时,近似解 (75)、(76) 二式主要用于 $R(t)$ 基础数据欠缺情况下的初步求解;近似解 (137)、(138) 二式主要可用于 $R(t)$ 基础数据经过拐点位置情况下的趋势性求解;近似解 (145)、(146) 二式主要可用于 $R(t)$ 基础数据较为翔实情况下的近似求解。

病毒爆发传播感染人群的演化过程十分复杂,期间相关人员的流动、医疗机构的动态介入、政府的强制干预、地区与国家间的合作配合与互动援助等,都会参与疫情的发展过程;故此,将疫情演化过程的部分变量用一组动力学方程描述,仅是一种理想的趋势性探索。诸如将 PSSIR 模型方程中参量比设置为常数时,由于过于理想简单,使得方程近似解与实际数据容易存在明显偏差;而将参量比取为变量时,需要确认附加方程介入,使得模型方程复杂且难以求解。

在动力学上,如果 λ 、 μ 、 $\mu\lambda^{-1}$ 皆为变量,则 PSSIR 模型方程即需要在机理方向进一步解析展开。上述由偏对称方程 $P(t)$ 表述的 PSSIR 模型方程亦仅是在小样本数据量时理想简单情况下的趋势性计算分析,其描述的准确性有待实际疫情演化数据予以过程检验及补充完善。

进一步的研究还需考虑每日新增确诊病例数据曲线的准周期波动;简洁近似地,当考虑波动周期在 3 天~8 天时,则可简单取波动周期 T 为近似整周期常量 7 天、及二倍频周期常量 3.5 天,即 $T_w \approx 7.0\text{days}$; $T_{FD} = 0.5T_w \approx 3.5\text{days}$ 。

$$(170)$$

不同国家、不同城市,对于相同或不不同的病毒感染过程,应有内在可以探索的演化规律,或可参照借鉴的模式;但疫情发展整体上是多因素反馈作用的动态过程,用一套动力学方程及其相关参数,亦仅能给出趋势层面的近似描述。

毫无疑问,模型方程是重要的;但理想化的模型方程仅是描述疫情演化过程的一个较有意义的框架参考。模型方程宜具有开放的属性,但完全动态可调整亦降低其应有的指导意义。在严格深刻且普遍关联的意义上,数理方程具有所描述过程的部分演化方向禀性,即方程具有方向性,方程的推演具有最优的延展轨迹;精准的方程不能保证逆向推演的准确,恰当的运算是保持适度的偏差。

3 SARS 病毒感染累计病例数据的 PSSIR 模型方程趋势性近似解形式

基于图 1 所示的北京与香港这二个城市在 2003 年 SARS 病毒感染累计病例人数基础数据的曲线形态特征, 依据前偏对称或欠对称方程 (2) 式, 简单地皆取 $\kappa = 0.7$, 则得其趋势性描述方程分别为

$$P_{\text{FBJ}} = \frac{2496}{1 + 0.7 \exp[-0.172(t - 53.3)] + 0.3 \exp[-0.206(t - 53.3)]}, \quad (171)$$

$$P_{\text{FHK}} = \frac{1808}{1 + 0.7 \exp[-0.10(t - 32.3)] + 0.3 \exp[-0.14(t - 32.3)]}; \quad (172)$$

式中 P_{FBJ} 、 P_{FHK} 分别为北京、香港 SARS 病毒确诊累计感染病例计算参量, t 是以 2003 年 3 月 7 日作为第 1 天的天数; 这里在方程 (171) 式中 t 从 34 (即 4 月 9 日) 开始计算, 在方程 (172) 式中 t 从 6 (即 3 月 12 日) 开始计算; 方程在延展计算时, t 可以是正的天数, 也可以是 0 或负的天数; 二城市每日新增确诊病例数据曲线的波动周期近似为 $T_{\text{FD}} = 0.5T_{\text{W}} \approx 3.5 \text{ days}$ 。

P_{FBJ} 、 P_{FHK} 曲线的拐点日期分别为 2003 年 4 月 28 日、2003 年 4 月 7 日, 极限值 (或饱和值) 分别为

$$P_{\text{BJmax}} = 2496;$$

$$P_{\text{HKmax}} = 1808。$$

方程 (171)、(172) 二式还可以近似简化为最简洁的双曲正切函数方程 (13) 式的形式

$$P_{\text{BJ}} = 1248 + 1248 \tanh[0.093(t - 53.3)]; \quad (173)$$

$$P_{\text{HK}} = 904 + 904 \tanh[0.054(t - 32.3)]. \quad (174)$$

由前偏对称方程 (171)、(172) 二式及导数方程 (4) 式, 可得北京及香港二城市在 2003 年 SARS 病毒确诊感染累计病例近似计算的趋势性曲线及其方程导数计算数据曲线如图 16 所示。

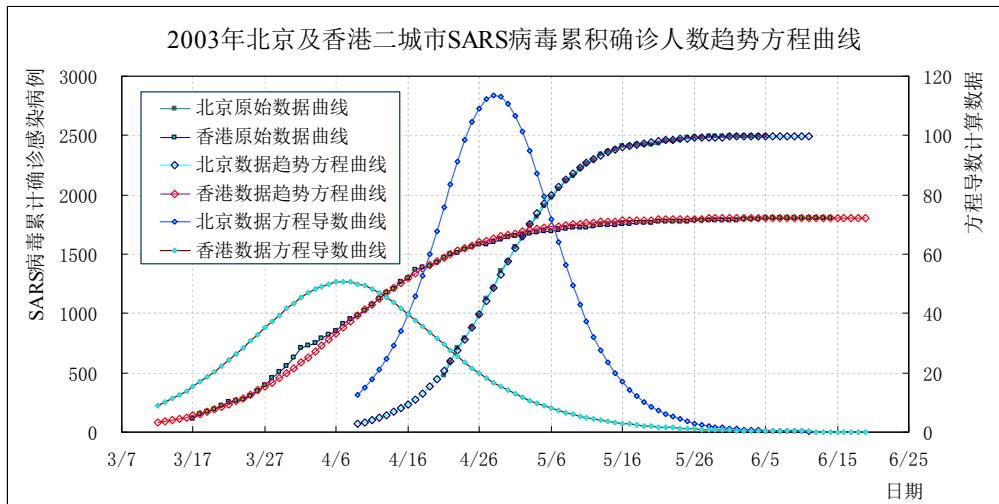


图 16 2003 年北京及香港二城市 SARS 病毒确诊感染累计病例数据的趋势方程曲线

由偏对称方程具体形式 (171)、(172) 二式及 PSSIR 模型方程的趋势性近似解 (75) 式, 可得北京与香港二城市在 2003 年 SARS 病毒感染病例计算数据的 PSSIR 模型方程近似解形式分别为

$$\begin{cases} S(t) = 2496 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{2496}{\ln[2496 + 1]} \ln \frac{2496 + 1}{2496 + 1 - P(t)}; \\ P(t) = \frac{2496}{1 + 0.7 \exp[-0.172(t - 53.3)] + 0.3 \exp[-0.206(t - 53.3)]}. \end{cases} \quad (175)$$

$$\begin{cases} S(t) = 1808 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{1808}{\ln[1808 + 1]} \ln \frac{1808 + 1}{1808 + 1 - P(t)}; \\ P(t) = \frac{1808}{1 + 0.7 \exp[-0.10(t - 32.3)] + 0.3 \exp[-0.14(t - 32.3)]}. \end{cases} \quad (176)$$

二近似解 (175) 式、(176) 式的趋势性曲线形态特征分别如图 17、图 18 所示。

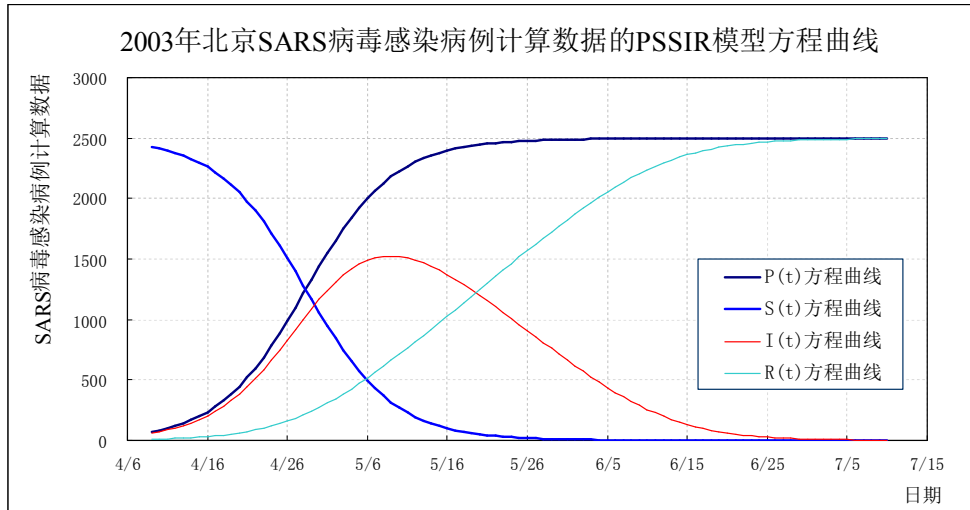


图 17 2003 年北京 SARS 病毒感染病例计算数据的 PSSIR 模型方程趋势曲线

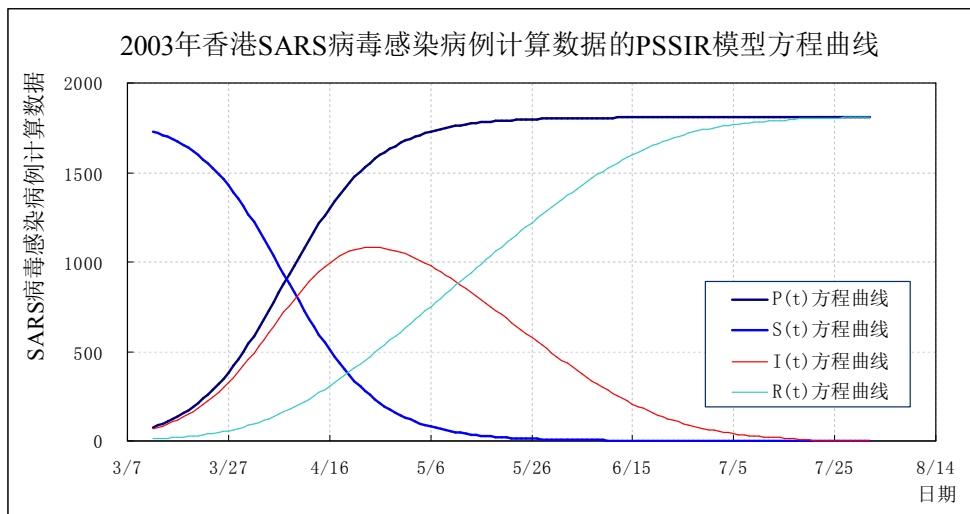


图 18 2003 年香港 SARS 病毒感染病例计算数据的 PSSIR 模型方程趋势曲线

当以北京及香港二城市 SARS 病毒感染病例累计住院数据^[2]作为 $I(t)$ 的比对参考值时, 图 17 中 $I(t)$ 最大值 1521 与实际数据最大值 1967 比较, 相对误差为 -22.7%; 图 18 中 $I(t)$ 最大值 1082 与实际数据的最大值 961 比较, 相对误差为 12.6%; 表明在 PSSIR 模型方程近似解中, 将参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 取为在 $P(t)$ 曲线后期饱和阶段的简单常量形式, 对于疫情演化过程仅是趋势性的近似描述。

其中对于北京的 SARS 病毒感染病例累计数据曲线特征, 简单地根据 PSSIR 模型方程趋势性近似解 (137) 式, 在待定常数 $\phi = 0.05$ 时, 可得相应的具体近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = 2496 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{2496}{\ln[2496/0.05 + 1]} \ln \frac{2496 + 0.05}{2496 + 0.05 - P(t)}; \\ P(t) = \frac{2496}{1 + 0.7 \exp[-0.172(t - 53.3)] + 0.3 \exp[-0.206(t - 53.3)]}. \end{cases} \quad (177)$$

近似解 (177) 式的趋势性曲线形态特征如图 19 所示; 图中的 $I(t)$ 最大值为 1716, 较实际基础数据 1967 仍有很大偏差。

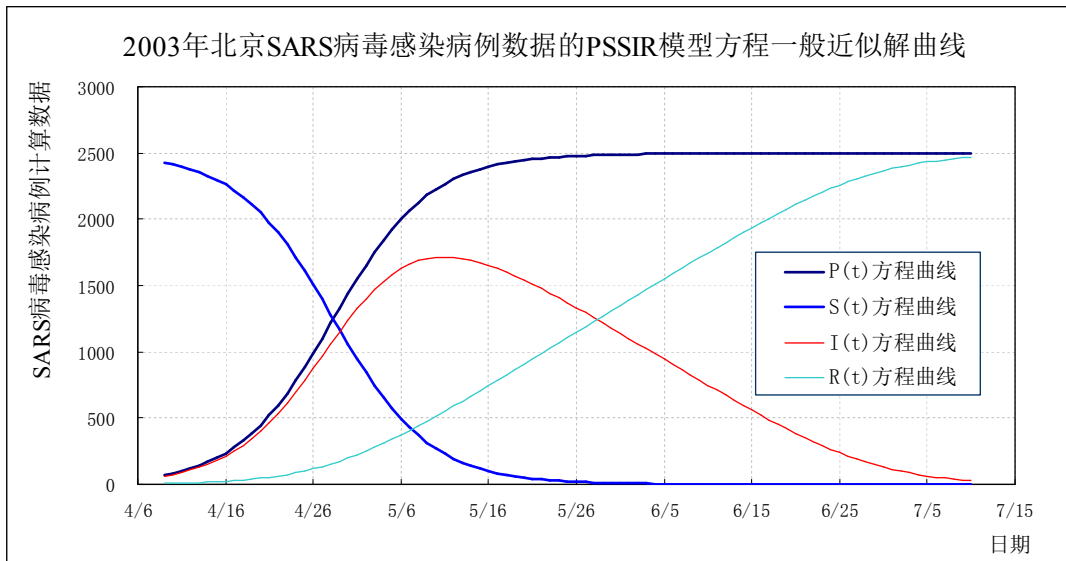


图 19 2003 年北京 SARS 病毒感染病例数据的 PSSIR 模型方程一般近似解趋势曲线 ($\phi = 0.05$)

对于香港的 SARS 病毒感染病例累计数据曲线特征, 根据 PSSIR 模型方程趋势性近似解 (137) 式, 在待定常数 $\phi = 5$ 时, 可得相应的具体近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = 1808 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{1808}{\ln[1808/5 + 1]} \ln \frac{1808 + 5}{1808 + 5 - P(t)}; \\ P(t) = \frac{1808}{1 + 0.7 \exp[-0.10(t - 32.3)] + 0.3 \exp[-0.14(t - 32.3)]}. \end{cases} \quad (178)$$

近似解 (178) 式的趋势性曲线形态特征如图 20 所示; 图中的 $I(t)$ 最大值为 961, 等于实际基础数据 961。

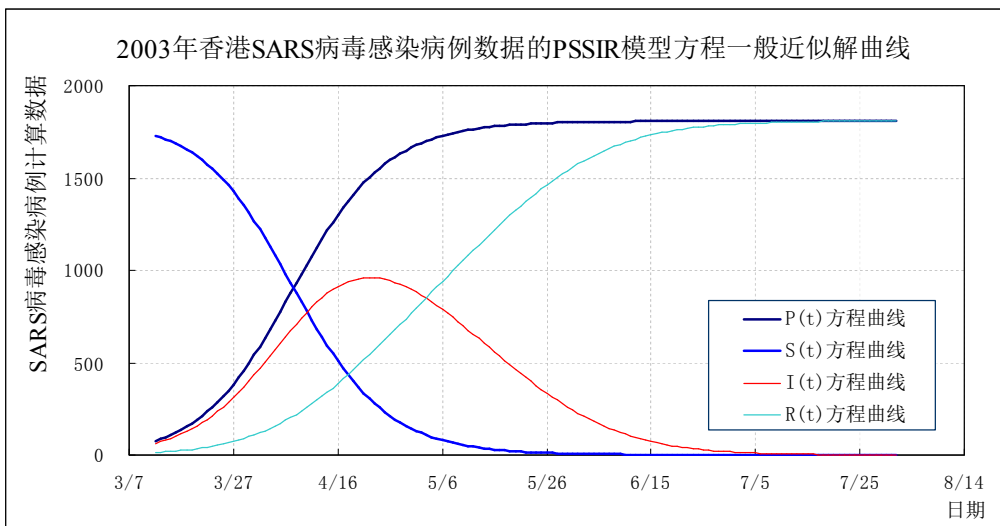


图 20 2003 年香港 SARS 病毒感染病例数据的 PSSIR 模型方程一般近似解趋势曲线 ($\phi = 5$)

在 PSSIR 模型方程近似解 (129) 式及 (130) 式中, 可根据具体疫情演化数据适当调整待定常数 ϕ 、 θ , 相应地改变 $R(t)$ 与 $I(t)$ 方程的曲线形态, 以得到与实际数据曲线尽可能符合的参数。对于北京的 SARS 病毒感染病例累计数据曲线特征, 应用滞后函数 (148) 式, 其具体形式为 $\tau(t) = 18.7[1 + \tanh[0.035(t - 59.0)]]$; (179)

PSSIR 模型方程近似解 (145) 式的具体近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = 2496 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{2496}{1 + 0.7 \exp[-0.172[t - 53.3 - \tau(t)]] + 0.3 \exp[-0.206[t - 53.3 - \tau(t)]]}; \\ P(t) = \frac{2496}{1 + 0.7 \exp[-0.172(t - 53.3)] + 0.3 \exp[-0.206(t - 53.3)]} \end{cases}; \quad (180)$$

近似解 (180) 式的趋势性曲线形态特征如图 21 所示; 图中的 $I(t)$ 最大值为 1973, 接近于实际基础数据 1967。

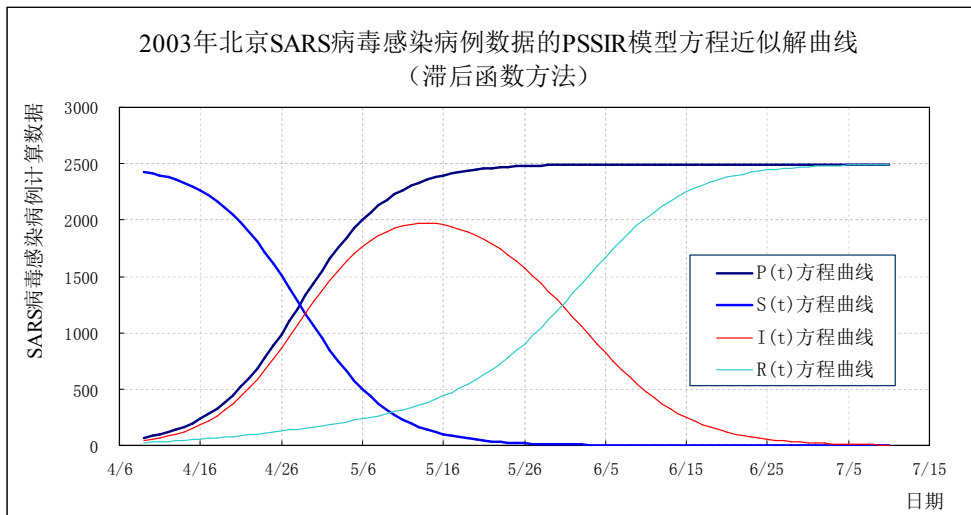


图 21 2003 年北京 SARS 病毒感染病例数据的 PSSIR 模型方程近似解趋势曲线(滞后函数方法)

对于香港的 SARS 病毒感染病例累计数据曲线, 简单地应用滞后函数 (163) 式, 具体形式为 $\tau(t) = 19.4[1 + \tanh[0.008(t - 32.3)]]$; (181)

PSSIR 模型方程近似解 (145) 式的具体近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = 1808 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{1808}{1 + 0.7 \exp[-0.10[t - 32.3 - \tau(t)]] + 0.3 \exp[-0.14[t - 32.3 - \tau(t)]]}; \\ P(t) = \frac{1808}{1 + 0.7 \exp[-0.10(t - 32.3)] + 0.3 \exp[-0.14(t - 32.3)]} \end{cases}. \quad (182)$$

近似解 (182) 式的趋势性曲线形态特征如图 22 所示; 图中 $I(t)$ 最大值为 960, 接近于基础数据 961。

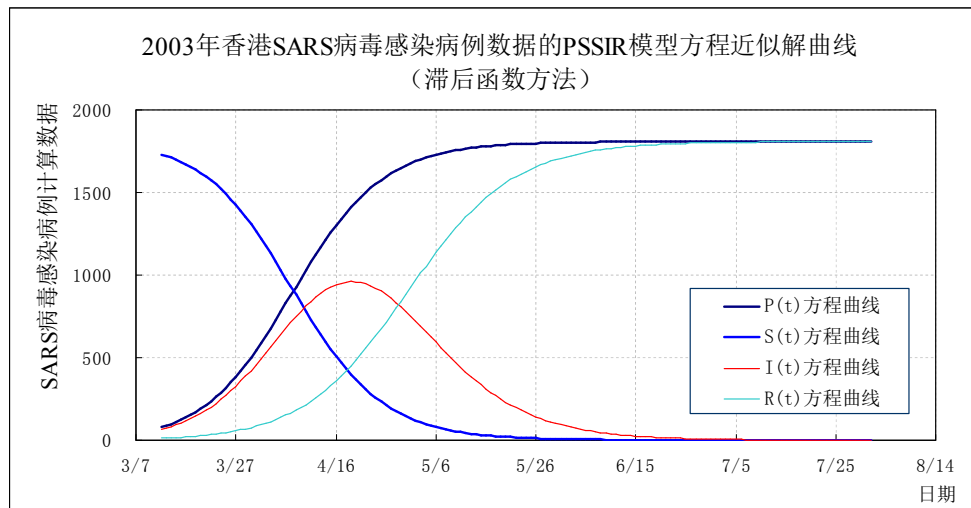


图 22 2003 年香港 SARS 病毒感染病例数据的 PSSIR 模型方程近似解趋势曲线(滞后函数方法)

4 全国新型冠状病毒感染累计病例数据的 PSSIR 模型方程趋势性近似解形式 (未含湖北省临床诊断数据)

基于在 2020 年 1 月 11 日~2 月 11 日之间中国境内新型冠状病毒确诊感染病例人数数据资料^[3], 可得其累计感染确诊病例人数(累计报告确诊病例人数)曲线及每日新增确诊感染人数曲线如图 23 所示。

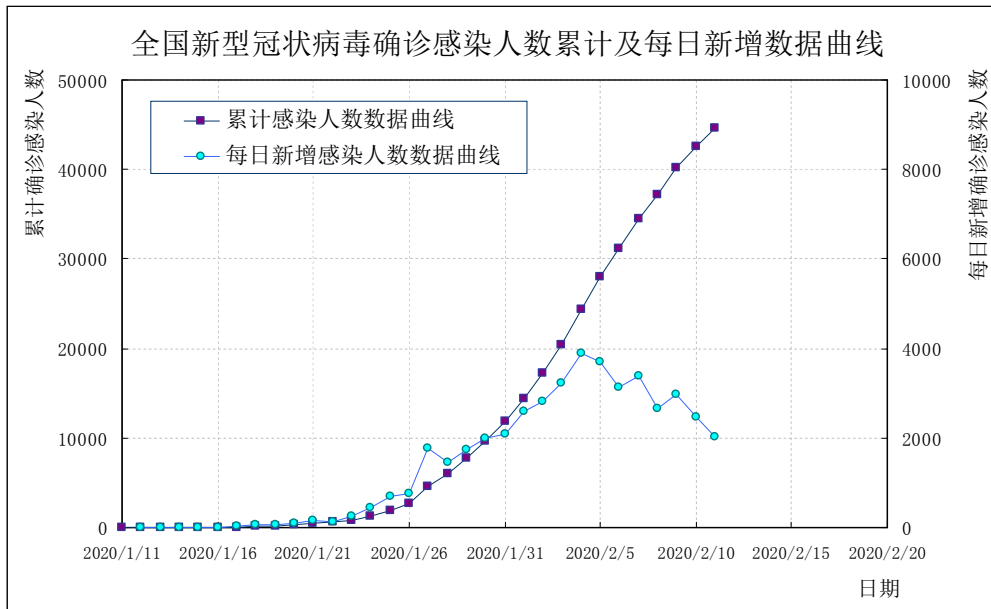


图 23 新型冠状病毒确诊感染累计及每日新增人数数据曲线

从图 23 初步可见此次新型冠状病毒疫情累计感染病例人数数据曲线拐点出现在 2020 年 2 月 3 日~7 日附近区域。

下面依据方程(2)式、(14)式、每日新增数据计算方程(21)式、导数方程(4)式、以及 PSSIR 模型方程趋势性近似解(75)式, 给出中国境内在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间新型冠状病毒感染确诊累计病例数据的拟合方程具体形式及曲线特征, 并做出相应的趋势预测探讨, 为进一步的多因素、多变量非线性动力学方程分析研究提供参考。

其中, 从 2020 年 2 月 12 日起, 湖北省将临床诊断病例数据 13332 计入湖北省累计确诊病例数据, 同时也开始计入全国累计确诊感染人数, 数据中附有湖北省临床诊断病例数据单列说明; 从 2 月 16 日起, 湖北省新增确诊病例数据中仍包含临床诊断病例数据, 但再未见临床诊断病例数据的单列说明^[3]。

基于中国境内在 2020 年 1 月 11 日~2 月 15 日之间新型冠状病毒感染确诊累计病例数据, 依据前偏对称方程(2)式, 简单地取 $\kappa = 0.6$, 可给出病毒感染累计确诊病例参量 P 的趋势方程为

$$P_{FUS} = \frac{56028}{1 + 0.6 \exp[-0.22(t - 27.2)] + 0.4 \exp[-0.30(t - 27.2)]}, \quad (183)$$

式中 t 是以 2020 年 1 月 10 日为第 1 天的天数(即 $t = 1$), 与原始数据对比计算起始日期为 2020 年 1 月 11 日(即 $t = 2$); 在向 2020 年 1 月 10 日之前日期或时间进行延展运算时 t 可取相应的 0 值或负数值。

方程(183)式曲线的拐点日期为 2020 年 2 月 5 日, 预测计算的病毒感染确诊累计病例阶段性极限值(或饱和值) P_{max} 为

$$P_{max} = 56028. \quad (184)$$

方程(183)式可近似地化简为简略双曲正切函数(13)式形式

$$P = 28014 + 28014 \tanh[0.122(t - 27.2)]. \quad (185)$$

由方程(183)、(21)式及(4)式, 可给出中国境内新型冠状病毒确诊感染每日新增确诊感染人数计算数据及导数方程计算数据的趋势性曲线如图 24 所示; 此计算中未包括湖北省临床诊断病例数据。

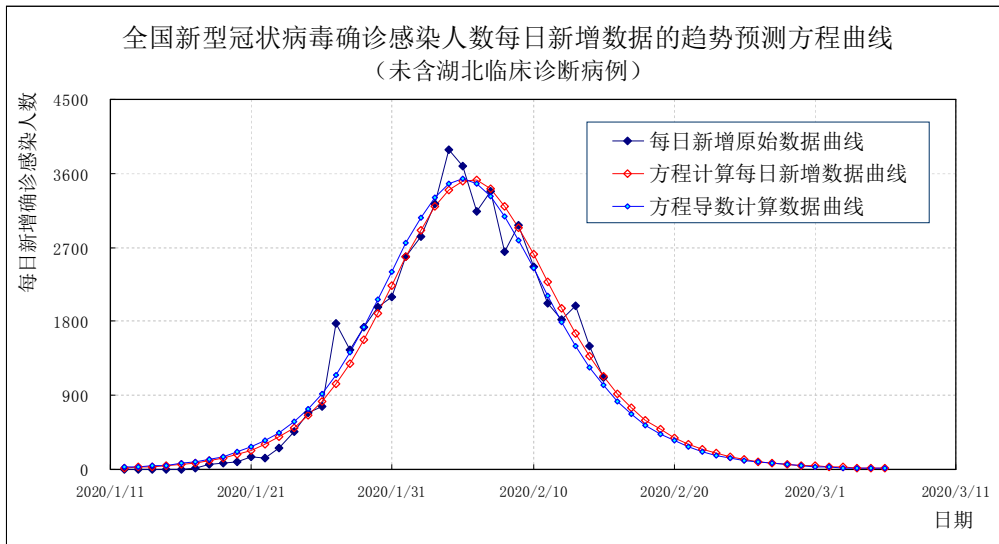


图 24 全国新型冠状病毒每日新增确诊感染病例的趋势预测方程曲线 (未含湖北临床诊断病例)

由方程 (183) 式, 可得数据到达 $90\% P_{\max}$ 、 $95\% P_{\max}$ 、 $99\% P_{\max}$ 值的日期分别为 2020 年 2 月 15 日、2 月 18 日、2 月 25 日。

因从 2020 年 2 月 16 日起, 湖北省新增确诊病例数据中再未见其所包含的该省临床诊断病例单列数据说明, 故此预测方程 (183) 式与病毒感染累计报告病例数据的对比区间取为 2020 年 1 月 11 日~2 月 15 日。

依据 PSSIR 模型方程趋势性近似解 (75) 式及偏对称方程 (183) 式, 得中国境内新型冠状病毒确诊感染病例数据 (未包括湖北省临床诊断病例数据) 的 PSSIR 模型方程趋势性近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = 56028 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{56028}{\ln[56028 + 1]} \ln \frac{56028 + 1}{56028 + 1 - P(t)} ; \\ P(t) = \frac{56028}{1 + 0.6 \exp[-0.22(t - 27.2)] + 0.4 \exp[-0.30(t - 27.2)]} \end{cases} \quad (186)$$

近似解 (186) 式的趋势性曲线形态特征如图 25 所示。

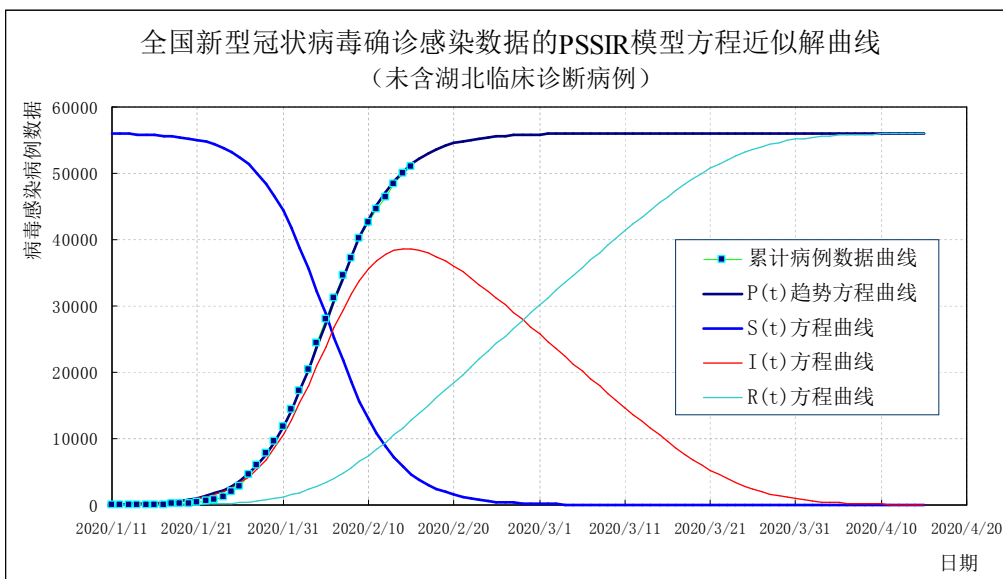


图 25 全国新型冠状病毒确诊感染病例数据的 PSSIR 模型方程近似解曲线 (未含湖北临床诊断病例)

5 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒感染病例数据的 PSSIR 模型方程趋势性近似解形式

对中国境内除湖北省以外地区在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间的新型冠状病毒感染确诊累计病例人数数据特征予以分析, 依据前偏对称或欠对称方程 (2) 式, 简单地取 $\kappa = 0.8$, 得其一具体的趋势性预测方程为

$$P_{\text{FUS}} = \frac{12914}{1 + 0.8 \exp[-0.219(t - 24.6)] + 0.2 \exp[-0.419(t - 24.6)]}, \quad (187)$$

式中 t 同方程 (183) 式。

方程 (187) 式曲线的拐点日期为 2020 年 2 月 2 日, 预测计算的累计感染确诊病例阶段性极限值 (或饱和值) P_{max} 为

$$P_{\text{max}} = 12914. \quad (188)$$

方程 (187) 式可近似简化为经典的双曲正切函数方程 (13) 式形式

$$P = 6457 + 6457 \tanh[0.120(t - 24.6)]. \quad (189)$$

由方程 (187) 式、(21) 式及 (4) 式, 可给出中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染每日新增确诊感染人数计算数据及导数方程计算数据的趋势性曲线如图 26 所示。

由方程 (187) 式计算, 可得到达 $90\% P_{\text{max}}$ 、 $95\% P_{\text{max}}$ 、 $99\% P_{\text{max}}$ 值的日期分别为 2020 年 2 月 12 日、2 月 15 日、2 月 22 日。

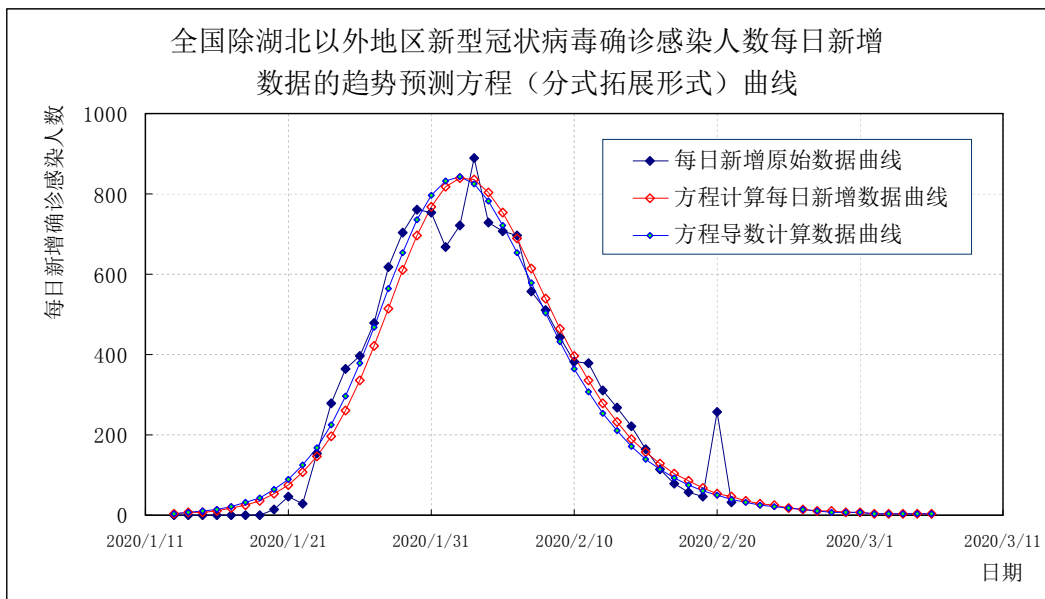


图 26 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒每日新增确诊感染人数的预测方程(分式拓展形式)曲线

在 PSSIR 模型方程中参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为常量时的理想简单情况下, 依据其趋势性近似解 (75) 式及偏对称方程 (187) 式, 得中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染病例数据的 PSSIR 模型方程具体趋势性近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = 12914 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{12914}{\ln[12914 + 1]} \ln \frac{12914 + 1}{12914 + 1 - P(t)}; \\ P(t) = \frac{12914}{1 + 0.8 \exp[-0.219(t - 24.6)] + 0.2 \exp[-0.419(t - 24.6)]}. \end{cases} \quad (190)$$

近似解 (190) 式的趋势性曲线形态特征如图 27 所示。

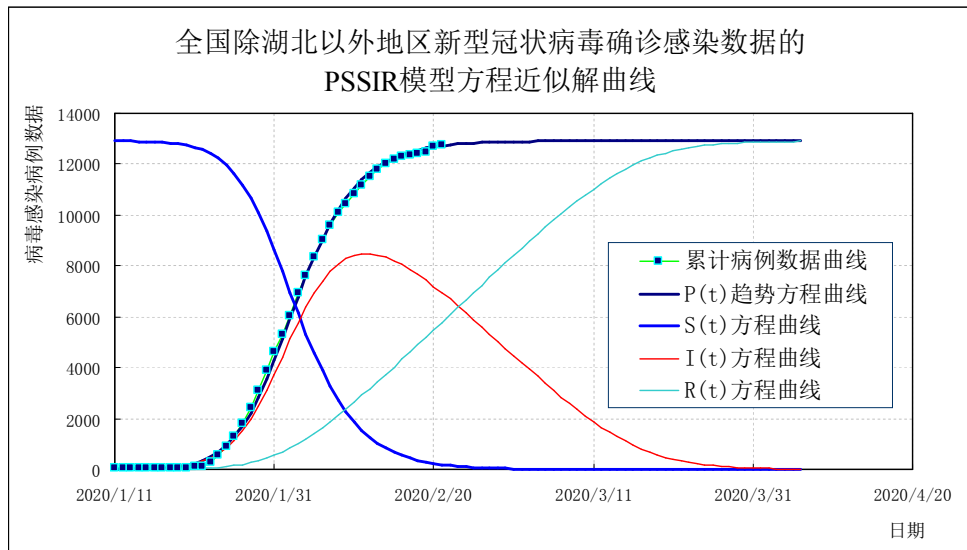


图 27 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染数据的 PSSIR 模型方程近似解趋势预测方程(分式拓展形式)曲线

依据级数方程 (17) 式的形式, 对于图 22、图 23 所示的病毒感染数据曲线偏对称或欠对称特征, 简单地取 $\gamma = 0.4$, 则得中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染累计病例参量 P 的一具体形式近似为

$$P_{SER} = 6457[1 + 0.4 \tanh[0.21(t - 21.2)] + 0.6 \tanh[0.122(t - 27.5)]], \quad (191)$$

方程 (191) 式中 t 同方程 (183) 式。

方程 (191) 式曲线的拐点日期为 2020 年 1 月 31 日, 预测计算的新型冠状病毒累计感染确诊病例人数阶段性极限值 (或饱和值) P_{max} 仍为 $P_{max} = 2P_0 = 12914$ 。

由方程 (191) 式、(21) 式及 (20) 式, 可给出中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染每日新增确诊感染人数计算数据及导数方程计算数据的趋势性曲线如图 28 所示。

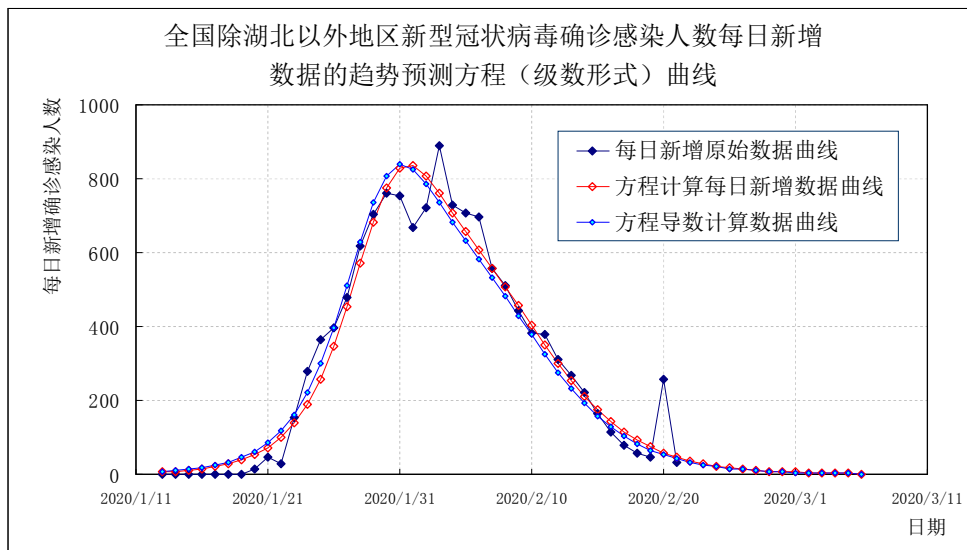


图 28 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒每日新增确诊感染人数的趋势预测方程(级数形式)曲线

依据 PSSIR 模型方程近似解 (75) 式 (或 (76) 式) 及偏对称方程 (191) 式, 得中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染病例数据的 PSSIR 模型方程具体趋势性近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = 12914 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{12914}{\ln[12914 + 1]} \ln \frac{12914 + 1}{12914 + 1 - P(t)}; \\ P(t) = 6457[1 + 0.4 \tanh[0.21(t - 21.2)] + 0.6 \tanh[0.122(t - 27.5)]] \end{cases} \quad (192)$$

近似解 (192) 式的趋势性曲线形态特征如图 29 所示。

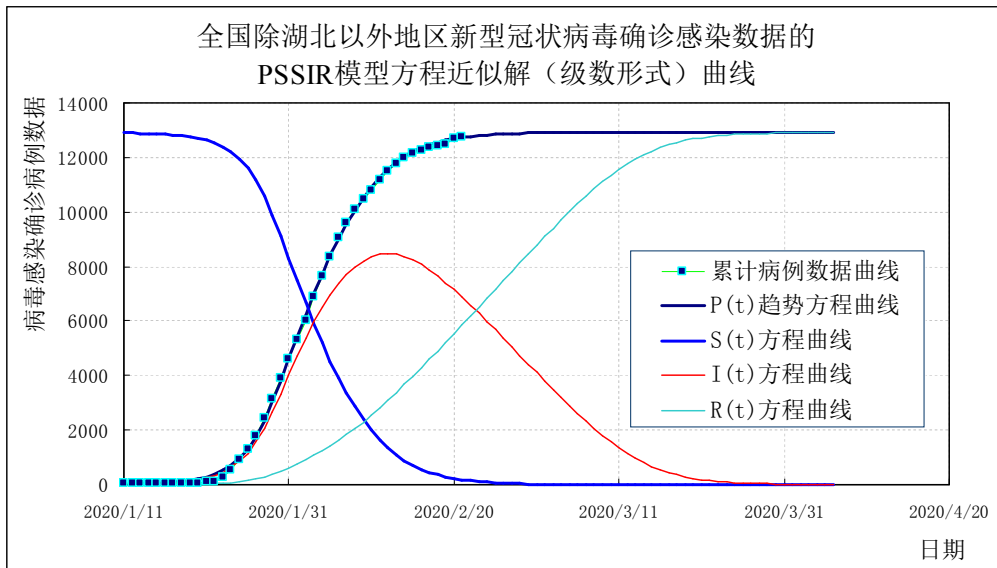


图 29 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染数据的 PSSIR 模型方程近似解(级数形式)曲线

6 全国新型冠状病毒感染病例数据的 PSSIR 模型方程趋势性近似解形式
(包含对湖北省临床诊断数据的前推部分)

对中国境内在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间的新型冠状病毒感染确诊累计数据特征予以分析, 在包含湖北省从 2 月 12 日起将每日临床诊断病例数据加进累计确诊感染数据中的情况下, 依据方程 (2) 式, 简单地取 $\kappa = 0.7$, 得病毒感染确诊累计病例数参量 P 的趋势预测方程为

$$P_{FUS} = \frac{81006}{1 + 0.7 \exp[-0.192(t - 28.7)] + 0.3 \exp[-0.236(t - 28.7)]}, \quad (193)$$

式中 t 同方程 (183) 式。

方程 (193) 式曲线的拐点日期在 2020 年 2 月 6 日~7 日之间, 预测计算的病毒感染确诊累计病例阶段性极限值 (或饱和值) P_{max} 为

$$P_{max} = 2P_0 = 81006. \quad (194)$$

方程 (193) 式可近似简化为经典的双曲正切函数方程 (13) 式的具体形式

$$P = 40503 + 40503 \tanh[0.10(t - 28.7)]. \quad (195)$$

依据方程 (193) 式、(21) 式及 (4) 式, 可给出中国境内新型冠状病毒确诊感染病例每日新增确诊感染人数计算数据及导数方程计算数据的趋势性曲线如图 30 所示。

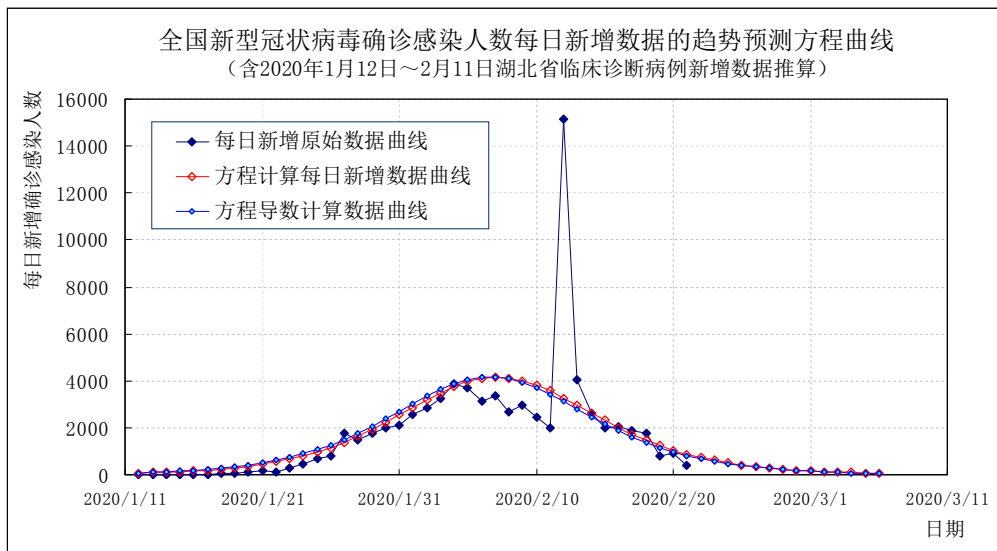


图 30 全国新型冠状病毒每日新增确诊感染人数的趋势预测方程曲线

由于在 2020 年 2 月 12 日起湖北省将临床诊断病例数据计入湖北省累计确诊病例数据,使得全国累计确诊报告病例数据在 2020 年 2 月 12 日有较大阶跃。

由方程 (193) 式计算,可得到达 $90\% P_{\max}$ 、 $95\% P_{\max}$ 、 $99\% P_{\max}$ 值的日期分别为 2020 年 2 月 18 日、2 月 22 日、3 月 1 日。

在 PSSIR 模型方程中参量比 $\mu\lambda^{-1}$ 为常量时的理想简单情况下,依据其趋势性近似解 (75) 式及偏对称方程 (193) 式,得中国境内新型冠状病毒确诊感染病例计算数据的 PSSIR 模型方程具体趋势性近似解形式为

$$\begin{cases} S(t) = 81006 + 1 - P(t), \\ I(t) = P(t) - R(t), \\ R(t) = \frac{81006}{\ln[81006 + 1]} \ln \frac{81006 + 1}{81006 + 1 - P(t)} ; \\ P(t) = \frac{81006}{1 + 0.7 \exp[-0.192(t - 28.7)] + 0.3 \exp[-0.236(t - 28.7)]} . \end{cases} \quad (196)$$

近似解 (196) 式的趋势性曲线形态特征如图 31 所示。

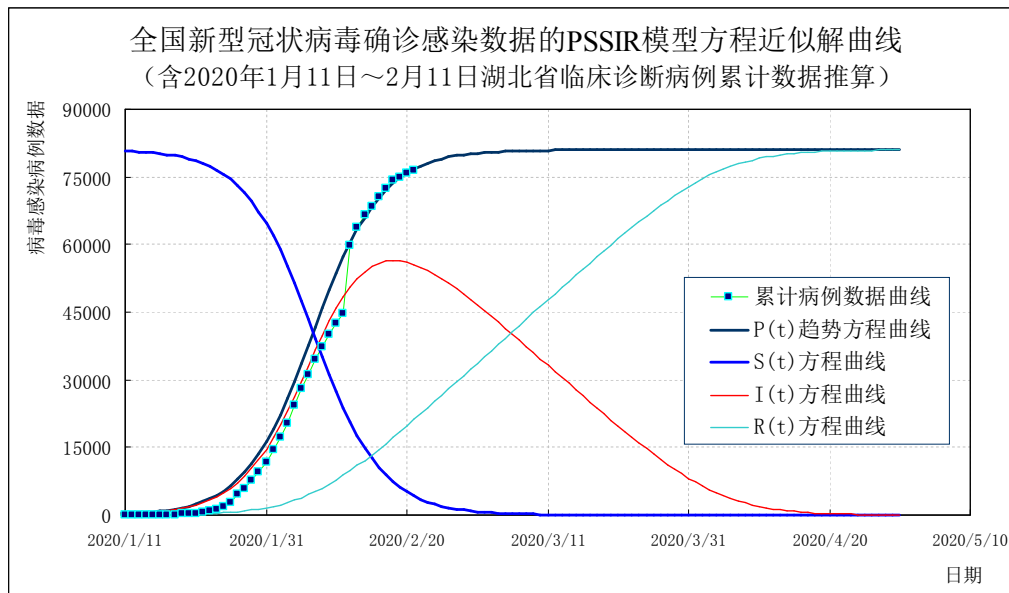


图 31 全国新型冠状病毒确诊感染数据的 PSSIR 模型方程近似解趋势性曲线

在图 30、图 31 中包含对 2020 年 1 月 11 日~2 月 11 日期间湖北省临床诊断病例数据的趋势性近似推算部分。

事物总是在动态平衡中演化,因果循环递进。反思并总结 2003 年 SARS 病毒和这次新型冠状病毒疫情发展过程,从国家安全角度考虑,当警钟长鸣、忧患长思、知难奋起、智慧悲悯。国家宜适时立法严禁交易及食用野生动物,提倡科学的膳食结构及健康的生活方式,明确部分政府机构责任主导与社会服务相结合的功能,提升疾病预防控制中心的行政地位,充分尊重并重视采纳临床医生和一线科研人员的意见和主张,加强病毒基因库建设,适度开展多种病毒基因序列嵌替编辑组合后衍生功能及其进化趋势的前导性探索研究,同步提高对出入境人员、动物及物品的病毒检测检疫及防控应对技术水平,将病毒防御及公共卫生建设切实放到国家安全战略层面,在继续注重并联合推进分析医学的同时继承发扬整体医学的优点,深入挖掘传统中医药宝库,持续地加大支持相关疫苗探索及临床试验工作,密切关注病毒与抗体协同进化形成动态平衡复合性特征的临界患者人群,探索疫情产生的季节性及周期性规律,及时研究并建立预案以从容应对由于疫情传播所带来的国家之间负面连带效应,宣传并树立面向国家建设发展主战场需要的人生志向,切实提高科研教育一线人员的地位及待遇,锻炼出一支能够打硬仗、打胜仗的队伍,在特定的战略及战术方面保障国家有序稳步地按预置计划向前发展。

7 讨论

本短文基于对 2003 年北京及香港二城市 SARS 病毒感染数据的趋势分析及中国境内新型冠状病毒肺炎确诊感染人数数据在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间的公布资料, 采用一般饱和过程的分析方法, 依据其中的偏对称方程讨论了小样本数据量时的 SIR 模型方程组, 给出了 PSSIR 模型方程形式及其趋势性近似解, 随后探讨了中国境内及中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒肺炎感染累计病例数据的偏对称方程具体形式、拐点位置与阶段性极限值, 进而给出了相应的 PSSIR 模型方程趋势性近似解形式及其曲线形态特征, 以便根据疫情数据进行后续的数据验算与方程参数调整, 依据近似解 (121) 式、(122) 式 (或其简洁近似解 (129) 式、(130) 式)、滞后函数方法的近似解 (145) 式、(146) 式给出更为完整准确的趋势预测。

病毒感染疫情发展过程有诸多相互作用的因素参与其中, 诸如政府机构根据疫情发展状况所采取的不断调整的救治及防控措施、病毒源头和中间宿主确认、疫情期间病毒的变异演化状况和相关医学数据信息共享开放程度、各类人员的交互流动、季节气候变化, 以及感染病例基础数据统计中所采用方法的差异、标准版本的更替、数据来源覆盖层面和即时细致程度等, 导致疫情发展过程具有很大的波动性及不确定性。是故, 至为简洁的理想方程形式, 仅能简略给出疫情发展过程一个面向或投影的阶段性主线趋势, 可以初步视其为更符合实际疫情数据多变量联立方程组的一个趋势性近似解; 预测的过程, 亦是诸具体理想方程在实际各相应演化阶段逐步失效的过程; 待较为完整的基础数据出现后, 依据 PSSIR 模型方程的一般性近似解, 或更为深刻普适的模型方程予以讨论, 为对疫情发展过程的进一步精细分析及多变量非线性动力学方程探索研究提供参考。

参考资料:

- 1 龚建华, 孙战利, 李小文, 等. SARS 疫情控制的模拟分析[J]. 遥感学报, 2003, 7(4): 260-265.
GONG J, SUN Z, LI X, et al. Simulation and analysis of control of severe acute respiratory syndrome[J]. Journal of Remote Sensing, 2003, 7(4): 260-265.
- 2 韩卫国, 王劲峰, 刘旭华. SARS 传播时间过程的参数反演和趋势预测[J]. 地球科学进展, 2004, 19(6): 925-930.
HAN W, WANG J, LIU X. Back analyzing parameters and predicting trend of SARS transmission[J]. Advances in Earth Science, 2004, 19(6): 925-930.
- 3 中国境内新型冠状病毒确诊感染人数原始数据来源于国家有关部委及新闻媒体等机构公布的在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间的疫情数据资料。
- 4 阎坤. 数据曲线间断区域的自适应连接方程研究[J]. 地球物理学进展, 2011, 26(1): 162~171.
YAN Kun. Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve[J]. Progress in Geophys(in Chinese with abstract in English), 2011, 26(1): 162~171.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/curveandequation-pdf.pdf>
- 5 阎坤. 关于连接方程的简略注释[研究报告]. 西安: 西安现代非线性科学应用研究所, 2011-03-18.
YAN Kun. Brief annotation of the connection equation[Research report]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 18 March 2011.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/ConnectionEquation-pdf.pdf>

计算附录

全国新型冠状病毒确诊感染累计病例人数趋势预测方程 (193) 式计算表 (含湖北省临床诊断数据推算) 2020 年 1 月 24 日~3 月 23 日

日期	1-24	1-25	1-26	1-27	1-28	1-29	1-30	1-31	2-01	2-02
计算值	4421	5391	6552	7934	9567	11477	13691	16227	19092	22282
日期	2-03	2-04	2-05	2-06	2-07	2-08	2-09	2-10	2-11	2-12
计算值	25776	29533	33498	37597	41749	45867	49867	53676	57235	60502
日期	2-13	2-14	2-15	2-16	2-17	2-18	2-19	2-20	2-21	2-22
计算值	63452	66078	68386	70391	72116	73588	74836	75887	76767	77503
日期	2-23	2-24	2-25	2-26	2-27	2-28	2-29	3-01	3-02	3-03
计算值	78114	78622	79042	79389	79676	79912	80107	80267	80398	80507
日期	3-04	3-05	3-06	3-07	3-08	3-09	3-10	3-11	3-12	3-13
计算值	80596	80669	80729	80778	80819	80852	80879	80902	80920	80936
日期	3-14	3-15	3-16	3-17	3-18	3-19	3-20	3-21	3-22	3-23
计算值	80948	80958	80967	80974	80979	80984	80988	80991	80994	80996