

阎坤. 关于连接方程的简略注释[R]. 西安: 西安现代非线性科学应用研究所, 2011-03-18.

YAN Kun. Brief annotation of the connection equation[R]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 18 March 2011. <http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/ConnectionEquation-pdf.pdf>

关于连接方程的简略注释

阎坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘要: 本文给出了连接方程若干性质及应用的简略注释, 讨论了连接方程是一非线性动力学方程的近似等效解析解的分析方法, 进而预言了一个基于非线性动力学方程的电路元件—电存 (nonlinstor), 其为一种深化型电容的电路器件, 分析了 RLCN 串联电路微分方程的性质; 依据连接方程的非线性动力学方程近似形式, 给出了粒子统计分布趋势性方程及其若干条件解, 建立了美国年度能源消费量与 GDP 关系方程及英国年度人口数量与 GDP 关系方程, 并计算预测了美国年度能源消费极限值与英国年度人口极限值; 随后探讨了岩石及单晶高温材料的蠕变过程曲线、半导体分立器件 V-A 特性曲线、超导材料电阻 R (或电阻率 ρ)—绝对温度 T 曲线方程、双晶 Josephson 结直流 $I-U$ 特性曲线及 Shapiro 台阶电流阶跃幅值曲线的趋势线拟合方程, 最后讨论了连接方程在数据拟合及长程预测等方面的局限性。

关键词: 连接方程, 曲线形态, 非线性动力学方程, 近似等效解析解, 饱和过程, 蠕变过程

Brief annotation of the connection equation

YAN Kun

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, the brief annotation of the properties and applications of the connection equation are given. An analytical method of the connection equation as an approximate equivalent analytical solution of the nonlinear dynamics equations is discussed, and then a new electronic circuit element (nonlinstor) with the deepening charge-controlled capacitor properties based on the form of the nonlinear differential equation is predicted, and the nonlinear differential equation for a RLCN series circuit is also analyzed. According to the approximate form of the nonlinear dynamics equation of the connection equation, the tendency equation and its conditional solutions of the statistical distributions of the particles are given, the equation of relationship between the total annual energy consumption with the annual GDP in the United States, and the equation of relationship between the annual population with the annual GDP in the United Kingdom are established, and the limit values of the total annual energy consumption in the United States and the annual population in the United Kingdom are calculated and predicted. Subsequently, the tendency fitting equations of the curves are explored, which included the creep process curve of the rock and the single-crystal superalloy, the Volt-Ampere characteristic curve of the discrete semiconductor device, the resistance (or resistivity)-absolute temperature curve of the superconducting material, the direct current $I-U$ characteristic curve of the bicrystal Josephson junction, and the current step amplitude of Shapiro steps, etc. At the end, the limitations of the connection equation in the data fitting and long-range forecasting are discussed.

Keywords connection equation, shape of curve, nonlinear dynamics equation, approximate equivalent analytical solution, saturation process, creep process

0 引言

在数据整理归纳中, 连接方程方法可以在现象演化原理研究路线外进行并行探讨分析, 是与原理分析的并行探索路线。对在基础原理尚未完全建立的现象演化过程, 连接方程方法则是较为直接的唯一分析途径, 为建立现象演化的非线性动力学解析体系及其近似等效解析解方法提供参考描述。连接方程方法同时也对主曲线理论中数据局部骨架的过渡性连接描述提供参考曲线形态, 为理想饱和过程及一般阶跃过程的连续渐变阐释提供趋势性方程形式。

本文简略注释并展开讨论资料 1 中连接方程的若干性质及部分曲线形态, 探讨连接方程作为一非线性动力学方程近似等效解析解的分析方法, 给出兼容非线性 Newton 动力学位移—时间方程、RLCN 串联电路电荷量—时间方程的具体形式, 同时预言一新的基于非线性动力学方程的电路元件 (电存—nonlinstor); 分析探讨连接方程及其非线性动力学方程近似形式在粒子系统的统计分布趋势性方程、国家年度能源消费总量及人口总数与 GDP 总值关系方程、岩石及单晶高温合金蠕变曲线、半导体分立器件 V-A 特性曲线、超导材料在零电阻转变附近区域 R (或 ρ)— T 曲线、高温超导双晶 Josephson 结直流 $I-U$ 特性曲线及 Shapiro 台阶电流阶跃幅值等方面的趋势性应用计算; 文中最后讨论了连接方程的局限性。

1 连接方程与非线性动力学方程的关系及其部分性质

1.1 连接方程与双曲正切方程的关系

下面从双曲正切方程 (1.1) 式开始, 给出若干扩展方程, 包括连接方程 (1.4) 式形式。

第一个方程 (双曲正切方程):

$$y = y_0 + A \tanh[\alpha(x - x_0)], \quad (1.1)$$

式中 x_0 、 A 、 α 为待定常数， $y(x = x_0) = y_0$ 。方程中有 x_0 、 A 、 α 共计 3 个待定系数。

由双曲正切函数 (1.1) 式得

$$\begin{aligned} y &= y_0 + A \frac{\sinh[\alpha(x - x_0)]}{\cosh[\alpha(x - x_0)]} \\ &= y_0 + A \frac{-[\exp[\alpha(x - x_0)] + \exp[-\alpha(x - x_0)]] + 2 \exp[\alpha(x - x_0)]}{\exp[\alpha(x - x_0)] + \exp[-\alpha(x - x_0)]} \\ &= y_0 - A + 2A \frac{1}{1 + \exp[-2\alpha(x - x_0)]} \end{aligned}$$

取 $y_0 = A$ ，则上式转化为传统描述 S 型曲线的 Logistic 方程形式

$$y = \frac{2y_0}{1 + \exp[-2\alpha(x - x_0)]} \tag{1.2}$$

第二个方程：

$$y = y_0 + A \frac{\sinh[\alpha_1(x - x_0)]}{\cosh[\alpha_2(x - x_0)]} \tag{1.3}$$

方程有 x_0 、 A 、 α_1 、 α_2 共计 4 个待定系数。

第三个方程：

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x - x_0)] - \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x - x_0)]} \tag{1.4}$$

方程有 x_0 、 A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 共计 5 个待定系数。

第四个方程：

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x - x_0)] - \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{\exp[\alpha_3(x - x_0)] + \exp[-\alpha_4(x - x_0)]} \tag{1.5}$$

方程中 x_0 、 A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 为待定系数。

方程 (1.5) 式一方面可转化为如下形式

$$y = y_0 + A \exp[0.5(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)(x - x_0)] \frac{\sinh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x - x_0)]}{\cosh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_0)]} \tag{1.6}$$

另一方面，将上式中分子分母同乘 $\exp[\gamma_0(x - x_0)]$ ，这里 γ_0 为待定常数；方程形式转化为

$$y = y_0 + A \frac{\exp[(\alpha_1 + \gamma_0)(x - x_0)] - \exp[-(\alpha_2 - \gamma_0)(x - x_0)]}{\exp[(\alpha_3 + \gamma_0)(x - x_0)] + \exp[-(\alpha_4 - \gamma_0)(x - x_0)]}$$

取上式分母中

$$\alpha_3 + \gamma_0 = \alpha_4 - \gamma_0,$$

解得待定常数

$$\gamma_0 = -0.5(\alpha_3 - \alpha_4);$$

故有

$$y = y_0 + A \frac{\exp[(\alpha_1 - 0.5(\alpha_3 - \alpha_4))(x - x_0)] - \exp[-(\alpha_2 + 0.5(\alpha_3 - \alpha_4))(x - x_0)]}{2 \cosh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_0)]} \tag{1.7}$$

其中方程 (1.7) 式与方程 (1.4) 式具有相等的形式，表明方程 (1.5) 式与方程 (1.4) 式完全等效，亦计有 5 个待定系数。

第五个方程：

$$y = y_0 - A_{01} \frac{1 - A_{02}}{2} + A_{01} \frac{\exp[\alpha_1(x - x_0)] - A_{02} \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{\exp[\alpha_3(x - x_0)] + \exp[-\alpha_4(x - x_0)]} \tag{1.8}$$

方程中 x_0 、 A_{01} 、 A_{02} 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 为待定系数。此方程可转化为

$$y = y_0 - A_{01} \frac{1 - A_{02}}{2} + A_{01} \frac{\exp[(\alpha_1 - 0.5(\alpha_3 - \alpha_4))(x - x_0)] - A_{02} \exp[-(\alpha_2 + 0.5(\alpha_3 - \alpha_4))(x - x_0)]}{2 \cosh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_0)]} \tag{1.9}$$

方程等效计有 6 个待定系数。

第六个方程:

$$y = y_0 - A_{01} \frac{1 - A_{02}}{1 + A_{03}} + A_{01} \frac{\exp[\alpha_1(x - x_0)] - A_{02} \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{\exp[\alpha_3(x - x_0)] + A_{03} \exp[-\alpha_4(x - x_0)]}, \quad A_{03} \neq -1 \quad (1.10)$$

方程有 x_0 、 A_{01} 、 A_{02} 、 A_{03} 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 为待定系数。此式可转化为

$$y = y_0 - A_{01} \frac{1 - A_{02}}{1 + A_{03}} + A_{01} \frac{\exp[(\alpha_1 + \alpha_4)(x - x_0)] - A_{02} \exp[-(\alpha_2 - \alpha_4)(x - x_0)]}{\exp[(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_0)] + A_{03}}, \quad A_{03} \neq -1 \quad (1.11)$$

方程等效计有 7 个待定系数。

分析计算表明, 上述方程中除第四个方程等效第三个方程外, 共计 5 个方程都可以作为连接方程予以很好地应用。

通过对上述 5 个方程中曲线形态及诸待定系数迭代计算比较, 第一个、第二个方程二式曲线形态多为对称性质, 待定系数可直接计算; 第五个、第六个方程二式曲线形态多样, 但待定系数迭代计算较为复杂; 第三个方程曲线形态较多, 待定系数迭代计算较为简练, 同时具有第六个方程的基本特性, 故于能够对大多数曲线进行趋势性连接或拟合的原则下, 在上述 5 个连接方程中取第三个方程 (1.4) 式作为数据曲线间断区域的诸多连接方程中的一般性连接方程。研究表明, 方程 (1.4) 式能够描述从阶跃到缓变、开始及结束状态从平缓到陡峭的多种曲线形态, 其中包括诸多饱和过程及蠕变过程、乃至器件的电学击穿过程与材料的力学断裂过程等一般性趋势描述, 同时具有很好的迭代收敛性。

对于更为广泛的数据曲线形态的趋势性理想连接拟合, 方程 (1.4) 式可进一步拓展为

$$y = \zeta_1(x) \left[A_1 + A \frac{\exp[\alpha_1(x - x_0)] - \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x - x_0)]} \right] \zeta_2(x), \quad (1.12)$$

这里

$$\begin{aligned} \zeta_1(x) &= 1 - A_0 \exp(\mathcal{G}_1 x), \\ \zeta_2(x) &= \exp(\mathcal{G}_2 x), \end{aligned}$$

分别为远离平衡点的前、后区域连接拟合曲线形态调整函数,

$$A_1 = y_0 [\zeta_1(x_0) \zeta_2(x_0)]^{-1},$$

$|A_0| < 1$ 、 $\mathcal{G}_1 \leq 0$ 、 \mathcal{G}_2 为曲线形态调整系数。

极端情况下, $\zeta_1(x_0) \approx 1$ 、 $\zeta_2(x_0) \approx 1$ 、 $A_1 \approx y_0$, 即方程 (1.12) 式的运算是给方程 (1.4) 式加了一个在平衡点附近区域幅值近为 1 的广义窗函数 $w(x) = \zeta_1(x) \zeta_2(x)$ 。

特别地, 方程 (1.12) 式还可简化为形式

$$y = [1 - A_0 \exp(\mathcal{G}_1 x)] [A_1 + A \tanh[\alpha(x - x_0)]] \exp(\mathcal{G}_2 x). \quad (1.13)$$

若分别考虑远离平衡点的前或后区域拟合曲线形态, 则亦分别有更为简化的方程形式

$$y = [1 - A_0 \exp(\mathcal{G}_1 x)] [A_1 + A \tanh[\alpha(x - x_0)]], \quad \mathcal{G}_2 = 0 \quad (1.14)$$

$$y = [A_1 + A \tanh[\alpha(x - x_0)]] \exp(\mathcal{G}_2 x), \quad A_0 = 0 \quad (1.15)$$

方程 (1.13) ~ (1.15) 三式能够对从阶跃到缓变的广泛数据曲线予以很好的连接拟合。

特别地, 对于方程 (1.10) 式, 当不需要显式 $y(x = x_0) = y_0$ 时, 则方程可表示为

$$y = s_0 + A_{01} \frac{\exp[(\alpha_1 + \alpha_4)(x - x_0)] - A_{02} \exp[-(\alpha_2 - \alpha_4)(x - x_0)]}{\exp[(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_0)] + A_{03}}; \quad (1.16)$$

其包含下面二个特殊方程 $Y(X)$ 表述形式

$$Y = \frac{1}{\exp(X - X_0) \pm 1}, \quad (1.17)$$

这里 X_0 为待定常数。

上述讨论不是推导演绎过程, 仅是对连接方程形式及部分性质的简略注释。

1.2 连接方程的非线性微分方程近似形式及此形式在经典 Newton 动力学方程与 RLC 电路方程方面的兼容性

一般地对于较为广泛的自然现象演化过程, 包括具有趋势极限与细节波动相复合的演化过程, 可构建一简洁的非线性动力学微分方程进行描述

$$\varpi_1 \frac{dy}{dx} + \varpi_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi_{IE} + \xi_1 y + \xi_2 y^2 = \psi_{EE}, \quad (1.18)$$

式中 ϖ_1 、 ϖ_2 、 ξ_1 、 ξ_2 皆为系函数; ξ_{IE} 为内激励函数, ψ_{EE} 为外激励函数, ξ_2 是具有非线性极限特征的函数。

方程 (1.18) 式具有条件极限解、波动解 (或振荡解)、极限与波动复合解等诸多解形式, 其中即包括连接方程 (1.4) 式所描述的现象从一种状态到另一种状态演化过程的阐释。

对于方程 (1.18) 式, 在不考虑饱和和过程细节波动情况下, 取 $\varpi_2 = 0$ 、 $\varpi_1 \neq 0$, 约化 $\varpi_1 = 1$, 即方程各项等效同除 ϖ_1 , 则方程 (1.18) 式在 $\xi_2 \neq 0$ 与 $\xi_2 = 0$ 时分别成为

$$\frac{dy}{dx} + \xi_2 (y - y_0)^2 + v_0 = 0, \quad \xi_2 \neq 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{dy}{dx} + \xi_{IE} + \xi_1 y = \psi_{EE}, \quad \xi_2 = 0 \quad (1.20)$$

式中 $y_0 = -0.5\xi_1\xi_2^{-1}$, $v_0 = -\psi_{EE} + \xi_{IE} - 0.25\xi_1^2\xi_2^{-1}$ 。

进而当 ϖ_1 、 ξ_{IE} 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ψ_{EE} 皆为常数时, 方程 (1.19)、(1.20) 二式的解分别为

$$y = \begin{cases} y_0 + A \tan[\alpha(x - x_0)], & \xi_2 v_0 > 0, \alpha = \sqrt{\xi_2 v_0}, A = -\alpha \xi_2^{-1} \\ y_0 + A \tanh[\alpha(x - x_0)], & \xi_2 v_0 < 0, \alpha = \sqrt{-\xi_2 v_0}, A = \alpha \xi_2^{-1} \\ y_0 + \xi_2^{-1} [x + v_c]^{-1}, & v_0 = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

$$y = \begin{cases} [\psi_{EE} - \xi_{IE}] \xi_1^{-1} + [y_{x=0} - [\psi_{EE} - \xi_{IE}] \xi_1^{-1}] \exp(-\xi_1 x), & \xi_1 \neq 0 \\ y_{x=0} + [\psi_{EE} - \xi_{IE}] x, & \xi_1 = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

方程解 (1.21) 式中 x_0 、 v_c 皆为待定常数。

解析解 (1.21) 式表明方程 (1.4) 式即为非线性动力学方程 (1.18) 式当 $\varpi_1 \neq 0$ 、 $\varpi_2 \neq 0$ 、 $\xi_2 \neq 0$ 且 $\xi_1^2 > 4[\xi_{IE} - \psi_{EE}]\xi_2$ 时的近似等效解析解或其拓展形式, 可趋势性地描述相关自然饱和和过程及材料蠕变过程; 将方程 (1.4) 式代入到方程 (1.18) 式中进行近似计算, 或分析比对方程 (1.21) 式, 可近似确定方程 (1.4) 式中诸待定系数的具体表示形式。

对于方程 (1.18) 式与其近似等效解析解方程 (1.4) 式之间的系数关系, 在极限层面有:

方程 (1.18) 式当 $\xi_2 = 0$ 时, 其一解析解对应于方程 (1.4) 式在 $\alpha_3 = 0$ 时的形式;

方程 (1.18) 式当 $\varpi_2 = 0$ 时, 其一解析解对应于方程 (1.4) 式在 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ 时的形式。

方程 (1.18) 式兼容经典 Newton 动力学位移 y —时间 t 方程、RLC 串联电路中电荷量 Q —时间 t 方程的近似形式分别为

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu_0 \frac{dy}{dt} + b_{IE} + k_0 y + n_0 y^2 = F_{EE}, \quad (1.23)$$

$$L_0 \frac{d^2 Q}{dt^2} + R_0 \frac{dQ}{dt} + U_{IE} + \frac{1}{C_0} Q + N_0 Q^2 = U_{EE}; \quad (1.24)$$

在方程 (1.23) 式中 m_0 、 μ_0 、 k_0 分别为质点质量、介质阻力系数、介质弹性系数, F_{EE} 为外作用力函数; 这里 b_{IE} 定义为自激励函数, 具有部分本征性质, 量纲 $[m\text{kg}\text{s}^{-2}]$; n_0 定义为非线性极限系数, 量纲 $[m^{-1}\text{kg}\text{s}^{-2}]$; 当 $n_0 < 0$ 时 (1.23) 式为非线性正向饱和和过程方程, 当 $n_0 > 0$ 时为逆向饱和和过程方程, 当 $n_0 = 0$ 时 (1.23) 式即转化为已知的经典 Newton 动力学位移 y —时间 t 方程形式

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu_0 \frac{dy}{dt} + k_0 y = F_{EE} - b_{IE}; \quad (1.25)$$

在方程 (1.24) 式中 L_0 、 R_0 、 C_0 分别为串联电路中的电感值、电阻值、电容值， Q 为电路中传递状态的电荷量， U_{EE} 为电压源激励函数；这里 U_{IE} 定义为电路自激励函数，同于电压量纲 [$m^2kgs^{-3}A^{-1}$]，其具有状态转换台阶或门限的部分内秉性质，亦具有在外激励函数作用下产生相应阻碍或释放电压的固有特征，故同时定义此等效元件名称为“电态元件，statransor”，文字及图形符号为“S，—□—”，等效电压方程为

$$U_S = U_{IE}; \tag{1.26}$$

N_0 定义为非线性元件的特征值，量纲 [$m^2kgs^{-5}A^{-3}$]，其具有荷控型电容元件进一步深化的性质，是非线性演化极限特征的系数，具有参与构造新型非线性电子存储器的特性，是故同时定义此非线性元件名称为“电存元件，nonlinstor”，文字及图形符号为“N，—□—”，端电压方程为

$$U_N = N_0 Q^2; \tag{1.27}$$

方程 (1.24) 式即为 RLCN 串联电路中电荷量 Q —时间 t 方程；当 $N_0 = 0$ 时方程即转化为已知的经典 RLC 串联电路电荷量 Q —时间 t 方程形式

$$L_0 \frac{d^2 Q}{dt^2} + R_0 \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C_0} Q = U_{EE} - U_{IE}. \tag{1.28}$$

当二个电存元件 N_{01} 、 N_{02} 串联时，根据方程 (1.27) 式得串联后的端电压方程为

$$U_{N\Sigma} = N_{01} Q^2 + N_{02} Q^2 = [N_{01} + N_{02}] Q^2;$$

故得二个电存元件串联时的总电存值 $N_{0\Sigma}$ 为

$$N_{0\Sigma} = N_{01} + N_{02}. \tag{1.29}$$

当二个电存元件 N_{01} 、 N_{02} 并联时，根据 (1.27) 式得二电存元件的电荷方程分别为

$$Q_1^2 = N_{01}^{-1} U_N, \quad Q_2^2 = N_{02}^{-1} U_N;$$

有并联时二电存元件的端电压方程

$$U_N = N_{0P\Sigma} [Q_1 + Q_2]^2 = N_{0P\Sigma} [N_{01}^{-1} + N_{02}^{-1} \pm 2\sqrt{N_{01}^{-1} N_{02}^{-1}}] U_N;$$

式中 $N_{0P\Sigma}$ 为二个电存元件并联时的总电存值，故得

$$N_{0P\Sigma} = \frac{1}{N_{01}^{-1} + N_{02}^{-1} \pm 2\sqrt{N_{01}^{-1} N_{02}^{-1}}} = \frac{N_{01} N_{02}}{N_{01} + N_{02} \pm 2\sqrt{N_{01} N_{02}}}. \tag{1.30}$$

一般地，当取上式二并联电存元件电荷量 Q_1 、 Q_2 为同号时，则其总电存值为

$$N_{0P\Sigma} = \frac{1}{N_{01}^{-1} + N_{02}^{-1} + 2\sqrt{N_{01}^{-1} N_{02}^{-1}}} = \frac{N_{01} N_{02}}{N_{01} + N_{02} + 2\sqrt{N_{01} N_{02}}}. \tag{1.31}$$

对于方程 (1.23) 式，当 $\mu_0 = 0$ 、 $k_0 = 0$ 时，有最简单的非线性动力学方程形式

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + n_0 y^2 = F_{EE} - b_{IE}; \tag{1.32}$$

故而当 m_0 、 n_0 、 b_{IE} 、 F_{EE} 皆为常数时，积分上式解得能量方程

$$\frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{3} n_0 y^3 = [F_{EE} - b_{IE}] y + C_E, \tag{1.33}$$

这里 C_E 为能量待定常数；则在 $n_0 \neq 0$ 、 $F_{EE} = b_{IE}$ 、 $C_E = 0$ 时的简单非线性情况下得位移 y 、速度 u_n 、加速度 g_n 的局部一特解及通解分别为

$$y = 0, \quad u_n = \frac{dy}{dt} = 0, \quad g_n = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{du_n}{dt} = 0;$$

$$y = -\frac{6m_0}{n_0[t+t_0]^2}, \quad u_n = \frac{12m_0}{n_0[t+t_0]^3}, \quad g_n = -\frac{36m_0}{n_0[t+t_0]^4}; \tag{1.34}$$

式中 $u_n \ll c$ ， c 为真空中光速， t_0 为时间待定常数，其与初始位移、速度及加速度相关。

作为初步讨论，对于电存元件，取 Q 为简谐波函数形式

$$Q = Q_0 \cos[2\pi f_0 t + \theta_0],$$

这里 Q_0 、 $f_0 = T_N^{-1}$ 及 θ_0 分别为 Q 的简谐波函数电荷量振幅、频率及初始相位， T_N 为简谐波周期；得电存元件的电流有效值 I_{Neff} 及电压有效值 U_{Neff} 分别为

$$\begin{aligned} I_{\text{Neff}} &= \sqrt{\frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2T_N} \int_0^{T_N} [2\pi f_0 Q_0]^2 [1 - \cos[4\pi f_0 t + 2\theta_0]] dt} \\ &= \sqrt{2} \pi f_0 Q_0; \\ U_{\text{Neff}} &= \sqrt{\frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} [N_0 Q^2]^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4T_N} \int_0^{T_N} [N_0^2 Q_0^4] [1.5 + 2 \cos[4\pi f_0 t + 2\theta_0] + 0.5 \cos[8\pi f_0 t + 4\theta_0]] dt} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} N_0 Q_0^2; \end{aligned}$$

故得电存元件的阻抗 Z_N 为

$$Z_N = \frac{U_{\text{Neff}}}{I_{\text{Neff}}} = \frac{\sqrt{3} N_0 Q_0}{4\pi f_0}; \tag{1.35}$$

以及电存元件的 V-A 特性曲线 $U_N - I_N$ 方程、吸收功率 P_N 、储存电能 W_N 分别为

$$I_N^2 = \frac{1}{4N_0 U_N} \left(\frac{dU_N}{dt} \right)^2, \quad P_N = N_0 Q^2 \frac{dQ}{dt}, \quad W_N = \frac{1}{3} N_0 Q^3. \tag{1.36}$$

由此讨论表明电存元件具有非线性、高通、变频及关联电荷的性质，具有参与构成非线性电子存储器的特征。

作为初步探讨，对于方程 (1.18) 式，其兼容 RLC 并联电路电压 U - 时间 t 的非线性方程一种近似形式为

$$C_0 \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L_0} \int U dt + I_{\text{IE}} + \frac{1}{R_0} U + D_0 U^2 = I_{\text{EE}}; \tag{1.37}$$

另一种近似形式为

$$C_0 \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{R_0} \frac{dU}{dt} + \frac{dI_{\text{IE}}}{dt} + \frac{1}{L_0} U + K_0 U^2 = \frac{dI_{\text{EE}}}{dt}; \tag{1.38}$$

这里 L_0 、 R_0 、 C_0 分别为并联电路中的电感值、电阻值、电容值， U 为并联电路电压， I_{EE} 为电流源激励函数； I_{IE} 为电路中电流自激励函数，同于电流量纲[A]，等效电流方程为

$$I_1 = I_{\text{IE}};$$

D_0 、 K_0 定义为非线性元件的特征值；其中 D_0 元件端电压 U_D 与电流 I_D 或电荷 Q_D 的方程为

$$U_D^2 = \frac{1}{D_0} I_D = \frac{1}{D_0} \frac{dQ_D}{dt}; \tag{1.39}$$

D_0 元件量纲为 $[m^{-4} kg^{-2} s^4 A^3]$ ，具有电阻元件进一步深化的性质，故同时定义其名称为“电制元件，deepcontror”； K_0 元件端电压 U_K 与电流 I_K 或电荷 Q_K 的方程为

$$U_K^2 = \frac{1}{K_0} \frac{dI_K}{dt} = \frac{1}{K_0} \frac{d^2 Q_K}{dt^2}; \quad (1.40)$$

K_0 元件量纲为 $[m^{-4}kg^{-2}s^5A^3]$ ，其具有电感元件进一步深化的性质，是故同时定义此非线性元件名称为“电守元件，keepstor”。

方程 (1.37)、(1.38) 二式即分别为具有非线性形式的 RLCD 并联、RLCK 并联电路中电压 U —时间 t 方程；当 $D_0 = 0$ 、 $K_0 = 0$ 时 (1.37)、(1.38) 二式即转化为已知的经典 RLC 并联电路电压 U —时间 t 方程形式

$$C_0 \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{R_0} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L_0} U = \frac{d}{dt} [I_{EE} - I_{IE}]. \quad (1.41)$$

方程 (1.4) 式、(1.21)、(1.34) 三式即对于进一步研究方程 (1.23)、(1.24)、(1.37)、(1.38) 四式的非线性过程描述具有引导意义。

上述基于数学方程 (1.23)、(1.24)、(1.37)、(1.38) 四式所引入的新的物理参量：动力学中自激励状态函数 b_{IE} 、非线性极限系数 n_0 ，电磁学中自激励状态等效元件 U_{IE} 、 I_{IE} 及非线性极限特征元件 N_0 、 D_0 、 K_0 ，皆是属于探讨性质的，还需要来自物理实验的验证及拓展；主要是 b_{IE} 、 U_{IE} 、 I_{IE} 所具有的自激励性质， n_0 、 N_0 、 D_0 、 K_0 所含有的非线性演化极限属性；其中与已有研究结论相混叠、参量表示相重复、乃至不相容的方程内容及图形符号标示，尚需要深入分析甄别予以进一步补充完善。

对于方程 (1.23)、(1.24)、(1.37)、(1.38) 四式，引入实数阶非线性动力项及实数阶非线性元件

$$F_{rd(j_1, j_2)}^{j_1} = n_{rd(j_1, j_2)} \frac{d^{j_2} x}{dt^{j_2}}, \quad F_{rp(j_3, j_4)}^{j_3} = n_{rp(j_3, j_4)} x^{j_4}; \quad (1.42)$$

$$U_{rd(j_1, j_2)}^{j_1} = N_{rd(j_1, j_2)} \frac{d^{j_2} Q}{dt^{j_2}}, \quad U_{rp(j_3, j_4)}^{j_3} = N_{rp(j_3, j_4)} Q^{j_4}; \quad (1.43)$$

可深入描述自然现象演化的一般性趋势规律；这里实数 $j_1 > 0$ 、 $j_2 \geq 0$ 、 $j_3 > 0$ 、 $j_4 \geq 0$ ， $n_{rd(j_1, j_2)}$ 、 $n_{rp(j_3, j_4)}$ 为与质点及介质相关的动力学参数， $F_{rd(j_1, j_2)}$ 、 $F_{rp(j_3, j_4)}$ 为质点作用力表现； $N_{rd(j_1, j_2)}$ 、 $N_{rp(j_3, j_4)}$ 为元件特征值， $U_{rd(j_1, j_2)}$ 、 $U_{rp(j_3, j_4)}$ 为元件电压表现。

特别地简单地，对于实数阶非线性元件，当实数 $j_3 = 1.0$ 、 $j_4 = 0.5$ 及电荷量

$$Q = Q_0 [1 + \cos[2\pi f_0 t + \theta_0]]$$

时，则得其相应元件的阻抗为

$$Z_{rp(1.0, 0.5)} = \frac{N_{rp(1.0, 0.5)}}{\sqrt{2\pi f_0} \sqrt{Q_0}}. \quad (1.44)$$

电磁理论从 Faraday 的电磁感应定律及力线论到 Maxwell 的位移电流假设及电磁波方程，取得了决定性进展；如果将电磁学中的任一非能量参量解析为质量、空间、时间的表达式，则全部的电磁参量即都能够通过能量关系方程解析在广义的 Newton 动力学基础之上，其对深入阐释电磁的本质具有根本性意义；一探讨方向即是磁场强度与涡旋现象中的转动惯量等动力学参量密切相关，表现在量纲上即是能够将电荷量的单位 [C] 表示为

$$1C = z_c m^{n_1} kg^{n_2} s^{n_3}, \quad (1.45)$$

这里 n_1 、 n_2 、 n_3 为待定实数， z_c 为无量纲待定常数。

上述电态元件图形符号 “—□—” 及电存元件图形符号 “—⌈—” 即是对连接方程的理想形式、非线性微分方程 (1.18) 式条件解 (1.21) 式中双曲正切函数曲线形态的趋势性标记；与电感是电阻的深化型器件相对照比较，电存则是电容的深化荷控型元件；依据解析解 (1.21) 式，方程 (1.24) 式形式的 RLCN 串联电路输出电荷量近似为双曲正切函数时，需要电路中的电容值为负值， $C_0 < 0$ ，即电路呈现为负容性；如果还进一步考虑电路振荡频率因素，则亦需要电路中的电感值亦为负值， $L_0 < 0$ ，即电路同时亦呈现为负感性。

1.3 粒子系统的统计分布趋势性方程简略形式及其条件解

作为对粒子系统统计分布的趋势性探讨及进一步分析，简单地，参考方程 (1.18) 式，可初步构建在一个相格内的平均粒子数 n_S 的非线性微分方程趋势性简略形式为

$$z_0 \frac{d^2 n_S}{dn_E^2} + \frac{dn_S}{dn_E} + z_{IE} + n_S + zn_S^2 = z_{EE}, \quad (1.46)$$

式中

$$n_E = (E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + \alpha_E, \quad (1.47)$$

E_p 为粒子能量， μ_E 为化学势， k 为 Boltzmann 常数， T 为绝对温度， α_E 为与 kT 相关的统计性待定参量， z_0 、 z 为待定常数， z_{IE} 为内激励函数， z_{EE} 为外激励函数。

方程 (1.47) 式中， α_E 是对 n_E 中主项 $(E_p - \mu_E)(kT)^{-1}$ 予以补充的待定参量，在数学方程处理上，其包含化学势部分的 $\mu_E(kT)^{-1}$ 项既可以合并并在 α_E 中，也可从 α_E 中拆分出来；在 n_S 的表达式确定后，待定参量 α_E 及部分相关待定常数可联合通过系统的粒子总数目及粒子总能量确定。

方程 (1.46) 式的适当简化形式具有极限解、波动解或振荡解，及极限与波动的复合解。一般地，线性微分方程具有解的叠加性，非线性微分方程则不具有解的叠加性，诸解性质并列、形式对称、整体互补。

对于方程 (1.46) 式，当内激励函数与外激励函数相平衡 $z_{IE} = z_{EE}$ 时，有

$$z_0 \frac{d^2 n_S}{dn_E^2} + \frac{dn_S}{dn_E} + n_S + zn_S^2 = 0. \quad (1.48)$$

方程 (1.48) 式的二个常量解及一个近似等效解析解分别为

$$n_S = 0, \quad (1.49)$$

$$n_S = -z^{-1}, \quad z \neq 0 \quad (1.50)$$

$$n_S = n_{S0} + A_{SE} \frac{\exp[\alpha_{SE1}(n_E - n_{E0})] - \exp[-\alpha_{SE2}(n_E - n_{E0})]}{2 \cosh[\alpha_{SE3}(n_E - n_{E0})]}, \quad (1.51)$$

式中 n_{S0} 、 n_{E0} 、 A_{SE} 、 α_{SE1} 、 α_{SE2} 、 α_{SE3} 为待定常数； n_{S0} 与 n_{E0} 之间的关系为

$$n_S(n_E = n_{E0}) = n_{S0}.$$

下面讨论取 $z_0 = 0$ 时的最简略情况，则趋势性方程 (1.48) 式成为简单的非线性微分方程形式

$$\frac{dn_S}{dn_E} + n_S + zn_S^2 = 0. \quad (1.52)$$

对于方程 (1.52) 式，当

$$\frac{dn_S}{dn_E} = 0$$

时，有

$$n_S[1 + zn_S] = 0; \quad (1.53)$$

解得方程 (1.52) 式的二个同于解 (1.49)、(1.50) 二式的常量解为

$$n_S = 0, \quad (1.54)$$

$$n_S = -z^{-1}, \quad z \neq 0 \quad (1.55)$$

考虑 $n_S > 0$ ，则在待定常数 $z = 0$ 情况下，方程 (1.52) 式成为

$$\frac{dn_S}{dn_E} + n_S = 0, \quad (1.56)$$

有

$$\frac{1}{n_S} dn_S = -dn_E; \quad (1.57)$$

解得

$$\ln n_S = -n_E + B_1,$$

得 n_S 的解

$$n_S = \exp[-n_E + B_1] = \exp[-(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} - (\alpha_E - B_1)]; \quad (1.58)$$

而在 $z \neq 0$ 情况下，当 $z^{-1} + n_S > 0$ 时，方程 (1.52) 式成为

$$\frac{1}{n_S} dn_S - \frac{1}{z^{-1} + n_S} d(z^{-1} + n_S) = -dn_E, \quad (1.59)$$

解得

$$\ln n_S - \ln[z^{-1} + n_S] = -n_E + B_2,$$

得 n_S 的解

$$n_S = \frac{z^{-1}}{\exp[n_E - B_2] - 1} = \frac{z^{-1}}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_2)] - 1}; \quad (1.60)$$

当 $z^{-1} + n_S = 0$ 时，则方程 (1.52) 式直接有 n_S 的常量解

$$n_S = -z^{-1}; \quad z < 0$$

当 $z^{-1} + n_S < 0$ 时，方程 (1.52) 式成为

$$\frac{1}{n_S} dn_S - \frac{1}{-z^{-1} - n_S} d(-z^{-1} - n_S) = -dn_E, \quad (1.61)$$

解得

$$\ln n_S - \ln[-z^{-1} - n_S] = -n_E + B_3,$$

得 n_S 的解

$$n_S = \frac{-z^{-1}}{\exp[n_E - B_3] + 1} = \frac{-z^{-1}}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_3)] + 1}; \quad (1.62)$$

这里 B_1 、 B_2 、 B_3 皆为待定常量，可与 α_E 联合确定，即式中 $\exp[-(\alpha_E - B_1)]$ 、 $\exp(\alpha_E - B_2)$ 、 $\exp(\alpha_E - B_3)$ 可由系统的粒子总数目确定。

对于方程 (1.52) 式，当 $z \neq 0$ 时，将方程转化形式为

$$\frac{dn_S}{dn_E} + z[n_S + 0.5z^{-1}]^2 - 0.25z^{-1} = 0; \quad (1.63)$$

则由方程 (1.19)、(1.21) 二式得方程 (1.63) 式的双曲正切函数形式解

$$\begin{aligned} n_S &= -0.5z^{-1} + 0.5z^{-1} \tanh[0.5(n_E - B_{\tanh})] \\ &= -0.5z^{-1} + 0.5z^{-1} \tanh[0.5[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_{\tanh})]], \end{aligned} \quad (1.64)$$

这里 B_{\tanh} 为待定常量。

由解 (1.64) 式得

$$\begin{aligned}
 n_s &= 0.5z^{-1}[\tanh[0.5(n_E - B_{\tanh})] - 1] \\
 &= 0.5z^{-1} \frac{-2 \exp[-0.5(n_E - B_{\tanh})]}{\exp[0.5(n_E - B_{\tanh})] + \exp[-0.5(n_E - B_{\tanh})]} \\
 &= \frac{-z^{-1}}{\exp[n_E - B_{\tanh}] + 1} \\
 &= \frac{-z^{-1}}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_{\tanh})] + 1}; \tag{1.65}
 \end{aligned}$$

即解 (1.64) 式与解 (1.62) 式具有相同的形式；由双曲正切函数 (1.64) 式表示 (1.62) 式是统计运算的经典方法之一。

由上述分析得，方程 (1.52) 式 n_s 的条件解 (1.58)、(1.60)、(1.62) 三式分别当 $z = 0$ 、 $z = 1$ 、 $z = -1$ 时，即分别对应着 Maxwell-Boltzmann 统计分布、Bose-Einstein 统计分布及 Fermi-Dirac 统计分布中平均粒子数诸方程表达形式

$$n_s = \exp[-(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} - (\alpha_E - B_1)], \quad z = 0 \tag{1.66}$$

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_2)] - 1}, \quad z = 1 \tag{1.67}$$

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_3)] + 1}, \quad z = -1. \tag{1.68}$$

作为同是方程 (1.52) 式的解析解，Maxwell-Boltzmann 统计分布方程与 Bose-Einstein 统计分布方程及 Fermi-Dirac 统计分布方程具有相并列的重要地位，乃至更具有基础性及前导性；三个方程内涵差别在于能量的连续与离散，其具有相通的形式而非前者仅为后二者极限条件下的平凡特例。

从方程 (1.52) 式解的数学对称性层面分析，取 $n_s < 0$ ，将方程 (1.57)、(1.59)、(1.61) 三式分别转化为下面三式形式

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{-n_s} d(-n_s) &= -dn_E, \quad z = 0 \\
 \frac{1}{-n_s} d(-n_s) - \frac{1}{z^{-1} + n_s} d(z^{-1} + n_s) &= -dn_E, \quad z^{-1} + n_s > 0 \\
 \frac{1}{-n_s} d(-n_s) - \frac{1}{-z^{-1} - n_s} d(-z^{-1} - n_s) &= -dn_E; \quad z^{-1} + n_s < 0
 \end{aligned}$$

分别解得

$$\begin{aligned}
 \ln(-n_s) &= -n_E + B_4, \\
 \ln(-n_s) - \ln[z^{-1} + n_s] &= -n_E + B_5, \\
 \ln(-n_s) - \ln[-z^{-1} - n_s] &= -n_E + B_6;
 \end{aligned}$$

进而分别得三个解析解

$$\begin{aligned}
 n_s &= -\exp[-(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} - (\alpha_E - B_4)], \\
 n_s &= -\frac{z^{-1}}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_5)] + 1}, \\
 n_s &= -\frac{-z^{-1}}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_6)] - 1};
 \end{aligned}$$

故有分别与方程 (1.66)、(1.67)、(1.68) 三式相对称的解析解

$$n_s = -\exp[-(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} - (\alpha_E - B_4)], \quad z = 0 \quad (1.69)$$

$$n_s = -\frac{1}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_5)] + 1}, \quad z = 1 \quad (1.70)$$

$$n_s = -\frac{1}{\exp[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E - B_6)] - 1}; \quad z = -1 \quad (1.71)$$

这里 B_4 、 B_5 、 B_6 皆为待定常量。

方程 (1.52) 式有二个常量解 (1.54)、(1.55) 二式, 有三对对称解析解 (1.66)、(1.67)、(1.68) 三式与解 (1.69)、(1.70)、(1.71) 三式, 计 8 个解析解; 对比对称解 (1.66)、(1.67)、(1.68) 三式与解 (1.69)、(1.70)、(1.71) 三式, 则在解的数学对称性上表明, 当 $z = 0$ 时 Maxwell-Boltzmann 统计分布方程正、负二种形式自对称, 当 $z = 1$ 时 Bose-Einstein 统计分布方程形式与负的 Fermi-Dirac 统计分布方程形式相对称, 当 $z = -1$ 时 Fermi-Dirac 统计分布方程形式与负的 Bose-Einstein 统计分布方程形式相对称; 这种 Bose 子 (Boson) 与 Fermi 子 (Fermion) 二种统计分布形式的数学对称性关系 (互为潜隐) 对于深入研究 Bose 子与 Fermi 子二者的零点能量关系的背景基础、相互之间的转化机理、及其共同的原初粒子物理性质等方面都具有相应的指向及引导意义。

对于方程 (1.48) 式, 特别简单地, 在 $z_0 \neq 0$ 、 $z = 0$ 时的极简略情况下, 有 n_s 的常系数线性齐次微分方程形式

$$z_0 \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} + \frac{dn_s}{dn_E} + n_s = 0. \quad (1.72)$$

方程 (1.72) 式的特征方程为

$$z_0 \gamma_s^2 + \gamma_s + 1 = 0;$$

二个特征根为

$$\gamma_{s1} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4z_0}}{2z_0}, \quad \gamma_{s2} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4z_0}}{2z_0};$$

故当 $1 > 4z_0 > 0$ 时 $0.25 > z_0 > 0$, γ_s 有二不相等负实根 $-1 > \gamma_{s1} > -2$, $\gamma_{s2} < -2$; 当 γ_{s1} 分别为 -1.01 、 -1.1 、 -1.5 、 -1.9 时, γ_{s2} 则分别对应着 -100.51 、 -10.9 、 -3.0 、 -2.1 ; 方程 (1.72) 式的解为

$$\begin{aligned} n_s &= B_7 \exp[\gamma_{s1} n_E] + B_8 \exp[\gamma_{s2} n_E] \\ &= B_7 \exp[\gamma_{s1} [(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + \alpha_E]] + B_8 \exp[\gamma_{s2} [(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + \alpha_E]]; \end{aligned} \quad (1.73)$$

当 $4z_0 = 1$ 时 $z_0 = 0.25$, γ_s 有二相等负实根

$$\gamma_{s1} = \gamma_{s2} = -0.5z_0^{-1} = -2;$$

方程 (1.72) 式的解为

$$\begin{aligned} n_s &= [B_9 + B_{10} n_E] \exp[-2n_E] \\ &= [B_9 + B_{10} [(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + \alpha_E]] \exp[-2[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + \alpha_E]]; \end{aligned} \quad (1.74)$$

当 $4z_0 > 1$ 时 $z_0 > 0.25$, γ_s 有二共轭复根, 复根的实部

$$\text{Re} \gamma_{s1} = \text{Re} \gamma_{s2} = -0.5z_0^{-1}, \quad -2 < -0.5z_0^{-1} < 0;$$

复根的虚部

$$\text{Im} \gamma_{s1} = -\text{Im} \gamma_{s2} = b_s = 0.5z_0^{-1} \sqrt{4z_0 - 1}, \quad 1 > b_s > 0;$$

方程 (1.72) 式的解为

$$\begin{aligned} n_s &= \exp[-0.5z_0^{-1} n_E] [B_{11} \cos[b_s n_E] + B_{12} \sin[b_s n_E]] \\ &= \exp[-0.5z_0^{-1} [(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + \alpha_E]] [B_{11} \cos[b_s [(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + \alpha_E]] \\ &\quad + B_{12} \sin[b_s [(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + \alpha_E]]]; \end{aligned} \quad (1.75)$$

这里 B_7 、 B_8 、 B_9 、 B_{10} 、 B_{11} 、 B_{12} 皆为待定常量；部分待定常数可与 α_E 联合确定，即通过系统的粒子总数目及总能量确定。

对于方程 (1.48) 式，作为趋势性探讨，最为简单地，在 $z_0 \neq 0$ 、 $z \neq 0$ 情况下，当

$$\left| z_0 \frac{d^2 n_S}{dn_E^2} \right| \gg \left| \frac{dn_S}{dn_E} + n_S \right|, \quad |zn_S^2| \gg \left| \frac{dn_S}{dn_E} + n_S \right|$$

时，有 n_S 的简略化趋势性微分方程

$$z_0 \frac{d^2 n_S}{dn_E^2} + zn_S^2 = 0. \tag{1.76}$$

将方程 (1.76) 式转化形式为

$$z_0 \frac{dn_S}{dn_E} \frac{d}{dn_S} \frac{dn_S}{dn_E} + zn_S^2 = 0;$$

积分上式得

$$\frac{1}{2} z_0 \left[\frac{dn_S}{dn_E} \right]^2 + \frac{1}{3} zn_S^3 = B_N; \tag{1.77}$$

这里 B_N 为待定常量。

当 $B_N = 0$ 时，得方程 (1.76) 式的一条解为

$$n_S = \frac{-6z_0 z^{-1}}{[n_E + B_Z]^2} = \frac{-6z_0 z^{-1}}{[(E_p - \mu_E)(kT)^{-1} + (\alpha_E + B_Z)]^2}, \tag{1.78}$$

式中 B_Z 为待定常量，其可与待定参量 α_E 联合作为一个参量 $(\alpha_E + B_Z)$ 通过系统的粒子总数目确定。

上述关于粒子统计分布的方程描述及分析过程是简略趋势性的，诸参量及方程形式的进一步解析还需深入研究予以机理阐释。

2 连接方程的部分曲线形态及一般性探讨

依据方程 (1.4) 式在对自然饱和过程描述时，部分地有下图 2-1 的 18 种曲线形态，其中包含着方程 (1.21) 式中的 2 种双曲正切函数曲线形式；依据方程 (1.4) 式统一描述的近于极限状态的饱和过程与蠕变过程趋势性曲线如图 2-2 所示。

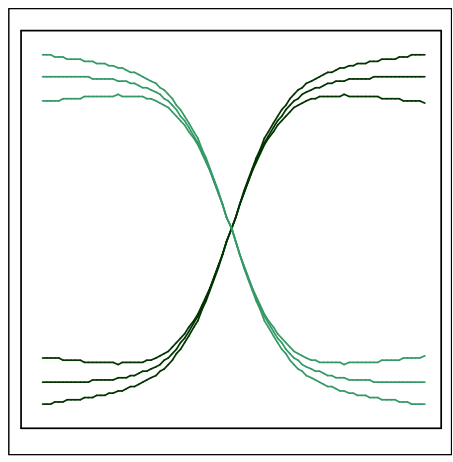


图 2-1 自然饱和过程趋势性方程曲线图
Fig. 2-1 The curves figure of the tendency equations of natural saturation process

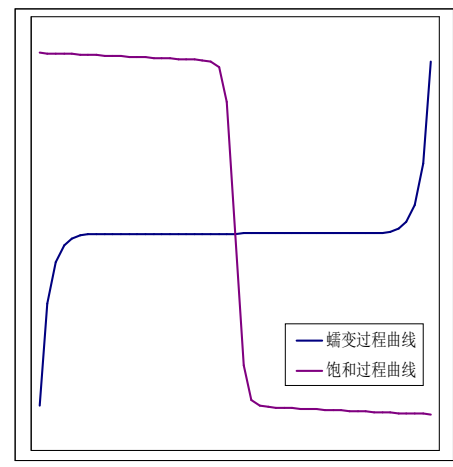


图 2-2 近于极限状态的饱和过程和蠕变过程趋势性方程曲线图 (卅、卅)
Fig. 2-2 The curve figure of tendency equation of saturation process and creep process near the limit state(卅 and 卅)

在对诸如金属或岩石材料蠕变过程描述时则有曲线形态：

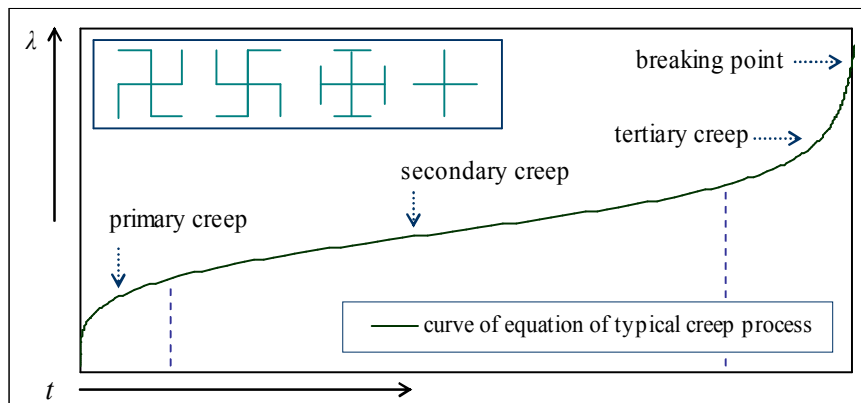


图 2-3 金属或岩石材料典型蠕变过程趋势性方程曲线图

Fig. 2-3 The curve figure of tendency equation of typical creep process for metal or rock material

在趋势描述层面，对于理想饱和过程，诸如一个国家年度能源消费总量数据 E （油当量，百万吨）与年度 GDP 数据 G （1990 年 GK 10 亿美元）之间在趋势上可由方程（1.4）式、甚至是方程（1.18）式的动力学方程形式描述

$$\omega_{EG1} \frac{dE}{dG} + \omega_{EG2} \frac{d^2 E}{dG^2} + \xi_{EGIE} + \xi_{EG1} E + \xi_{EG2} E^2 = \psi_{EGEE}, \quad E(G \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

这里取 ω_{EG1} 、 ω_{EG2} 、 ξ_{EGIE} 、 ξ_{EG1} 、 ξ_{EG2} 、 ψ_{EGEE} 为待定常数；该方程具有极限与波动的复合性质。最为简单地，在平滑波动的情况下，当 $\omega_{EG2} = 0$ 、 $\xi_{EG2} = 0$ 时，方程（2.1）式转化为（1.20）式形式，则其解可即由（1.22）式在条件 $E(G \rightarrow 0) \rightarrow 0$ 时给出

$$E = \xi_{EG1}^{-1} [\psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}] [1 - \exp[-\xi_{EG1} \omega_{EG1}^{-1} G]] = E_{lim} [1 - \exp[-\alpha_{EG} G]], \quad (2.2)$$

式中 $\alpha_{EG} = \xi_{EG1} \omega_{EG1}^{-1}$ ， $E_{lim} = \xi_{EG1}^{-1} [\psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}]$ 为 E 的极限值。

例如对于美国从 1860 年到 2006 年间合计 147 组的年度 GDP 数据及能源消费总量数据，方程（2.2）式的一具体简略参考形式为

$$E = 2785 [1 - \exp[-2.60 \times 10^{-4} G]]; \quad (2.3)$$

其曲线形态如图 2-4 所示。

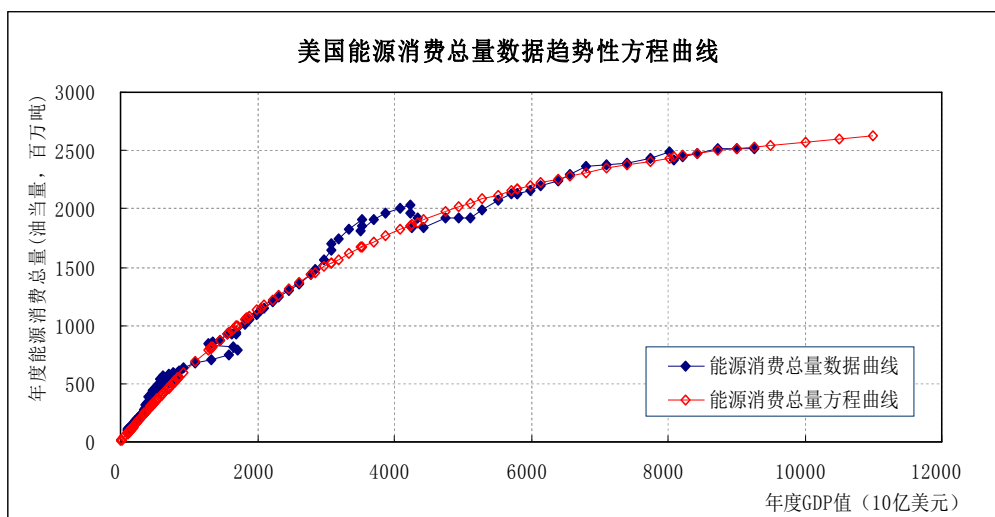


图 2-4 美国年度能源消费总量趋势性方程曲线图

Fig. 2-4 The curve figure of tendency fitting equation of the total annual energy consumption in the United States

方程（2.3）式表明美国阶段性的年度能源消费总量趋势性极限特征最大值为

$$E_{lim} = 2785. \quad (2.4)$$

在此值之后，美国年度能源消费总量将会缓慢增长或衰减，然后进入下一阶段快速变化。这里宜说明的是，在数据处理中，一种比较典型的数据内插方程为

$$y_{i+1} = 0.25y_i + 0.5y_{i+1} + 0.25y_{i+2},$$

得

$$y_i = 2y_{i+1} - y_{i+2} \quad (2.5)$$

经对本组美国从 1860 年到 1948 年能源消费总量数据的年度分析, 可知其先预置数据 1950 年、1949 年二个消费总量数据, 然后每 5 年预置一次总量数据, 附加 1903、1888 二年的预置总量数据, 再根据方程 (2.5) 式进行内插计算, 计算相对误差为 0; 即美国能源消费总量数据从 1860 年到 1948 年, 有 19 个预置数据, 其余 69 个总量数据为外推 (或内插) 数据, 故方程 (2.3) 式、(2.4) 式仅具有数据骨架主线趋势性参考意义。

依据方程 (1.18) 式还可描述如一个国家年度人口数据 P (千人) 与年度 GDP 数据 G (1990 年 GK 10 亿美元) 间之阶段性具有饱和及波动性质的趋势方程

$$\varpi_{PG1} \frac{dP}{dG} + \varpi_{PG2} \frac{d^2P}{dG^2} + \xi_{PG2} (P - P_0)^2 + \nu_{PG0} = 0, \quad G(P \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

这里取 ϖ_{PG1} 、 ϖ_{PG2} 、 P_0 、 ξ_{PG2} 、 ν_{PG0} 为常数。特别地在 $\varpi_{PG2} = 0$ 时, 约化常数 $\varpi_{PG1} = 1$, 则其一最简略表述为 (1.19) 式形式, 进而当 $\nu_{PG0} = 0$ 时方程解由 (1.21) 式最简化地给出

$$P = P_0 + \frac{\xi_{PG2}^{-1}}{G - [\xi_{PG2} P_0]^{-1}} = P_{lim} - \frac{P_{lim} G_0}{G + G_0} = P_{lim} \left[1 - \frac{G_0}{G + G_0} \right]; \quad (2.7)$$

式中 $G_0 = -[\xi_{PG2} P_0]^{-1}$ 、 $P_{lim} = P_0$ 为待定常数; 可见 G_0 为 G 的初始相位值, P_0 为 P 的趋势性极限值, 待定系数 ξ_{PG2} 的物理意义为 $\xi_{PG2} = -[P_{lim} G_0]^{-1}$ 。

对于英国从 1830 年到 2006 年间合计 177 组的年度 GDP 数据及人口数据特征, 有最简化方程 (2.7) 式的具体参考形式为

$$P = 65250.318 \left[1 - \frac{106.44347}{G + 106.44347} \right]; \quad (2.8)$$

其曲线形态如图 2-5 所示。

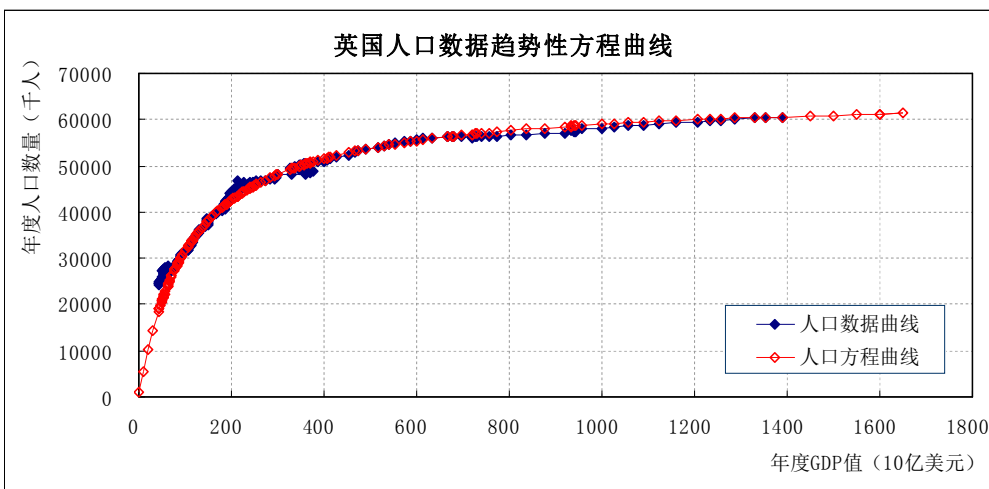


图 2-5 英国年度人口数据趋势性方程曲线图

Fig. 2-5 The curve figure of tendency fitting equation of the annual population in the United Kingdom

可见由最简化方程 (2.8) 式给出的英国阶段性人口数据趋势性极限特征最大值为

$$P_{lim} = 65250.318. \quad (2.9)$$

上述饱和过程与蠕变过程的图 2-1 及图 2-3 来自参考资料 1, 图 2-4、2-5 中数据参考相关交流资料, 方程中的系数乃至方程形式, 将由数据内容的更替及扩充而随之相应改变; 在充分考虑各参量数据间联系的同时, 能从纷繁的数据中确定简单有效的参量关系及其机理, 明确方程中诸系数的物理内涵以进行相应的动力学层面上趋势性预测计算, 仍是值得深入研究的; 其分析表明在趋势层面上, 饱和过程与蠕变过程皆是同一类方程的不同体现形式。

由方程 (2.1)、(2.6) 二式, 当 $\varpi_{EG2} = 0$ 、 $\xi_{EG2} = 0$, 及 $\varpi_{PG2} = 0$ 、约化常数 $\varpi_{PG1} = 1$ 时, 可得国家年度能源消费总量 E 与人口数量 P 之间的简略性趋势方程

$$\frac{\varpi_{EG1}}{\xi_{EG1}} \frac{dE}{E - \xi_{EG1}^{-1} [\psi_{EGEE} - \xi_{EGIE}]} = \frac{1}{\xi_{PG2}} \frac{dP}{(P - P_0)^2 + \nu_{PG0} \xi_{PG2}^{-1}} \quad (2.10)$$

下面通过讨论方程 (1.10) 式的一般形式

$$y = s_0 + \frac{A_{01} \exp[\alpha_1(x - x_0)] - A_{02} \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{A_{03} \exp[\alpha_3(x - x_0)] + A_{04} \exp[-\alpha_4(x - x_0)]}, \quad (2.11)$$

给出连接方程 (1.4) 式的引申方程形式或更为普适的方程形式。方程中 s_0 、 x_0 、 A_{01} 、 A_{02} 、 A_{03} 、 A_{04} 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 为待定系数。

当在 A_{01} 、 A_{02} 、 A_{03} 、 A_{04} 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 诸待定系数中有等于 0 的情况时，方程 (2.11) 式可适当简化为相应的特例形式；当其皆不为 0 时，设

$$\psi_{nu} = A_{01} \exp[\alpha_1(x - x_0)] - A_{02} \exp[-\alpha_2(x - x_0)], \quad (2.12)$$

$$\psi_{de} = A_{03} \exp[\alpha_3(x - x_0)] + A_{04} \exp[-\alpha_4(x - x_0)]; \quad (2.13)$$

则有

$$\psi_{nu} = A_{01} \exp(-\theta_1) \exp[\alpha_1(x - x_0 + \alpha_1^{-1} \theta_1)] - A_{02} \exp(-\theta_2) \exp[-\alpha_2(x - x_0 - \alpha_2^{-1} \theta_2)], \quad (2.14)$$

式中 θ_1 、 θ_2 为待定系数。

当 $A_{01}A_{02} > 0$ 时，取方程 (2.14) 式中 $A_{01} \exp(-\theta_1) = A_{02} \exp(-\theta_2)$ ， $\alpha_1^{-1} \theta_1 = -\alpha_2^{-1} \theta_2$ ；解得系数

$$\theta_1 = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[A_{01}A_{02}^{-1}], \quad \theta_2 = \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[A_{02}A_{01}^{-1}].$$

方程 (2.14) 式成为

$$\psi_{nu} = A_{nu} [\exp[\alpha_1(x - x_{nu})] - \exp[-\alpha_2(x - x_{nu})]], \quad (2.15)$$

式中

$$A_{nu} = A_{01}[A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}}, \quad x_{nu} = x_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[A_{01}A_{02}^{-1}].$$

同样对于方程 (2.13) 式，当 $A_{03}A_{04} > 0$ 时，可得

$$\psi_{de} = A_{de} [\exp[\alpha_3(x - x_{de})] + \exp[-\alpha_4(x - x_{de})]], \quad (2.16)$$

式中

$$A_{de} = A_{03}[A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)^{-1}}, \quad x_{de} = x_0 - (\alpha_3 + \alpha_4)^{-1} \ln[A_{03}A_{04}^{-1}].$$

由方程 (2.15)、(2.16) 二式得当 $A_{01}A_{02} > 0$ 、 $A_{03}A_{04} > 0$ 时，方程 (2.11) 式成为

$$y = s_0 + \frac{A_{nu} [\exp[\alpha_1(x - x_{nu})] - \exp[-\alpha_2(x - x_{nu})]]}{A_{de} [\exp[\alpha_3(x - x_{de})] + \exp[-\alpha_4(x - x_{de})]]} = s_0 + A \exp[\gamma(x - x_{exp})] \frac{\sinh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x - x_{nu})]}{\cosh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_{de})]}, \quad (2.17)$$

式中

$$A = \frac{A_{nu}}{A_{de}} = \frac{A_{01}[A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}}}{A_{03}[A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)^{-1}}}, \quad \gamma = 0.5[\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4],$$

$$x_{exp} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)x_{nu} - (\alpha_3 - \alpha_4)x_{de}}{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4}.$$

同理可得当 $A_{01}A_{02} < 0$ 、 $A_{03}A_{04} < 0$ 时，方程 (2.11) 式成为

$$y = s_0 + \frac{A_{01} \exp[\alpha_1(x - x_0)] + (-A_{02}) \exp[-\alpha_2(x - x_0)]}{A_{03} \exp[\alpha_3(x - x_0)] - (-A_{04}) \exp[-\alpha_4(x - x_0)]} = s_0 + A \exp[\gamma(x - x_{exp})] \frac{\cosh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x - x_{nu})]}{\sinh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x - x_{de})]}, \quad (2.18)$$

式中

$$A = \frac{A_{01}[-A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}}}{A_{03}[-A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)^{-1}}},$$

$$x_{nu} = x_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[-A_{01}A_{02}^{-1}], \quad x_{de} = x_0 - (\alpha_3 + \alpha_4)^{-1} \ln[-A_{03}A_{04}^{-1}].$$

当 $A_{01}A_{02} > 0$ 、 $A_{03}A_{04} < 0$ 时，方程 (2.11) 式成为

$$\begin{aligned}
 y &= s_0 + \frac{A_{01} \exp[\alpha_1(x-x_0)] - A_{02} \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{A_{03} \exp[\alpha_3(x-x_0)] - (-A_{04}) \exp[-\alpha_4(x-x_0)]} \\
 &= s_0 + A \exp[\gamma(x-x_{\text{exp}})] \frac{\sinh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_{\text{nu}})]}{\sinh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x-x_{\text{de}})]}, \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{A_{01}[A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}}}{A_{03}[-A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)^{-1}}}, \\
 x_{\text{nu}} &= x_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[A_{01}A_{02}^{-1}], \quad x_{\text{de}} = x_0 - (\alpha_3 + \alpha_4)^{-1} \ln[-A_{03}A_{04}^{-1}].
 \end{aligned}$$

当 $A_{01}A_{02} < 0$ 、 $A_{03}A_{04} > 0$ 时，方程 (2.11) 式成为

$$\begin{aligned}
 y &= s_0 + \frac{A_{01} \exp[\alpha_1(x-x_0)] + (-A_{02}) \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{A_{03} \exp[\alpha_3(x-x_0)] + A_{04} \exp[-\alpha_4(x-x_0)]} \\
 &= s_0 + \frac{A_{\text{nu}}[\exp[\alpha_1(x-x_{\text{nu}})] + \exp[-\alpha_2(x-x_{\text{nu}})]]}{A_{\text{de}}[\exp[\alpha_3(x-x_{\text{de}})] + \exp[-\alpha_4(x-x_{\text{de}})]]} \\
 &= s_0 + A \exp[\gamma(x-x_{\text{exp}})] \frac{\cosh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_{\text{nu}})]}{\cosh[0.5(\alpha_3 + \alpha_4)(x-x_{\text{de}})]}, \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{A_{01}[-A_{02}A_{01}^{-1}]^{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}}}{A_{03}[A_{04}A_{03}^{-1}]^{\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)^{-1}}}, \\
 x_{\text{nu}} &= x_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \ln[-A_{01}A_{02}^{-1}], \quad x_{\text{de}} = x_0 - (\alpha_3 + \alpha_4)^{-1} \ln[A_{03}A_{04}^{-1}].
 \end{aligned}$$

方程 (2.18) ~ (2.20) 三式中 γ 、 x_{exp} 二个系数仍皆同于方程 (2.17) 式中的表达式。

方程 (2.17) ~ (2.20) 式及方程 (1.11) 式可作为较 (1.4) 式更普适的连接方程形式予以深入研究应用时参考。

3 连接方程的部分简略应用

下面对连接方程 (1.4) 式部分简略应用是与目前各相应领域已有理论体系描述并行的探索方向，属于唯象分析方法，不具有原理层面解析意义，是暂时的、过渡性的描述，较为深入准确的阐释还需要建立非线性动力学方程 (1.18) 中诸待定系数与现象固有特征参数的关系，给出极限解、波动解，及极限与波动复合解等诸条件解析解、近似等效解析解形式。

3.1 岩石及单晶高温合金材料蠕变特性曲线趋势性拟合方程

本节介绍岩石及合金材料蠕变特性曲线的趋势拟合方程，蠕变数据特征来自资料 2~5。

基于参考资料 3 中的砂岩蠕变特性曲线数据 (应变 ε /%—总时间间隔 t /min)，依据方程 (1.4) 式，其蠕变过程可用 $\varepsilon(t)$ 形式及 $t(\varepsilon)$ 形式描述，其中的 $t(\varepsilon)$ 形式趋势性拟合方程为

$$t = 40.2 + 40.2 \frac{\exp[32.25(\varepsilon - 0.672)] - \exp[-32.20(\varepsilon - 0.672)]}{2 \cosh[32.00(\varepsilon - 0.672)]}; \tag{3.1}$$

方程的拟合曲线如图 3-1 所示。

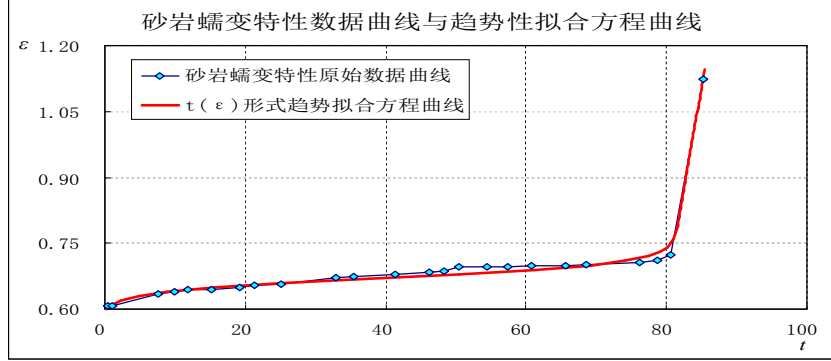


图 3-1 砂岩蠕变特性 ε /%— t /min 数据趋势性拟合方程曲线 (图中砂岩蠕变特性原始数据来自参考资料 3)

Fig. 3-1 The curve figure of tendency fitting equation of the strain-time data in creep characteristics of sandstone (The original data of the strain-time in creep characteristics of sandstone was given by the reference 3)

基于参考资料 4 中的单晶高温合金蠕变数据（真应变 $\varepsilon / \%$ —时间 t/h ），依据方程（1.4）式及（2.17）式，其 $\varepsilon(t)$ 形式的趋势性拟合方程为

$$\varepsilon = [1 + 0.0068(t - 94)] \left[0.83 + 8.0 \times 10^{-5} \frac{\exp[0.0895(t - 94)] - \exp[-0.105(t - 94)]}{2 \cosh[0.005(t - 94)]} \right]; \quad (3.2)$$

方程曲线如图 3-2 所示。

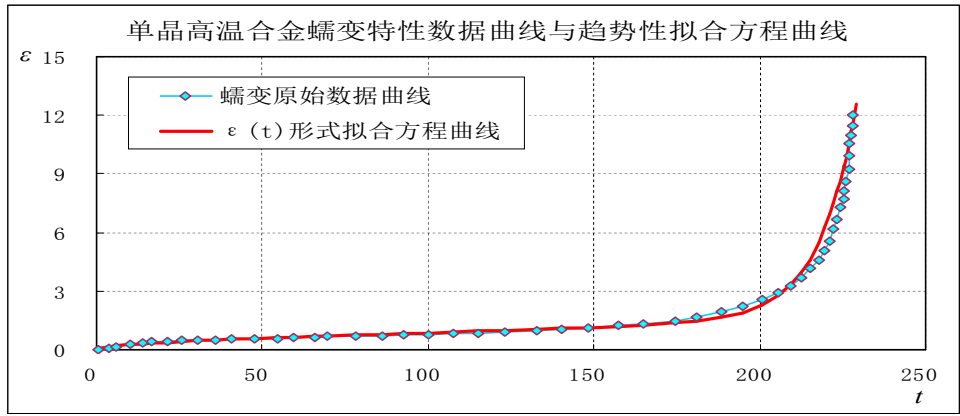


图 3-2 单晶高温合金真应变 $\varepsilon / \%$ —时间 t/h 蠕变数据趋势性拟合方程曲线
(图中单晶高温合金蠕变原始数据来自参考资料 4)

Fig. 3-2 The curve figure of tendency fitting equation of the true strain-time creep data of single-crystal superalloy (The original data of the true strain-time creep of single-crystal superalloy was given by the reference 4)

基于参考资料 5 中的单晶高温合金蠕变数据（应变 $\varepsilon / \%$ —时间 t/h ），依据方程（1.4）式及（2.17）式，其 $t(\varepsilon)$ 形式及 $\varepsilon(t)$ 形式的趋势性拟合方程分别为

$$t = 187 + 187 \frac{\exp[1.264(\varepsilon - 2.6)] - \exp[-1.252(\varepsilon - 2.6)]}{2 \cosh[1.253(\varepsilon - 2.6)]}, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = [1 + 0.002(t - 197)] \left[2.6 + 6.0 \times 10^{-7} \frac{\exp[0.131(t - 197)] - \exp[-0.1255(t - 197)]}{2 \cosh[0.05(t - 197)]} \right]; \quad (3.4)$$

二个方程曲线如图 3-2 所示，可见 $\varepsilon(t)$ 形式（红色线）较 $t(\varepsilon)$ 形式（蓝色线）拟合效果好。

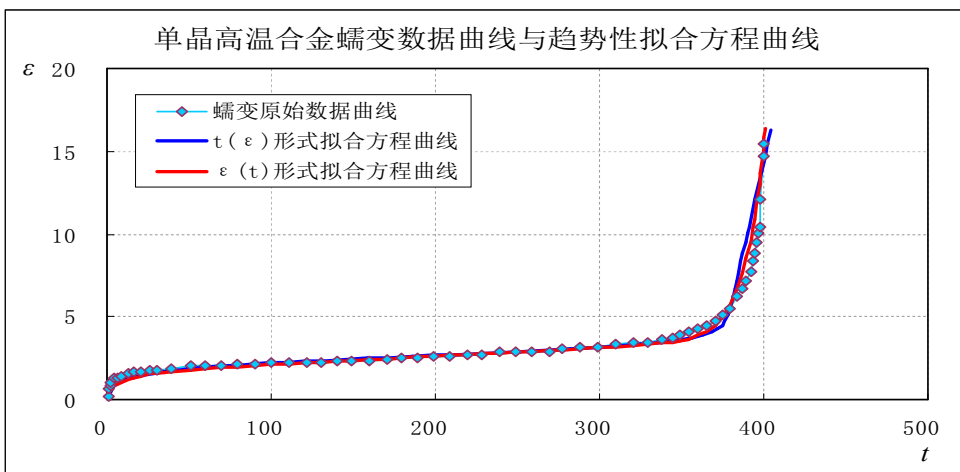


图 3-3 单晶高温合金应变 $\varepsilon / \%$ —时间 t/h 蠕变数据趋势性拟合方程曲线
(图中单晶高温合金蠕变原始数据来自参考资料 5)

Fig. 3-3 The curve figure of tendency fitting equation of the strain-time creep data of single-crystal superalloy (The original data of the strain-time creep characteristics of single-crystal superalloy was given by the reference 5)

3.2 半导体分立器件 V—A 特性曲线拟合方程

一般地，对于半导体分立器件，二极管（或 PN 结）的 V—A 特性曲线部分地或整体显著地具有蠕变曲线性质；三极管的输入 V—A 特性曲线与二极管 V—A 特性曲线类似，而输

出 V-A 特性曲线在饱和区及放大区则具有饱和曲线性质；其中器件在击穿区具有蠕变曲线性质，即极限上器件的电学正向击穿及反向击穿特征与材料的力学断裂演变特征相对应。

依据方程 (1.4) 式，同时基于二极管（或 PN 结）的 V-A 特性曲线特征，其电压 U — 电流 I 的趋势性拟合方程形式为

$$I = I_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(U - U_0)] - \exp[-\alpha_2(U - U_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(U - U_0)]}, \quad (3.5)$$

式中 U_0 、 A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 为待定系数， $I(U = U_0) = I_0$ 。

仅是在曲线趋势性拟合方面，还可表示为方程 (3.5) 式的坐标置换函数形式

$$U = U_{R0} + A_R \frac{\exp[\alpha_{R1}(I - I_{R0})] - \exp[-\alpha_{R2}(I - I_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_{R3}(I - I_{R0})]}, \quad (3.6)$$

这里 I_{R0} 、 A_R 、 α_{R1} 、 α_{R2} 、 α_{R3} 为待定系数， $U(I = I_{R0}) = U_{R0}$ 。

其中对于部分二极管，还可按正向特性与反向特性分别拟合其 V-A 曲线，以得到更为精确的拟合方程。

基于方程 (3.5)、(3.6) 二式，也可对部分反常 V-A 特性曲线局部进行趋势性拟合。

对于双向触发二极管，其 V-A 特性曲线的电压 U — 电流 I 趋势性拟合方程为 (1.1)、(1.2) 二式的复合形式

$$U = U_{01} \frac{\sinh(\alpha_1 I)}{\cosh(\alpha_2 I)} + U_{02} \tanh(\beta I), \quad (3.7)$$

这里 U_{01} 、 U_{02} 、 α_1 、 α_2 、 β 为待定系数， $U(I = 0) = 0$ ， $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ ， $\beta \sim \alpha_1$ 。

一个双向触发二极管 V-A 特性的趋势性方程曲线如图 3-4 所示。

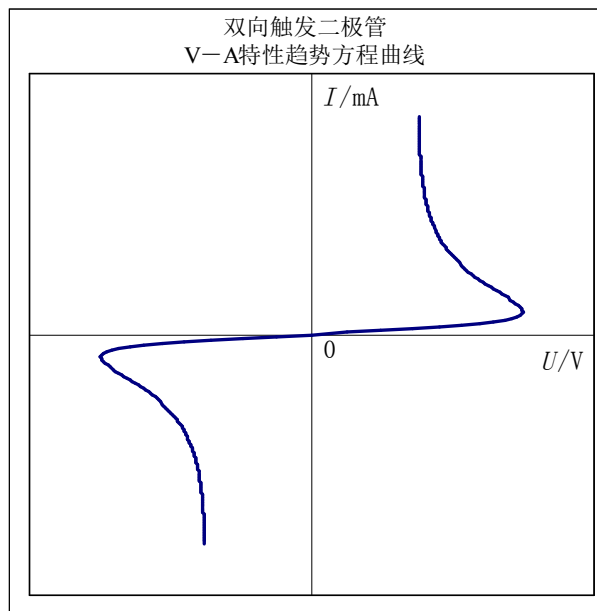


图 3-4 双向触发二极管 V-A 特性的趋势方程曲线

Fig. 3-4 The curve figure of tendency equation of the Volt-Ampere characteristics of the Bi-directional trigger diode

对于氧化锌 PN 结，基于其特性曲线性质^[6]，参照方程 (3.5)、(3.6) 二式的形式，可得其电压 U/V 与电流密度 $J/10^6 \text{ mA m}^{-2}$ 的 $U(J)$ 形式及 $J(U)$ 形式趋势性拟合方程分别为

$$U = -2.3 + 7.0 \frac{\exp[1.531(J + 0.15)] - \exp[-1.536(J + 0.15)]}{2 \cosh[1.500(J + 0.15)]}, \quad (3.8)$$

$$J = -0.16 + 0.06 \frac{\exp[0.58(U + 2.5)] - \exp[-0.59(U + 2.5)]}{2 \cosh[0.008(U + 2.5)]}; \quad (3.9)$$

方程曲线如图 3-5 所示，可见方程 (3.9) 式（红色线）比 (3.8) 式（深蓝色线）拟合较好。

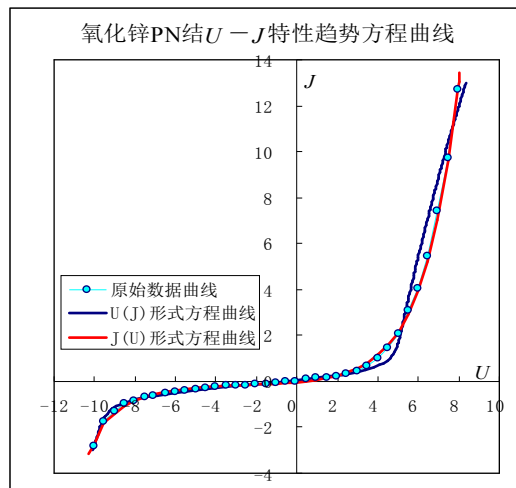


图 3-5 氧化锌 PN 结 $U/V-J/10^6 \text{mA m}^{-2}$ 特性趋势方程曲线
(图中氧化锌 PN 结 $U-J$ 特性数据来自参考资料 6)

Fig. 3-5 The curve figure of tendency equation of the Voltage-Current density characteristics of the ZnO p-n junction
(The original data of the Voltage-Current density characteristics was given by the reference 6)

对于三极管，其在放大区及饱和区的输出 $V-A$ 特性曲线趋势拟合方程可表示为

$$I_C = I_{Cs0} + A_s \frac{\exp[\alpha_{s1}(U_{CE} - U_{CEs0})] - \exp[-\alpha_{s2}(U_{CE} - U_{CEs0})]}{2 \cosh[\alpha_{s3}(U_{CE} - U_{CEs0})]}, \quad (3.10)$$

式中 U_{CEs0} 、 A_s 、 α_{s1} 、 α_{s2} 、 α_{s3} 为待定系数， $I_C(U_{CE} = U_{CEs0}) = I_{Cs0}$ 。

在击穿区的趋势性方程可直接应用 (3.10) 式描述，也可用如下方程予以趋势性拟合

$$U_{CE} = U_{CEbr0} + A_{br} \frac{\exp[\alpha_{br1}(I_C - I_{Cbr0})] - \exp[-\alpha_{br2}(I_C - I_{Cbr0})]}{2 \cosh[\alpha_{br3}(I_C - I_{Cbr0})]}, \quad (3.11)$$

式中 I_{Cbr0} 、 A_{br} 、 α_{br1} 、 α_{br2} 、 α_{br3} 为待定系数， $U_{CE}(I_C = I_{Cbr0}) = U_{CEbr0}$ 。

方程 (3.11) 式的曲线如图 3-6 所示；其与图 2-3 相比较表明器件的电学击穿过程与材料的力学断裂过程相对应，皆可应用方程 (1.4) 式乃至其复合或叠加形式予以趋势性描述。

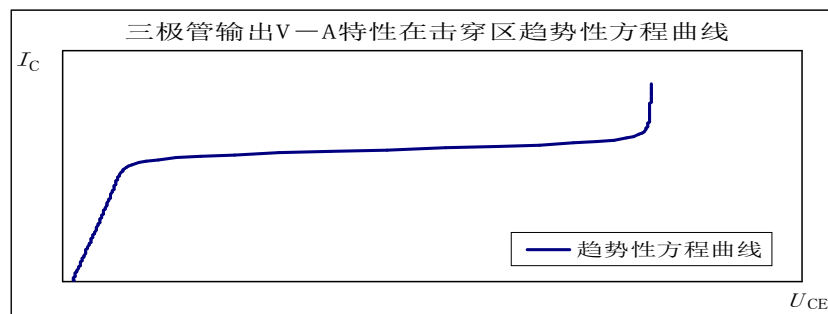


图 3-6 三极管输出 $V-A$ 特性在击穿区趋势性方程曲线

Fig. 3-6 The curve figure of tendency equation of the Output Volt-Ampere characteristics in the breakdown region of the triode

依据方程 (3.10) 式可得一 NPN 型三极管在放大区及饱和区 $V-A$ 特性数据的趋势性拟合方程，其可简化为方程 (1.3) 式的形式，方程略；方程曲线如图 3-7 所示。

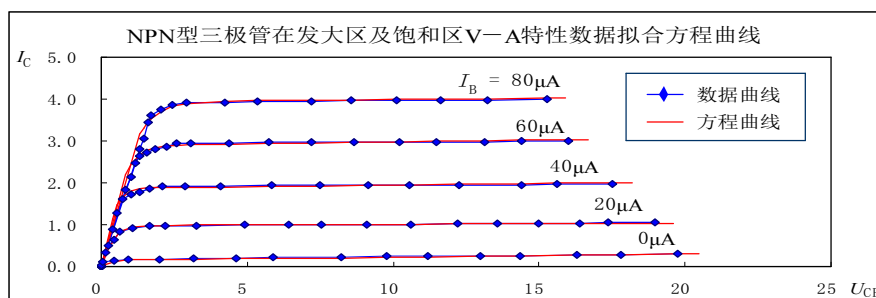


图 3-7 三极管 $V-A$ 特性数据 ($U_{CE}/V-I_C/\text{mA}$) 在放大区及饱和区的趋势性方程曲线

Fig. 3-7 The curve figure of tendency equation of the Volt-Ampere data in the active and saturation regions of the triode

3.3 超导材料在零电阻区域附近 $R-T$ 曲线及超导双晶结 $I-U$ 曲线趋势性拟合方程

对于超导材料在零电阻附近区域的 $R-T$ 数据曲线，一般都具有显著的趋势性饱和过程特征。因 $R(0 < T \leq T_{c,0}) = 0$ ，参照方程 (1.4) 及 (1.12) 二式，故有 $\alpha_3 = \alpha_2$ ，其趋势性拟合方程为

$$R = [1 + \tau(T - T_{R0})] \left[R_0 + A_1 \tanh[\alpha_0(T - T_{R0})] + A_2 \frac{\exp[\alpha_1(T - T_{R0})] - \exp[-\alpha_2(T - T_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_2(T - T_{R0})]} \right], \quad (3.12)$$

式中 τ 、 A_1 、 A_2 、 α_0 、 α_1 、 α_2 为待定系数， $T_{R0} = T_{c,m}$ ， $R(T = T_{R0}) = R_0$ ；一般地，可取 $A_1 + A_2 \approx R_0$ ， $\alpha_0 \approx 0.5(\alpha_1 + \alpha_2)$ 。

方程 (3.12) 式的形式也适用于零电阻率附近区域的 $\rho - T$ 曲线趋势方程描述

$$\rho = [1 + \sigma(T - T_{\rho 0})] \left[\rho_0 + B_1 \tanh[\beta_0(T - T_{\rho 0})] + B_2 \frac{\exp[\beta_1(T - T_{\rho 0})] - \exp[-\beta_2(T - T_{\rho 0})]}{2 \cosh[\beta_2(T - T_{\rho 0})]} \right], \quad (3.13)$$

式中 σ 、 B_1 、 B_2 、 β_0 、 β_1 、 β_2 为待定系数， $B_1 + B_2 = \rho_0$ ， $\beta_0 = 0.5(\beta_1 + \beta_2)$ ， $\rho(T = T_{\rho 0}) = \rho_0$ 。

方程 (3.13) 式在 $\beta_1 < \beta_2$ 时的一典型 $\rho - T$ 曲线如图 3-8 所示。

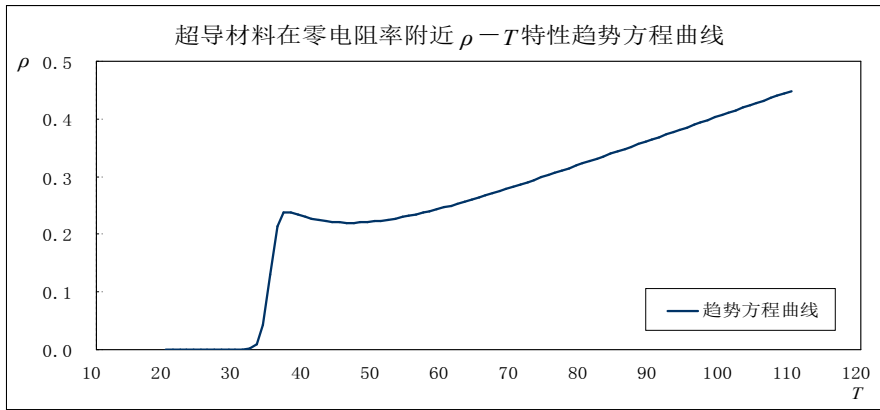


图 3-8 超导材料在零电阻率附近区域电阻率 $\rho/\text{m}\Omega \text{cm} - T/\text{K}$ 特性趋势性方程曲线

Fig. 3-8 The curve figure of tendency equation of the resistivity-absolute temperature characteristics near the zero resistivity value for the superconducting material

当 $A_1 \gg A_2$ 、 $B_1 \gg B_2$ 时，方程 (3.12)、(3.13) 二式成为

$$R = R_0 [1 + \tau(T - T_{R0})] [1 + \tanh[\alpha_0(T - T_{R0})]]; \quad (3.14)$$

$$\rho = \rho_0 [1 + \sigma(T - T_{\rho 0})] [1 + \tanh[\beta_0(T - T_{\rho 0})]]. \quad (3.15)$$

当 $A_1 \ll A_2$ 、 $B_1 \ll B_2$ 时，方程 (3.12)、(3.13) 二式成为

$$R = R_0 [1 + \tau(T - T_{R0})] \left[1 + \frac{\exp[\alpha_1(T - T_{R0})] - \exp[-\alpha_2(T - T_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_2(T - T_{R0})]} \right], \quad (3.16)$$

$$\rho = \rho_0 [1 + \sigma(T - T_{\rho 0})] \left[1 + \frac{\exp[\beta_1(T - T_{\rho 0})] - \exp[-\beta_2(T - T_{\rho 0})]}{2 \cosh[\beta_2(T - T_{\rho 0})]} \right]. \quad (3.17)$$

在零电阻或零电阻率附近的 $T > T_{R0}$ 、 $T > T_{\rho 0}$ 区域，当 $\tau(T - T_{R0}) \ll 1$ 、 $\sigma(T - T_{\rho 0}) \ll 1$ 时，方程 (3.16)、(3.17) 二式可进一步简化为

$$R = R_0 + R_0 \frac{\exp[\alpha_1(T - T_{R0})] - \exp[-\alpha_2(T - T_{R0})]}{2 \cosh[\alpha_2(T - T_{R0})]}; \quad (3.18)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 \frac{\exp[\beta_1(T - T_{\rho 0})] - \exp[-\beta_2(T - T_{\rho 0})]}{2 \cosh[\beta_2(T - T_{\rho 0})]}. \quad (3.19)$$

方程 (3.12)、(3.13) 二式主要描述局部曲线, 对于较长程曲线, 可考虑如下方程拟合

$$R = \sum_{j=1}^{n_R} R_j, \quad \rho = \sum_{j=1}^{n_\rho} \rho_j, \quad (3.20)$$

式中 n_R 、 n_ρ 为依据具体曲线特征 (如波动或台阶等曲线起伏细节) 待定的自然数。

基于参考资料 7 中的超导材料电阻率 ($\rho / \text{m}\Omega \text{cm}$)—温度 (T/K) 数据, 依据方程 (3.17)、(3.19) 二式, 可得其第一组数据、第二组数据的趋势性拟合方程分别为

$$\rho = 0.15[1 + 0.0183(T - 27.5)] \left[1 + \frac{\exp[0.863(T - 27.5)] - \exp[-0.860(T - 27.5)]}{2 \cosh[0.860(T - 27.5)]} \right], \quad (3.21)$$

$$\rho = 0.17 + 0.17 \frac{\exp[1.847(T - 54)] - \exp[-1.800(T - 54)]}{2 \cosh[1.800(T - 54)]}; \quad (3.22)$$

二组数据的趋势性拟合方程曲线如图 3-9 所示。

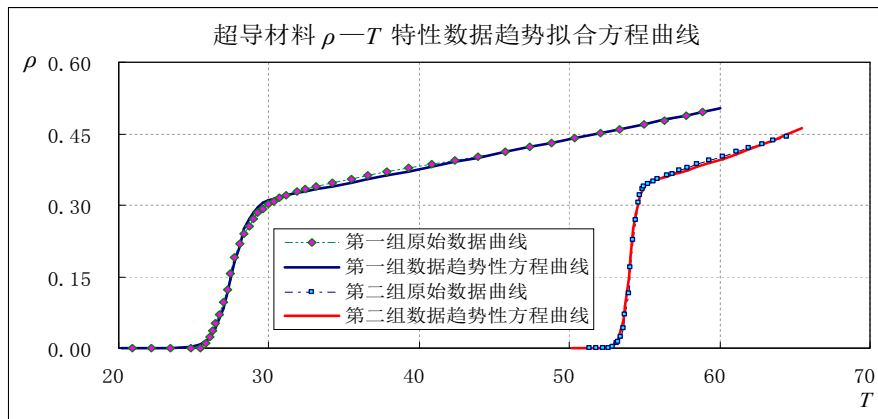


图 3-9 超导材料在零电阻率附近区域电阻率 $\rho / \text{m}\Omega \text{cm}$ — T/K 数据趋势性拟合方程曲线
(图中超导材料 $\rho-T$ 原始数据来自参考资料 7)

Fig. 3-9 The curve figure of tendency fitting equation of the resistivity-absolute temperature characteristics near the zero resistivity value for the superconducting material
(The original data of the resistivity-absolute temperature characteristics was given by the reference 7)

基于参考资料 8 中的超导 YBCO/PCCO 双晶结电阻 R / Ω —温度 T / K 特性曲线形态, 由方程 (3.18)、(3.14) 二式可得其趋势性拟合方程为

$$R = 0.78 + 0.78 \frac{\exp[1.0069(T - 11)] - \exp[-1.0(T - 11)]}{2 \cosh[1.0(T - 11)]} + 0.46[1 + 0.0204(T - 93)][1 + \tanh[1.0(T - 93)]]; \quad (3.23)$$

方程曲线如图 3-10 所示。

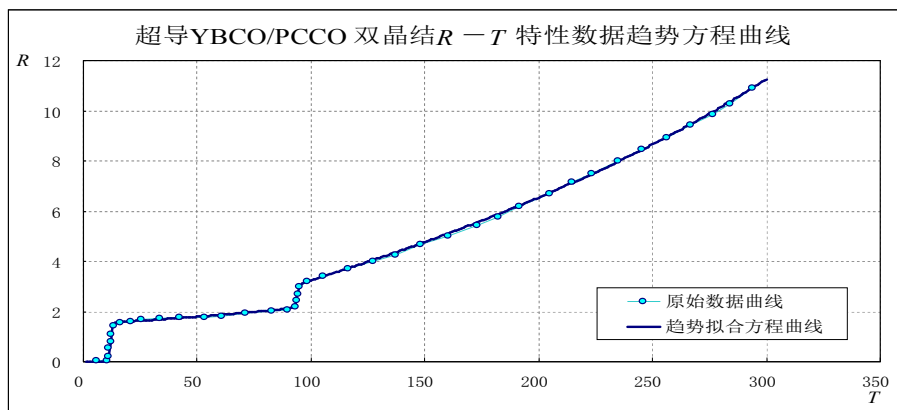


图 3-10 超导 YBCO/PCCO 双晶结在零电阻附近区域电阻 R / Ω —温度 T / K 数据方程曲线
(图中超导 YBCO/PCCO 双晶结电阻 $R-T$ 特性数据来自参考资料 8)

Fig. 3-10 The curve figure of tendency fitting equation of the resistance-absolute temperature characteristics near the zero resistance value for the superconducting YBCO/PCCO bilayer junction
(The original data of the resistance-absolute temperature characteristics was given by the reference 8)

对于高温超导双晶 Josephson 结的直流 $I-U$ 特性曲线，参照方程 (1.4) 及 (1.12) 二式，可得其趋势性拟合方程形式为

$$I = [1 + \eta|U|] \left[I_{bj1} \tanh[\alpha_{bj0}U] + I_{bj2} \frac{\exp(\alpha_{bj1}U) - \exp(-\alpha_{bj2}U)}{2 \cosh(\alpha_{bj3}U)} \right], \quad (3.24)$$

式中 η 、 I_{bj1} 、 I_{bj2} 、 α_{bj0} 、 α_{bj1} 、 α_{bj2} 、 α_{bj3} 为待定系数， $|U|$ 为 U 的绝对值， $I(U=0) = 0$ ， $I_{bj1} + I_{bj2} = I_{JP}$ ， $I_{JP} \approx 0.5I_{JDC}$ ； I_{JDC} 为 Josephson 结直流 $I-U$ 特性曲线在 $U=0$ 附近微小区间 ($\pm \Delta U$) 的电流阶跃幅值。

方程 (3.24) 式在 $\alpha_{bj1} < \alpha_{bj3}$ 、 $\alpha_{bj2} < \alpha_{bj3}$ 时的一典型曲线如图 3-11 所示；图中 $I_{JDC} = 2.0 \text{ mA}$ ， $I_{JP} = 0.5I_{JDC} = 1.0 \text{ mA}$ 。

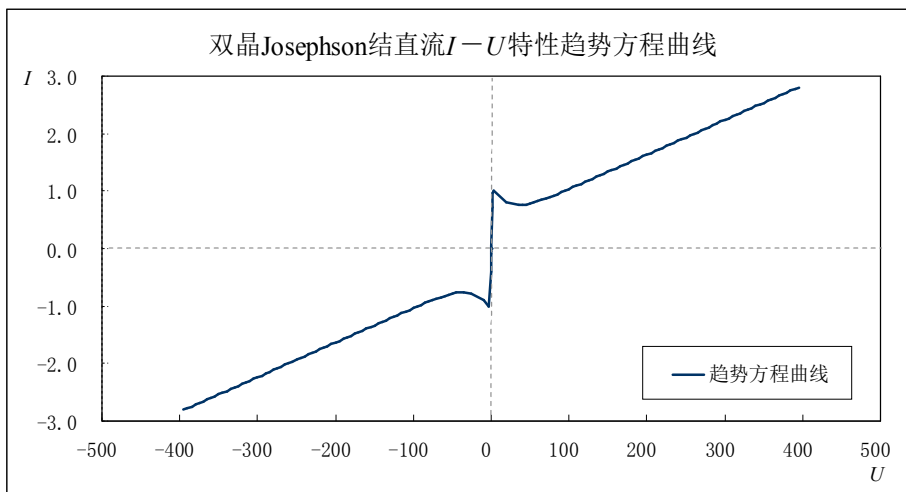


图 3-11 双晶 Josephson 结直流 $I/\text{mA}-U/\mu\text{V}$ 特性趋势方程曲线
Fig. 3-11 The curve figure of tendency equation of the direct current $I-U$ characteristics of the bicrystal Josephson junction

一般地，当 $\alpha_{bj1} = \alpha_{bj2}$ 时，可取 $\alpha_{bj0} = 0.5(\alpha_{bj1} + \alpha_{bj3})$ ，方程 (3.24) 式成为

$$I = [1 + \eta|U|] \left[I_{bj1} \tanh[\alpha_{bj0}U] + I_{bj2} \frac{\sinh(\alpha_{bj1}U)}{\cosh(\alpha_{bj3}U)} \right]. \quad (3.25)$$

当 $I_{bj1} \gg I_{bj2}$ 时，方程 (3.24) 式成为

$$I = I_{JP}[1 + \eta|U|] \tanh[\alpha_{bj0}U]. \quad (3.26)$$

当 $I_{bj1} \ll I_{bj2}$ 时，方程 (3.24) 式成为

$$I = I_{JP}[1 + \eta|U|] \frac{\exp(\alpha_{bj1}U) - \exp(-\alpha_{bj2}U)}{2 \cosh(\alpha_{bj3}U)}. \quad (3.27)$$

在 $\eta|U| \ll 1$ 区域，方程 (3.27) 式简化为

$$I = I_{JP} \frac{\exp(\alpha_{bj1}U) - \exp(-\alpha_{bj2}U)}{2 \cosh(\alpha_{bj3}U)}; \quad (3.28)$$

当 $\alpha_{bj1} = \alpha_{bj2}$ 时，方程 (3.28) 式进一步简化为

$$I = I_{JP} \frac{\sinh(\alpha_{bj1}U)}{\cosh(\alpha_{bj3}U)}. \quad (3.29)$$

对于一具体的双晶 Josephson 结直流 $I/\text{mA}-U/\mu\text{V}$ 特性数据曲线^[9]，由方程 (3.25) 式可得其趋势拟合方程为

$$I = [1 + 0.0109|U|] \left[0.3 \tanh(0.81U) + 0.2 \frac{\sinh(0.80U)}{\cosh(0.82U)} \right]; \quad (3.30)$$

方程曲线如图 3-12 所示。

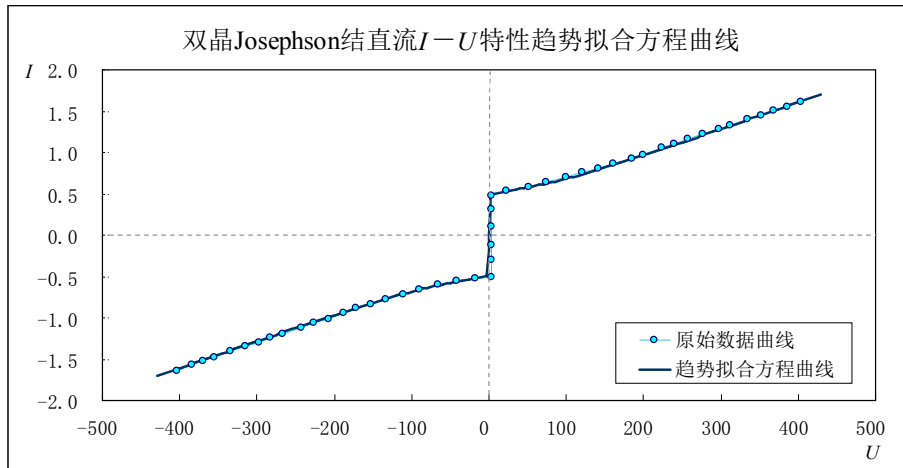


图 3-12 双晶 Josephson 结直流 $I/\text{mA}-U/\mu\text{V}$ 特性数据趋势方程曲线
(图中双晶 Josephson 结 $I-U$ 特性原始数据曲线来自参考资料 9)

Fig. 3-12 The curve figure of tendency fitting equation of the direct current $I-U$ characteristics of the bicrystal Josephson junction

(The original data of the direct current $I-U$ characteristics was given by the reference 9)

上述关于超导材料 R (或 ρ) $-T$ 特性数据趋势拟合方程 (3.12)、(3.13) 二式及双晶 Josephson 结直流 $I-U$ 特性数据趋势拟合方程 (3.24) 式, 由于方程中后二项 (\tanh 和其扩展形式) 的叠加及与线性项相乘, 使得趋势拟合方程具体形式不具有唯一性, 即可有几个方程具体形式都能够在趋势层面上拟合同一条特性数据曲线。

作为初步分析注释, 下面简略探讨 Shapiro 台阶电流阶跃幅值的趋势性方程形式, 其不具有一般的普适性及基础性, 只适合部分曲线, 而且尚不能用于数值精确计算, 仅为在目前传统的微分方程分析方法之外探索一并行描述途径, 亦为微分方程分析方法提供演绎远景的参考框架及数值解析时的参考方程形式。

基于双晶 Josephson 结的直流 $I-U$ 特性曲线趋势方程 (3.24) 式与已知的 Shapiro 台阶电压位置方程

$$U_n = \frac{hf}{2e} n$$

上式中 h 为 Planck 常数, e 为电子电荷量, f 为辐照微波的频率, n 为整数; 及考虑到叠加 Shapiro 台阶后的 $I-U$ 曲线^[9]在第一象限与第三象限的近似对称性特征, 当分析曲线在第一象限的性质时, 可取 n 为非负整数 ($n = +0, +1, +2, +3, \dots$), 则可初步构造在 Josephson 结直流 $I-U$ 特性曲线上叠加的 Shapiro 台阶电流阶跃幅值方程形式为

$$I_{JSn} = I_{JSL} (n+b) \varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta]), \quad (3.31)$$

这里 $I_{JSL} > 0$ 、 $b \geq 0$ 、 $q_0 > 0$ 为待定系数, $\zeta > 0$ 为待定参量, $\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta])$ 为关于 $\exp[-q_0(n+b)\zeta]$ 的待定函数; b 与 I_{JS+0} 密切相关。

方程 (3.31) 式是依据方程 (3.24) 式及 Shapiro 台阶电压位置方程构造出的表述形式, 而不是以其为基础严格推导出来的方程。其中将 $n=0$ 拆分为 $n=+0$ 与 $n=-0$ 二部分主要是象限曲线分析的需要。

方程 (3.31) 式表明在 Shapiro 台阶电流阶跃幅值中主要包含一线性表述部分 $I_{JSL}(n+b)$, 及一非线性函数部分 $\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta])$; 其中函数 $\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta])$ 一至为简略的表述形式即为

$$\varphi(\exp[-q_0(n+b)\zeta]) = A_{\text{exp}} \exp[-q_0(n+b)\zeta], \quad (3.32)$$

式中 A_{exp} 为待定系数。

由方程 (3.31)、(3.32) 二式得在第一象限 ($n = +0, +1, +2, +3, \dots$) Shapiro 台阶电流阶跃幅值的趋势性方程形式近似表示为

$$\begin{aligned}
 I_{JSn} &= I_{JSL}(n+b)[A_{\text{exp}} \exp[-q_0(n+b)\zeta]] \\
 &= [I_{JSL} A_{\text{exp}} \exp(-q_0 b \zeta)](n+b) \exp(-q_0 \zeta n) \\
 &= I_{JSH}(n+b) \exp(-qn) ,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

式中 $I_{JSH} = I_{JSL} A_{\text{exp}} \exp(-q_0 b \zeta)$, $q = q_0 \zeta$ 。

由曲线的对称性亦得在第三象限 ($n = -0, -1, -2, -3, \dots$) 时的趋势性方程

$$I_{JSn} = I_{JSH}(-n+b) \exp(qn) ; \tag{3.34}$$

即 Shapiro 台阶电流阶跃幅值的趋势性方程近似形式为

$$I_{JSn} = I_{JSH}[|n|+b] \exp[-q|n|], \tag{3.35}$$

式中 $|n|$ 为 n 的绝对值, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。

数据分析时, 由于曲线在第一象限与第三象限未必是完全对称性质的, 所以方程(3.33)、(3.34) 二式中的系数亦将会有微小变化。

作为对方程(3.33) 式朝基本原理方向的延伸讨论, 引入二个参量 ϕ 及 ζ , 其与 I_{JSn} 及 n 满足关系方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + q_0(n+b)\phi = 0, \\ I_{JSn} + g \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = 0, \end{cases} \tag{3.36}$$

式中 q_0 、 b 、 g 为待定系数。

由方程(3.36) 式得

$$\phi = \phi_0 \exp[-q_0(n+b)\zeta], \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
 I_{JSn} &= g\phi_0 q_0(n+b) \exp[-q_0(n+b)\zeta] \\
 &= [g\phi_0 q_0 \exp(-q_0 b \zeta)](n+b) \exp(-q_0 \zeta n) \\
 &= I_{JSH}(n+b) \exp(-qn),
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

式中 ϕ_0 为待定系数, $I_{JSH} = g\phi_0 q_0 \exp(-q_0 b \zeta)$, $q = q_0 \zeta$ 。

由方程(3.33)、(3.38) 二式得

$$I_{JSL} A_{\text{exp}} = g\phi_0 q_0 . \tag{3.39}$$

根据方程(3.33)、(3.34) 二式得在 $n = 0$ 时的 Shapiro 台阶电流阶跃幅值近似为

$$I_{JS0} = I_{JS-0} + I_{JS+0} = I_{JSH} b + I_{JSH} b = 2I_{JSH} b . \tag{3.40}$$

对于部分曲线, Shapiro 台阶电流阶跃幅值在整体上 ($n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) 近似有

$$\sum_n I_{JSn} \approx I_{JDC} . \tag{3.41}$$

仍需指出, 因为方程(3.31) 式的非解析表述及方程(3.32) 式的强近似性质, 所以方程(3.35) 式仅是数值趋势性描述方程, 尚不具有原理层面的深刻意义。

在确定方程的待定系数过程中, 一次求解还不能给出方程最终形式, 需要进行几次细调以达到兼顾诸台阶幅值的趋势状态; 其中 b 可由前 3 个或 4 个台阶幅值的联立方程初步给出, 当 b 无解时还需重组联立方程再解出 b , 然后初步求解 q 和 I_{JSH} 。对于极特殊情况, 可先预置一个 b 值, 然后初步求解 q 和 I_{JSH} , 再将方程计算数据与原始阶跃幅值数据相比较, 通过每次一个变化量 Δb 调节 b 值给出新的 q 和 I_{JSH} 以不断改变方程, 逐步达到方程计算数据与原始阶跃幅值数据较好的接近状态。方程细调时 b 主要由 I_{JS0} 作为关键指标确定, I_{JSH} 主要由前 3 个或 4 个台阶幅值作为关键指标确定, q 主要由前 6 个台阶幅值的衰减趋势作为关键指标确定。其中初步求解给出方程基本概貌, 细调过程给出方程具体形式。

计算第三象限曲线时, 一般其与在第一象限不完全对称, 可根据曲线在第三象限的状态特征对方程中诸系数进行适当微调。

4 结 论

本文给出了连接方程(1.4)式的若干性质及其在部分饱和过程及蠕变过程等方面应用的简略注释,介绍了连接方程是一非线性动力学方程近似等效解析解的方法,并给出了非线性动力学方程(1.18)式在兼容非线性 Newton 动力学位移 y —时间 t 方程、RLCN 串联电路电荷量 Q —时间 t 方程等方面的分析讨论,同时预言了一种新的基于非线性动力学方程的电路元件(电存—nonlinstor);给出了粒子系统的统计分布趋势性方程及其若干条件解的形式,阐释了 Bose-Einstein 统计分布方程形式与 Fermi-Dirac 统计分布方程形式的数学对称性关系;建立了国家年度能源消费总量与 GDP 关系方程及国家年度人口数量与 GDP 关系方程,进而作为实例计算预测了美国年度能源消费量极限值及英国年度人口数量极限值;随后探讨了岩石及单晶高温材料的蠕变过程曲线、半导体分立器件 V — A 特性曲线、超导材料电阻 R (或电阻率 ρ)—绝对温度 T 曲线方程、双晶 Josephson 结直流 I — U 特性曲线及 Shapiro 台阶电流阶跃幅值曲线的趋势线拟合方程,是为对连接方程的一个初步导引性参考简介。

上述计算分析同时表明,方程(1.4)式及方程(1.18)式尚有如下局限性:

(1) 方程(1.4)式还仅是处在方程(1.18)式的近似等效解析解或其拓展形式层面,尚未完全建立方程(1.4)式的诸待定系数与方程(1.18)式中现象固有特征参数及演化条件的联系,不具有原理层面的解析意义,是基本属于唯象层面的表观阐释;

(2) 方程(1.4)式中待定系数较多,方程的具体形式需要依据数据计算才能确定;同时方程(1.18)式中的自激励函数与非线性极限系数的意义仍然有待深入研究;

(3) 方程(1.4)式曲线在一些局部位置偏离拟合的原始数据,不是精确描述,仅是对现象演化过程的趋势性拟合;同时方程(1.18)式在趋势极限与细节波动复合过程描述形式方面仍需要进一步的研究探讨;

(4) 方程(1.4)式对现象演化过程不是完整整体性的刻画,仅是局部的阶段性轮廓描述,尚未能进行十分有效的长程预测计算;同时方程(1.18)式中诸系函数具有动态性质,还需要进行多层面的机理解析讨论。

参考资料

- 1 阎坤. 数据曲线间断区域的自适应连接方程研究[J]. 地球物理学进展, 2011, 26(1): 162—171.
YAN Kun. Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve[J]. Progress in Geophys, 2011, 26(1): 162—171. DOI:10.3969/j.issn.1004-2903.2011.01.018.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/curveandequation-pdf.pdf>
- 2 LI B, LIN J, YAO X. A novel evolutionary algorithm for determining unified creep damage constitutive equations[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44(5): 987—1002.
https://www.cs.bham.ac.uk/~xin/papers/IJMS_LiLinYao.pdf
- 3 任建喜. 单轴压缩岩石蠕变损伤扩展细观机理 CT 实时试验[J]. 水利学报, 2002, 1: 10—15.
REN Jianxi. CT real-time testing on meso-mechanism of creep damage propagation in rock under uniaxial compression[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002, 1: 10—15.
http://jhe.ches.org.cn/jhe/ch/reader/view_html.aspx?file_no=020103
- 4 T Kobayashi, Y Koizumi, M Maldini, S Nakazawa, M Osawa, T Yamagata, T Yokokawa. Microstructure and creep behaviour of a new single crystal superalloy developed at NRIM, 28 Jun 2000.
<http://www.nims.go.jp/hm21/oneday2000/maldini.html>
- 5 Y Koizumi, T Kobayashi, H Harada and T Yamagata. Creep life extension of a single crystal superalloy by re-heat-treatment. Proceedings of the Fourth International Charles Parsons Turbine Conference on "Advances in Turbine Materials, Design and Manufacturing", held at Newcastle upon Tyne, UK, 4-6 November 1997, pp. 679—684.
<http://www.nims.go.jp/hm21/documents/990225m.html>
- 6 李蕴慧, 张琦锋, 孙晖, 等. 氧化锌薄膜的 p 型掺杂及光学和电学性质研究[J]. 材料科学与工艺, 2009, 17(5): 686—690, 695.
LI Yunhui, ZHANG Qifeng, SUN Hui, et al. Synthesis of p type ZnO thin films and their optical and electric properties[J]. Materials Science & Technology, 2009, 17(5): 686—690, 695.
<http://ir.pku.edu.cn/handle/211010/7755>
- 7 REN Z A, CHE G C, DONG X L, et al. Superconductivity and phase diagram in iron-based arsenic-oxides $\text{ReFeAsO}_{1-\delta}$ (Re= rare-earth metal) without fluorine doping[J]. EPL (Europhysics Letters), 2008, 83(1): 17002.
http://arxiv.org/pdf/0804.2582.pdf?origin=publication_detail
- 8 WU C, WANG M J, WU M K. Study of high temperature superconducting p-n junction[J]. Physica C: Superconductivity, 2007, 460: 424—425.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921453407002419>
Maw-Kuen Wu. Oxide thin films (with $R-T$ curve of YBCO/PCCO bilayer junction) [R]. Institute of Physics, Academia Sinica (Superconductor Lab Webpage 2008).
http://www.phys.sinica.edu.tw/~mkwu/laser_2.html
- 9 岳宏卫, 阎少林, 周铁戈, 等. 嵌入 Fabry-Perot 谐振腔的高温超导双晶约瑟夫森结的毫米波辐照特性研究[J]. 物理学报, 2010, 59(2): 1282—1287.
YUE Hongwei, YAN Shaolin, ZHOU Tiegge, et al. Millimeter wave irradiation characteristics of high temperature superconductor bicrystal Josephson junction embedded in a Fabry-Perot resonator[J]. Acta Phys. Sin., 2010, 59(2): 1282—1287.
<http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/article/downloadArticleFile.do?attachType=PDF&id=16602>