

阎坤. 新型冠状病毒肺炎感染数据的简略分析及趋势预测[Report]. 西安现代非线性科学应用研究所, 2020-02-22.
YAN Kun. Tendency prediction and brief analysis for the infection data of the novel coronavirus pneumonia(NCP) in China[Report]. Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 22 February 2020.
<http://www.nature.ac.cn/papers/2020NCPCurveEquation-VerificationPrediction-pdf.pdf>

新型冠状病毒肺炎感染数据的简略分析及趋势预测

阎坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘要: 通过对 2003 年北京与香港二城市 SARS 病毒感染数据的分析讨论及基于在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间中国境内新型冠状病毒肺炎确诊感染人数数据的公布资料, 采用简洁的一般饱和过程分析方法, 给出了相应的偏对称方程(欠对称或弱对称方程)形式, 进而由偏对称方程初步给出了 SIR 模型方程组的趋势性近似解析解, 在趋势层面分析计算了中国境内及中国境内除湖北省外地区新型冠状病毒肺炎感染累计数据, 给出了相应的拐点位置与趋势预测的阶段性极限值, 分析结果为病毒感染疫情发展过程的多变量非线性动力学方程组描述提供参考。

关键词: 新型冠状病毒肺炎, SARS 病毒, 感染数据, 拟合方程, 趋势预测, 数据分析

Tendency prediction and brief analysis for the infection data of the novel coronavirus pneumonia(NCP) in China

YAN Kun (yankun@nature.ac.cn)

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, by discussing the cumulative number of people of confirmed SARS(severe acute respiratory syndrome) virus infection in Beijing and Hongkong in 2003, and basing on the data of the number of novel coronavirus pneumonia(called NCP or 2019-nCoV(2019-new coronavirus)) confirmed infection in China between 11 January and 21 February 2020, using the simple analysis method of the general saturation process, the corresponding under-symmetrical equations(or weak-symmetrical equations) are given. Then by the under-symmetrical equations, the approximate analytical solutions of SIR model equations are given preliminarily in the trend direction, and the accumulated data of the novel coronavirus pneumonia infection in China and in China except for Hubei Province are analyzed and calculated tentatively. At the same time, the corresponding inflection point position and the stage limit value of tendency prediction are given too. The results of this paper provide a reference for the description of multivariable nonlinear dynamic equations in the development of viral infection.

Keywords novel coronavirus pneumonia, SARS virus, infection data, fitting equation, tendency prediction, data analysis

0 引言

本文基于 2003 年北京及香港二城市 SARS 病毒感染累计数据及 SIR 模型方程分析^[1,2], 依据中国境内新型冠状病毒感染累计数据在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日的公布资料^[3], 参考一般饱和过程^[4]的偏对称方程分析方法^[5], 并据此初步给出了 SIR 模型方程组的趋势性近似解析解, 简略分析计算了中国境内及中国境内除湖北省外地区新型冠状病毒感染累计数据, 给出相应的趋势预测方程及拐点位置与阶段性趋势预测, 为进一步的病毒感染疫情发展过程多因素多变量动力学方程描述提供参考。

1 病毒感染过程累计病例数据的偏对称方程形式及其曲线形态特征

依据北京在 2003 年 4 月 21 日~6 月 11 日、香港在 2003 年 3 月 17 日~6 月 14 日的 SARS 病毒感染确诊累计人数数据^[1,2], 其数据曲线形态如图 1 所示。

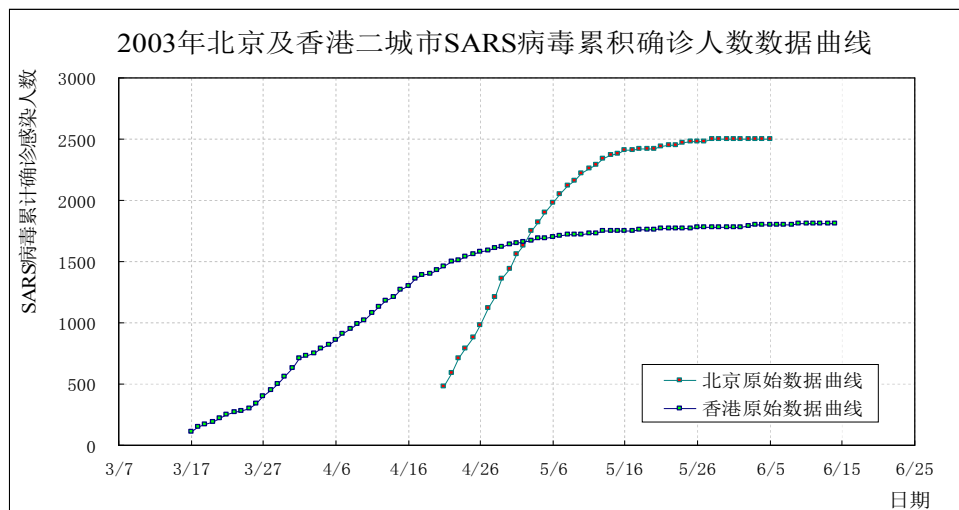


图 1 2003 年北京及香港二城市 SARS 病毒确诊感染累计人数数据曲线

由图 1 所示的曲线可见, 病毒感染累计人数数据具有前期缓慢增长(见图中香港数据曲线)、中期快速增长、后期平稳饱和的演化特征。

依据一般饱和过程的连接方程分析方法^[4, 5], 对于病毒感染累计确诊病例数据变化过程曲线, 有趋势性方程形式

$$P = P_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(t-t_0)] - \exp[-\alpha_2(t-t_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(t-t_0)]}, \quad (1)$$

式中 t 为计算日期或距离一参照日期的间隔天数, P 为病毒确诊累计感染病例人数, P_0 、 t_0 、 A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 为待定常量, $P(t=t_0) = P_0$; t 、 t_0 可同取日期, 也可同取距离同一日期的间隔天数。

病毒感染累计病例人数 P 包括现有确诊病例人数、累计治愈人数及感染病毒后累计死亡人数。考虑病毒感染累计确诊数据曲线在前端及后续阶段均为水平线, 且病毒感染累计数据在前期为 0 值的特征, 从数据处理角度, 在饱和过程的偏对称(欠对称或弱对称)方程表述方向, 可直接将方程(1)式表示为其分式拓展的前偏对称方程形式

$$\begin{aligned} P_{\text{FUS}} &= P_0 + P_0 \frac{\exp[\alpha_1(t-t_0)] - \kappa \exp[-\alpha_1(t-t_0)] - (1-\kappa) \exp[-\alpha_2(t-t_0)]}{\exp[\alpha_1(t-t_0)] + \kappa \exp[-\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa) \exp[-\alpha_2(t-t_0)]} \\ &= \frac{P_{\text{max}}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}, \end{aligned} \quad (2)$$

与后偏对称方程形式

$$\begin{aligned} P_{\text{BUS}} &= P_0 + P_0 \frac{\rho \exp[\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[\alpha_2(t-t_0)] - \exp[-\alpha_1(t-t_0)]}{\rho \exp[\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[\alpha_2(t-t_0)] + \exp[-\alpha_1(t-t_0)]} \\ &= P_{\text{max}} - \frac{P_{\text{max}}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}; \end{aligned} \quad (3)$$

式中 P_0 、 t_0 、 α_1 、 α_2 、 κ 、 ρ 为待定常量, $0 \leq \kappa \leq 1$, $0 \leq \rho \leq 1$; t_0 、 P_0 为拐点位置, 即方程二阶导数等于 0 (或在数据计算上近似等于 0) 的位置; P_{max} 为病毒确诊累计感染人数 P 的极限值或饱和值, $P_{\text{max}} = 2P_0$ 。

由方程(2)式得前偏对称方程的导数形式为

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{FUS}}}{dt} &= P_{\text{max}} \frac{2\kappa\alpha_1 \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}{[1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]^2} \\ &= \frac{1}{P_{\text{max}}} P_{\text{FUS}}^2 [2\kappa\alpha_1 \exp[-2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\kappa)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]; \end{aligned} \quad (4)$$

由方程(3)式得后偏对称方程的导数形式为

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{BUS}}}{dt} &= P_{\text{max}} \frac{2\rho\alpha_1 \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]}{[1 + \rho \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]^2} \\ &= \frac{1}{P_{\text{max}}} [P_{\text{max}} - P_{\text{BUS}}]^2 [2\rho\alpha_1 \exp[2\alpha_1(t-t_0)] + (1-\rho)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]]; \end{aligned} \quad (5)$$

对于方程(2)式及方程(3)式, 当 $\kappa = 0$ 及 $\rho = 0$ 时, 其皆成为

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_0 \frac{\exp[\alpha_1(t-t_0)] - \exp[-\alpha_2(t-t_0)]}{\exp[\alpha_1(t-t_0)] + \exp[-\alpha_2(t-t_0)]} \\ &= P_0 + P_0 \frac{\exp[\alpha_2(t-t_0)] - \exp[-\alpha_1(t-t_0)]}{\exp[\alpha_2(t-t_0)] + \exp[-\alpha_1(t-t_0)]} \\ &= P_0 + P_0 \tanh[0.5(\alpha_1 + \alpha_2)(t-t_0)]; \end{aligned} \quad (6)$$

当 $\kappa = 1$ 及 $\rho = 1$ 时, 取 $\alpha_1 = \alpha$, α 为待定常量; 此时二方程皆直接退化为

$$P = P_0 + P_0 \tanh[\alpha(t-t_0)] = \frac{P_{\text{max}}}{1 + \exp[-2\alpha(t-t_0)]}. \quad (7)$$

由方程(7)式得

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{2\alpha}{P_{\text{max}}} P^2 \exp[-2\alpha(t-t_0)] = \frac{\alpha P_0}{\cosh^2[\alpha(t-t_0)]} \\ &= \alpha P_0 [1 - \tanh^2[\alpha(t-t_0)]] = \alpha [2P - P_0^{-1} P^2]. \end{aligned} \quad (8)$$

方程(6)、(7)二式皆为双曲正切函数,亦是经典S型曲线方程或Logistic方程的等效形式,其在数学上已经被很好地研究及应用,具有较为广泛的一阶或二阶非线性动力学方程关联性。

其中当分别应用方程(2)式与方程(7)式时,则在 $t \approx t_0$ 附近区域,二式分别简化为

$$\begin{aligned} P_{\text{FUS}} &\approx \frac{P_{\text{max}}}{1 + \kappa[1 - 2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa)[1 - (\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]} \\ &= \frac{P_{\text{max}}}{2 - [(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2](t - t_0)}, \\ P &\approx \frac{P_{\text{max}}}{1 + [1 - 2\alpha(t - t_0)]} = \frac{P_{\text{max}}}{2 - 2\alpha(t - t_0)}; \end{aligned}$$

即得方程(2)式与(7)式中待定常数之间有近似关系方程

$$(1 + \kappa)\alpha_1 + (1 - \kappa)\alpha_2 \approx 2\alpha. \quad (9)$$

而当分别应用方程(3)式与方程(7)式时,则在 $t \approx t_0$ 附近区域,二式分别简化为

$$\begin{aligned} P_{\text{BUS}} &\approx P_{\text{max}} - \frac{P_{\text{max}}}{1 + \rho[1 + 2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho)[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]} \\ &= P_{\text{max}} - \frac{P_{\text{max}}}{2[1 + 0.5[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2](t - t_0)]} \\ &\approx P_{\text{max}} - 0.5P_{\text{max}}[1 - 0.5[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2](t - t_0)] \\ &= P_0 + 0.5P_0[(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2](t - t_0), \end{aligned}$$

$$P = P_0 + P_0 \tanh[\alpha(t - t_0)] \approx P_0 + \alpha P_0(t - t_0);$$

亦即得方程(3)式与方程(7)式中待定常数有近似关系方程为

$$(1 + \rho)\alpha_1 + (1 - \rho)\alpha_2 \approx 2\alpha. \quad (10)$$

一般地,诸多现象演化过程都存在阶段性极限,极限之间状态转化传递,逐次与演化环境相应层面动态平衡,演化平衡过程可由方程(1)式、乃至方程(7)式的级数形式予以近似描述^[4, 5];对于病毒感染累计确诊病例数据,仍从数据处理角度,级数仅取二项,则其趋势性拟合方程为

$$P_{\text{SER}} = P_0[1 + \gamma \tanh[\beta_1(t - t_{01})] + (1 - \gamma) \tanh[\beta_2(t - t_{02})]], \quad (11)$$

式中 P_0 、 t_{01} 、 t_{02} 、 γ 、 β_1 、 β_2 为待定常数, $0 \leq \gamma \leq 1$; t 、 t_{01} 、 t_{02} 可同取日期,或同取距离同一日期的间隔天数, $t_{01} \leq t_{02}$;病毒感染累计确诊病例人数 P 的极限值为 $P_{\text{max}} = 2P_0$ 。

对于方程(7)式与方程(11)式,在 $t \approx t_0$ 及存在 $\max\{\beta_1(t - t_{01}), \beta_2(t - t_{02})\} \approx 0$ 附近区域时,有

$$P \approx P_0 + P_0\alpha(t - t_0) = P_0[1 + \alpha t - \alpha t_0],$$

$$\begin{aligned} P_{\text{SER}} &\approx P_0[1 + \gamma\beta_1(t - t_{01}) + (1 - \gamma)\beta_2(t - t_{02})] \\ &= P_0[1 + [\gamma\beta_1 + (1 - \gamma)\beta_2]t - [\gamma\beta_1 t_{01} + (1 - \gamma)\beta_2 t_{02}]]; \end{aligned}$$

则在分别应用方程(7)式与方程(11)式的情况下,二式中的待定常数之间有近似关系式

$$\gamma\beta_1 + (1 - \gamma)\beta_2 \approx \alpha, \quad \gamma\beta_1 t_{01} + (1 - \gamma)\beta_2 t_{02} \approx \alpha t_0; \quad (12)$$

当不存在 $\max\{\beta_1(t - t_{01}), \beta_2(t - t_{02})\} \approx 0$ 附近区域时,则按方程(11)式中二项的区间比例,方程(7)式与方程(11)式中的待定常数之间仍近似有关系式

$$\gamma t_{01} + (1 - \gamma)t_{02} \approx t_0. \quad (13)$$

由级数方程(11)式得其导数方程形式为

$$\frac{dP_{\text{SER}}}{dt} = \frac{\gamma\beta_1 P_0}{\cosh^2[\beta_1(t - t_{01})]} + \frac{(1 - \gamma)\beta_2 P_0}{\cosh^2[\beta_2(t - t_{02})]}. \quad (14)$$

由上述方程(2)、(3)、(7)、(11)四式,取第 t 天、第 $t + 1$ 天病毒感染累计病例确诊人数分别为 $P(t)$ 、 $P(t + 1)$,则相应地得在第 $t + 1$ 天病毒感染新增确诊病例人数的计算方程 $n(t + 1)$ 为

$$n(t + 1) \times 1 \text{ day} = P(t + 1) - P(t). \quad (15)$$

每日新增计算方程 $n(t + 1)$ 与 $P(t + 1)$ 的导数方程在曲线整体趋势形态上一致,在相位上有差异。

方程(7)式及其导数(8)式分别具有旋转对称与轴对称性质,属于理想情况下的状态;而分式拓展方程(2)、(3)二式与级数方程(11)式及其导数方程(4)、(5)、(14)三式能够更细微地调节曲线形态,可广泛用于描述饱和过程在前端及后续阶段均为水平线时具有偏对称或欠对称(弱对称)特征的饱和过程曲线。

其中,分式拓展方程(2)式及其导数方程(4)式主要描述前偏对称的曲线形态(如图2所示),方程(3)式及其导数方程(5)式主要描述后偏对称曲线形态(如图3所示);而级数方程(11)式及其导数方程(14)式可基本兼顾前偏对称与后偏对称曲线形态(如图4所示)。

直观上,分式拓展方程(2)、(3)二式与级数方程(11)式主要表现为旋转偏对称或欠对称特征,而其导数方程形式(4)、(5)、(14)三式则主要表现为轴向偏对称或欠对称特征。

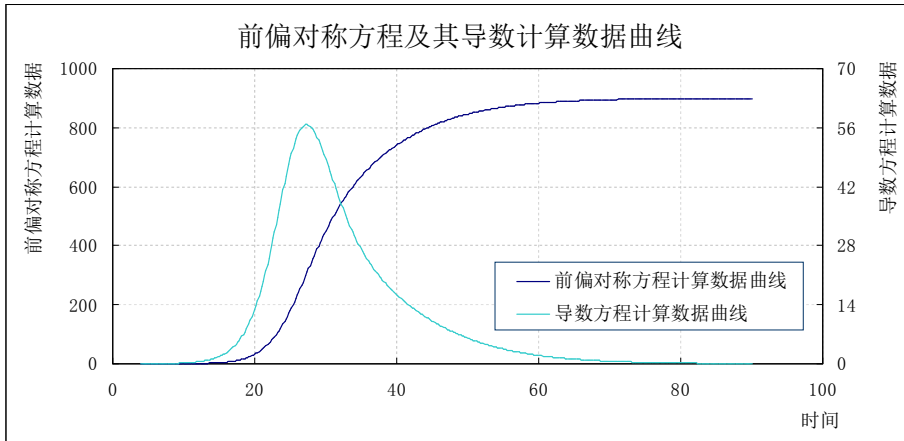


图2 分式拓展的前偏对称方程及其导数方程计算数据曲线

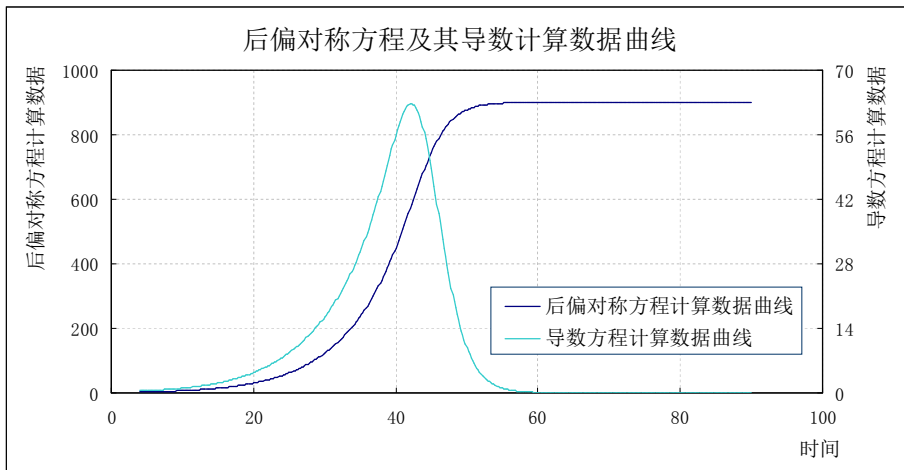


图3 分式拓展的后偏对称方程及其导数方程计算数据曲线

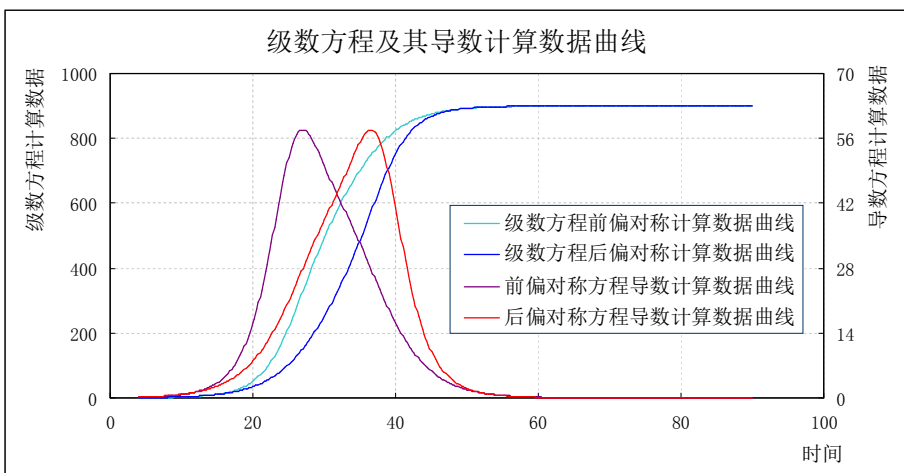


图4 级数方程及其导数方程计算数据曲线(兼顾前偏对称与后偏对称特征)

上述病毒感染过程的偏对称方程形式,可为目前的病毒感染数据分析预测及相关非线性动力学方程研究提供参考。

2 由偏对称方程表示的 SIR 模型方程组趋势性近似解

关于病毒感染过程,目前比较经典的方法是采用 SIR 模型方程组或类似的动力学分析方法^[1,2];其中对于 SIR 模型方程组,先取分析的数据样本总人数为 $N(t)$,其中易感人数为 $S(t)$,感染病人数量为 $I(t)$,移出者数量为 $R(t)$,相互间有关系方程

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t); \quad (16)$$

当数据样本在疫情期间人口波动与 $N(t)$ 相比可以忽略,即 $N(t) = N_0$ 为常量时,有

$$S(t) + I(t) + R(t) = N_0; \quad (17)$$

SIR 模型方程组为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I, \end{cases} \quad (18)$$

式中 t 仍为时间, λ 为易感者的感染率, μ 为感染者的移出率。

SIR 模型方程组的特点是多因素、多变量,侧重机理描述,被广泛地应用与研究;方程组尚没有解析解,机理参数不易及时获取,数值解的分析对初始数据依赖性较大,部分地有波动放大效应。

2.1 由偏对称方程表示的 SIR 模型方程组非线性方程形式

下面通过病毒感染累计病例人数趋势性方程 $P(t)$,给出 SIR 模型方程组 (18) 式的非线性方程等效形式。

一般地,由于病毒感染累计病例趋势性人数方程 $P(t)$ 主要包括现有确诊病例人数、累计已治愈具有免疫力人数及感染病毒后累计死亡人数;故此,有 $P(t)$ 与 SIR 模型方程组 (18) 式中感染病人数量 $I(t)$ 及移出者数量 $R(t)$ 的关系为

$$P = I + R; \quad (19)$$

这里移出者数量 $R(t)$ 包括已治愈并具有免疫力的累计人数数量与感染病毒后死亡人数的累计数量。

由方程 (17) ~ (19) 三式,即得由病毒感染累计病例人数方程 $P(t)$ 表示的 SIR 模型方程组 (18) 式中易感人数 $S(t)$ 、感染病人数量 $I(t)$ 及移出者数量 $R(t)$ 分别为

$$S = N_0 - I - R = N_0 - P; \quad (20)$$

$$I = -\frac{1}{\lambda S} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\lambda(N_0 - P)} \frac{dP}{dt}; \quad (21)$$

$$R = N_0 - S - I = P - \frac{1}{\lambda(N_0 - P)} \frac{dP}{dt}。 \quad (22)$$

由方程 (18)、(21) 二式得

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\mu}{\lambda(N_0 - P)} \frac{dP}{dt}; \quad (23)$$

即有

$$dR = -\frac{\mu}{\lambda} d \ln(N_0 - P);$$

在 λ 、 μ 为常量时的理想简单情况下,且考虑由方程 (19) 式在 $P = 0$ 时有 $R = 0$,得方程 (23) 式中 $R(t)$ 与 $P(t)$ 之间的关系方程为

$$R = \frac{\mu}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_0 - P}。 \quad (24)$$

由方程 (17)、(20)、(21)、(24) 四式得

$$N_0 - P + \frac{1}{\lambda(N_0 - P)} \frac{dP}{dt} + \frac{\mu}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_0 - P} = N_0;$$

即在 λ 、 μ 为常量时的理想简单情况下, 由病毒感染累计病例人数方程 $P(t)$ 表示的 SIR 模型方程组 (18) 式的非线性方程等效形式为

$$\frac{dP}{dt} - \mu(N_0 - P) \ln \frac{N_0 - P}{N_0} - \lambda P(N_0 - P) = 0; \quad (25)$$

或再由方程 (20) 式表示为易感人数 $S(t)$ 的非线性方程等效形式

$$\frac{dS}{dt} + \mu S \ln \frac{S}{N_0} + \lambda S(N_0 - S) = 0. \quad (26)$$

方程 (25) 式或 (26) 式尚没有解析解。

在方程 (25) 式或 (26) 式的形式上, 可得其部分地具有近似指数函数和近似双曲正切函数的复合性饱和特征。

2.2 由偏对称方程最大值表示的 SIR 模型方程组中样本总量与常数比

在 λ 、 μ 为常量时的理想简单情况下, 依据方程 (25) 式, 当 $\frac{dP}{dt} = 0$ 时, 有

$$\mu(N_0 - P) \ln \frac{N_0 - P}{N_0} + \lambda P(N_0 - P) = 0; \quad (27)$$

可将方程 (27) 式表示为

$$(N_0 - P) \left[\mu \ln \frac{N_0 - P}{N_0} + \lambda P \right] = 0. \quad (28)$$

当 $0 \leq P < N_0$ 时, 方程 (28) 式成为

$$\mu \ln \frac{N_0 - P}{N_0} + \lambda P = 0; \quad (29)$$

其一解为

$$P = 0;$$

即得方程 (25) 式的一极限解为

$$P = P_{\min} = 0; \quad (30)$$

方程 (29) 式在解 $P = 0$ 之外, 至多还有一数值解, 其部分地取决于 $\mu^{-1}\lambda N_0$ 的值。

对于方程 (27) 式, 在 $P \rightarrow N_0$ 时有

$$\begin{aligned} & \lim_{P \rightarrow N_0} \left[\mu(N_0 - P) \ln \frac{N_0 - P}{N_0} + \lambda P(N_0 - P) \right] \\ &= \mu \lim_{P \rightarrow N_0} \frac{\ln(N_0 - P) - \ln N_0}{(N_0 - P)^{-1}} \\ &= \mu \lim_{P \rightarrow N_0} \frac{\frac{d}{dP} [\ln(N_0 - P) - \ln N_0]}{\frac{d}{dP} (N_0 - P)^{-1}} \\ &= -\mu \lim_{P \rightarrow N_0} \frac{(N_0 - P)^{-1}}{(N_0 - P)^{-2}} \\ &= -\mu \lim_{P \rightarrow N_0} (N_0 - P) \\ &= 0; \end{aligned}$$

故得方程 (25) 式的另一极限解为

$$P = P_{\max} = N_0. \quad (31)$$

由方程 (20) 式、(30) 式、(31) 式, 亦直接得易感人数 $S(t)$ 的范围为

$$0 \leq S \leq P_{\max};$$

即易感人数 $S(t)$ 与累计病例报告人数 $P(t)$ 为关于 P_{\max} 互补的一对变量。

依据极限解 (31) 式, 得由偏对称方程 $P(t)$ 的最大值 P_{\max} 表示的 SIR 模型方程组样本数据总量 N_0 为

$$N_0 = P_{\max}。 \quad (32)$$

由方程 (32) 式, SIR 模型方程组样本数据总量 N_0 在疫情初始阶段的估计值, 一般需要在病毒感染过程中累计报告病例数据在过转折点后予以适当校核。

依据方程 (32) 式, 方程 (25)、(26) 二式成为

$$\frac{dP}{dt} - \mu(P_{\max} - P) \ln \frac{P_{\max} - P}{P_{\max}} - \lambda P(P_{\max} - P) = 0; \quad (33)$$

$$\frac{dS}{dt} + \mu S \ln \frac{S}{P_{\max}} + \lambda S(P_{\max} - S) = 0。 \quad (34)$$

由方程 (33) 式, 考虑当 $P \rightarrow P_{\max} - 1$ 时, 在饱和阶段有极限值

$$\lim_{P \rightarrow P_{\max} - 1} \frac{dP}{dt} = 0;$$

则有

$$\lim_{P \rightarrow P_{\max} - 1} \left[-\mu \ln \frac{P_{\max} - (P_{\max} - 1)}{P_{\max}} - \lambda(P_{\max} - 1)[P_{\max} - (P_{\max} - 1)] \right] = 0;$$

即

$$\mu \ln P_{\max} - \lambda(P_{\max} - 1) = 0;$$

得在 λ 、 μ 为常量时的理想简单情况下, 常数比值方程为

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{P_{\max} - 1}{\ln P_{\max}}; \quad (35)$$

这里 $\ln P_{\max} = \ln [P_{\max} / [P_{\max} - (P_{\max} - 1)]] = \ln [P_{\max} / 1]$ 为无量纲常量。

一般地, 考虑 $P_{\max} \gg 1$, 方程 (35) 式可进一步表示为

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}}。 \quad (36)$$

依据方程 (36) 式, 方程 (33)、(34) 二式成为

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dP}{dt} - \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}} (P_{\max} - P) \ln \frac{P_{\max} - P}{P_{\max}} - P(P_{\max} - P) = 0; \quad (37)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dS}{dt} + \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}} S \ln \frac{S}{P_{\max}} + S(P_{\max} - S) = 0。 \quad (38)$$

2.3 由偏对称方程表示的 SIR 模型方程组趋势性近似解及 $I(t)$ 最大值

下面依据偏对称方程 (2) ~ (5) 式及方程 (20) ~ (22) 式, 初步给出由偏对称方程 $P(t)$ 及其导数方程表示的 SIR 模型方程组 (18) 式的趋势性近似解析解具体表达形式, 为其进一步的解析分析及数值计算提供轮廓层面参考。

偏对称方程 (2)、(3) 二式属于构造函数, 是连接方程的分式拓展形式, 多部分趋势近似、少部分动力解析, 尤其对于类如病毒感染累计确诊报告病例数据演化过程这样的饱和和曲线描述在趋势层面具有较好的针对性及适应性。

依据前偏对称方程 (2)、(4) 二式及方程 (20) ~ (22) 三式, 得 SIR 模型方程组 (18) 式的偏对称趋势性近似解析解为

$$\begin{cases} S = P_{\max} - P, \\ I = \frac{1}{\lambda(P_{\max} - P)} \frac{dP}{dt}, \\ R = P - \frac{1}{\lambda(P_{\max} - P)} \frac{dP}{dt}; \end{cases} \quad (39)$$

式中在前偏对称时方程 $P(t)$ 及其导数方程为

$$P = \frac{P_{\max}}{1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]},$$

$$\frac{dP}{dt} = P_{\max} \frac{2\kappa\alpha_1 \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}{[1 + \kappa \exp[-2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \kappa) \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]]^2};$$

而在后偏对称时方程 $P(t)$ 及其导数方程则为

$$P = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{1 + \rho \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]},$$

$$\frac{dP}{dt} = P_{\max} \frac{2\rho\alpha_1 \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho)(\alpha_1 + \alpha_2) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]}{[1 + \rho \exp[2\alpha_1(t - t_0)] + (1 - \rho) \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)]]^2}.$$

在 λ 、 μ 为常量时的理想简单情况下, 依据方程 (37)、(39) 二式得由偏对称方程 $P(t)$ 表示的 SIR 模型方程组 (18) 式的趋势性近似解为

$$\begin{cases} S = P_{\max} - P, \\ I = P - \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}} \ln \frac{P_{\max}}{P_{\max} - P}, \\ R = \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}} \ln \frac{P_{\max}}{P_{\max} - P}. \end{cases} \quad (40)$$

由方程 (18) 式, 当 $\frac{dI}{dt} = 0$ 时, $I(t) = I_{\max}$ 取最大值, 得

$$[\lambda S(I = I_{\max}) - \mu] I_{\max} = 0;$$

即得在 $I(t) = I_{\max}$ 时有

$$S(I = I_{\max}) = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}}; \quad (41)$$

$$P(I = I_{\max}) = P_{\max} - S = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}}. \quad (42)$$

进而由方程 (40) 式、(42) 式得

$$I_{\max} = P_{\max} - \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}} [1 + \ln \ln P_{\max}]; \quad (43)$$

$$R(I = I_{\max}) = \frac{P_{\max}}{\ln P_{\max}} \ln \ln P_{\max}; \quad (44)$$

由方程 (41)、(44) 二式得

$$\frac{R(I = I_{\max})}{S(I = I_{\max})} = \ln \ln P_{\max}.$$

依据方程 (40) 式给出的 SIR 模型方程组与偏对称方程 $P(t)$ 的关系曲线如图 5 所示; 依据方程 (43) 式给出的 I_{\max} 与 P_{\max} ($P_{\max} \geq 100$) 关系曲线如图 6 所示。

病毒爆发传播感染人群的演化过程十分复杂, 期间相关人员的流动、医疗机构的介入、政府的强制干预、地区与国家间的合作配合与互动援助等, 都会参与整个疫情的发展过程; 故此, 将疫情发展过程的部分变量用一组动力学方程予以描述, 仅是一种理想的趋势性探索; 诸如当将 λ 、 μ 取

为变量时, 方程组难以求解, 而当将其设置为待定常数时, 亦使得方程近似解与实际数据偏差较大, 所以上述分析在实际应用计算时尚需根据具体数据特征予以适当修正。

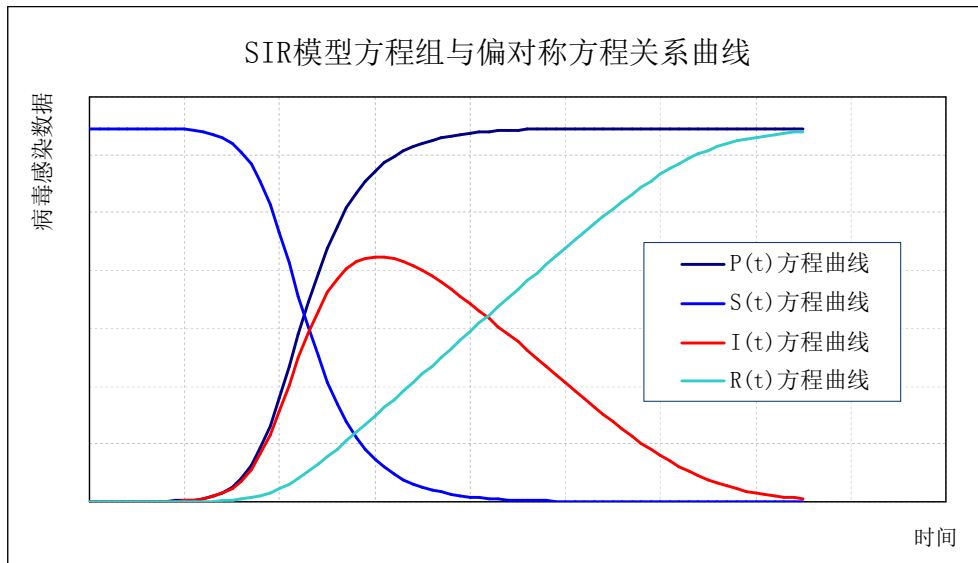


图 5 SIR 模型方程组与偏对称方程的关系曲线

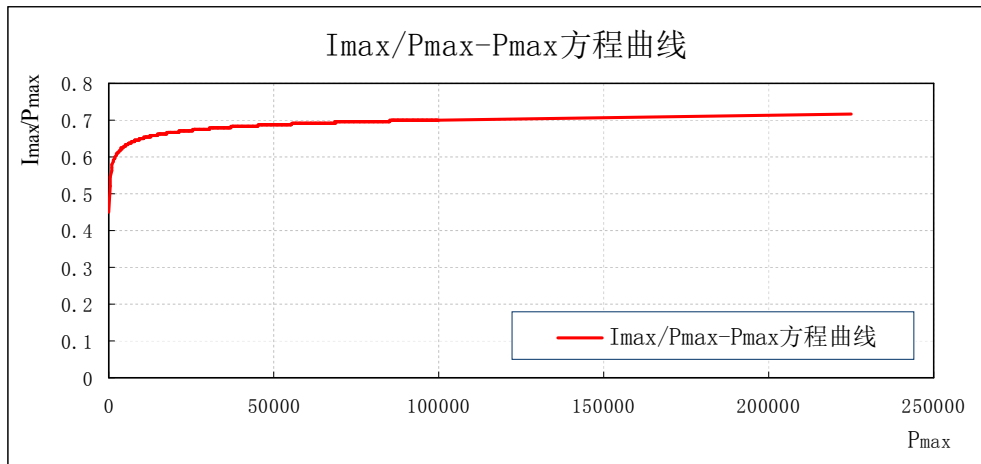


图 6 $I_{\max}/P_{\max}-P_{\max}$ 方程曲线 ($P_{\max} \geq 100$)

3 SARS 病毒感染累计病例数据的趋势预测方程形式

基于图 1 所示的北京与香港这二个城市在 2003 年 SARS 病毒感染累计病例人数基础数据的曲线形态特征, 依据前偏对称或欠对称方程 (2) 式, 简单地皆取 $\kappa = 0.7$, 则得其分式拓展形式的趋势拟合方程分别为

$$P_{\text{FBJ}} = \frac{2496}{1 + 0.7 \exp[-0.172(t_{\text{BJ}} - 53.3)] + 0.3 \exp[-0.206(t_{\text{BJ}} - 53.3)]}, \quad (45)$$

$$P_{\text{FHK}} = \frac{1808}{1 + 0.7 \exp[-0.10(t_{\text{HK}} - 32.3)] + 0.3 \exp[-0.14(t_{\text{HK}} - 32.3)]}; \quad (46)$$

式中 t_{BJ} 、 t_{HK} 皆是以 2003 年 3 月 7 日作为第 1 天的天数, P_{FBJ} 、 P_{FHK} 分别为北京、香港 SARS 病毒确诊累计感染人数; 这里 t_{BJ} 、 t_{HK} 分别从 34 (即 4 月 9 日)、6 (即 3 月 12 日) 开始计算; 方程在延展计算时, t_{BJ} 、 t_{HK} 可以是正的天数, 也可以是 0 或负的天数。

方程 (45) 式的拐点日期在 2003 年 4 月 28 日~29 日之间, 方程 (46) 式的拐点日期在 2003 年 4 月 7 日~8 日之间。

方程 (45)、(46) 二式还可以近似简化为最简洁的双曲正切函数方程 (7) 式的形式

$$P_{\text{BJ}} = 1248 + 1248 \tanh[0.093(t_{\text{BJ}} - 53.3)]; \quad (47)$$

$$P_{\text{HK}} = 904 + 904 \tanh[0.054(t_{\text{HK}} - 32.3)]. \quad (48)$$

由偏对称方程 (45)、(46) 二式, 可得北京及香港二城市在 2003 年 SARS 病毒确诊感染累计病例人数近似计算的趋势性曲线如图 7 所示。

在取 SIR 模型方程组 (18) 式中 λ 、 μ 为常量时的理想简单情况下, 由偏对称方程具体形式 (45)、(46) 二式及方程组 (18) 式的趋势性近似解 (40) 式, 可得北京及香港二城市在 2003 年 SARS 病毒感染病例数据的 $S(t)$ 、 $I(t)$ 及 $R(t)$ 方程趋势性曲线如图 8、图 9 所示。

其中, 图 7 中 $I(t)$ 的最大值 1520 与实际数据 (以累计住院数据 2000 作为参考值时)^[2]偏差较大。

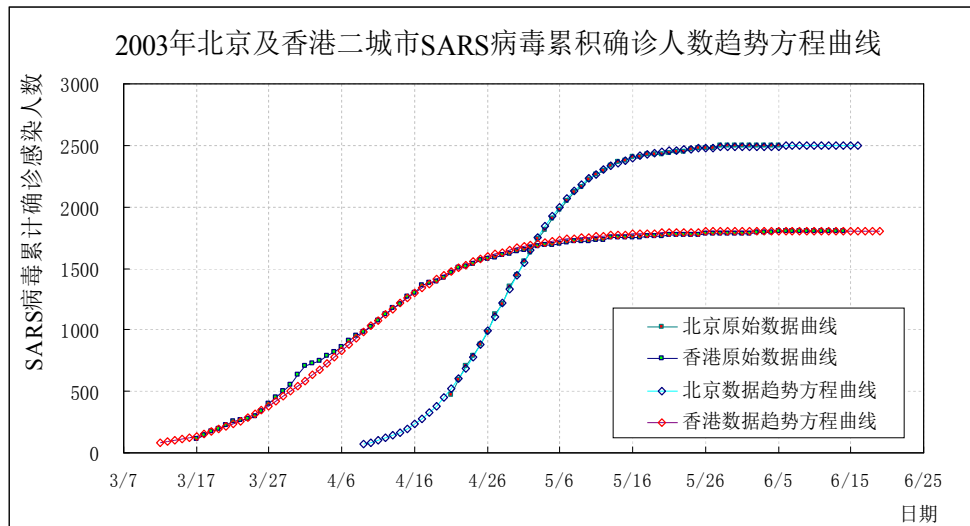


图 7 2003 年北京及香港二城市 SARS 病毒确诊感染累计病例数据的趋势方程曲线

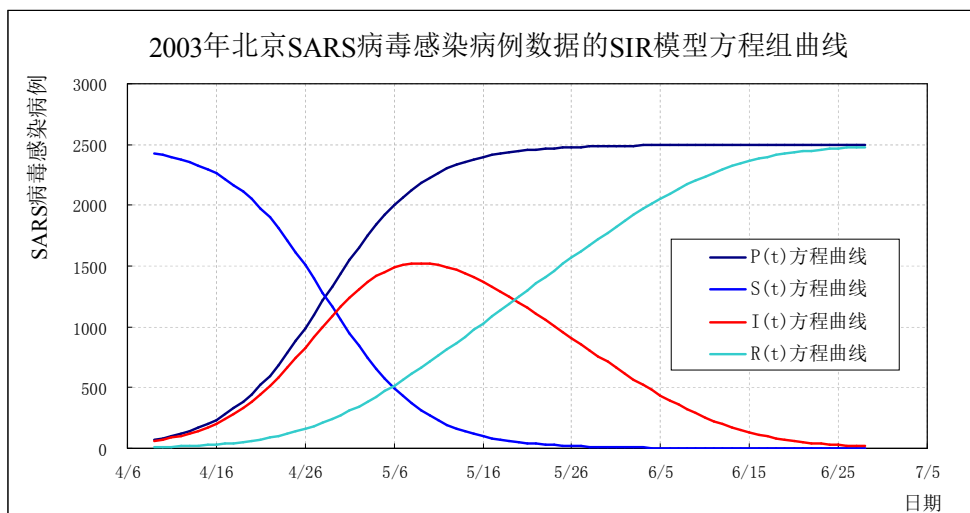


图 8 2003 年北京 SARS 病毒感染病例数据的 SIR 模型方程组趋势近似解曲线

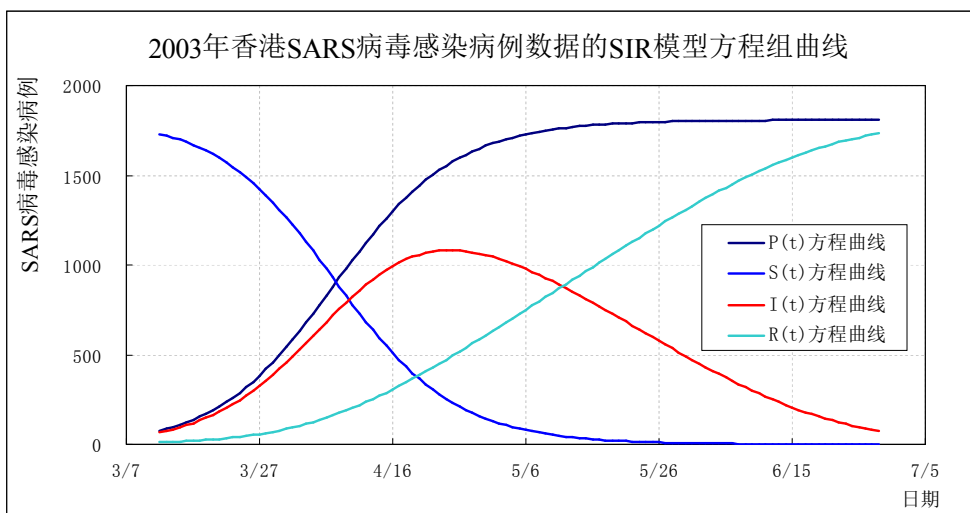


图 9 2003 年香港 SARS 病毒感染病例数据的 SIR 模型方程组趋势近似解曲线

4 全国新型冠状病毒感染累计病例数据的趋势预测方程（未含湖北省临床诊断数据）

基于在2020年1月11日~2月11日之间中国境内新型冠状病毒确诊感染病例人数数据资料^[3], 可得其累计感染确诊病例人数（累计报告确诊病例人数）曲线及每日新增确诊感染人数曲线如图10所示。

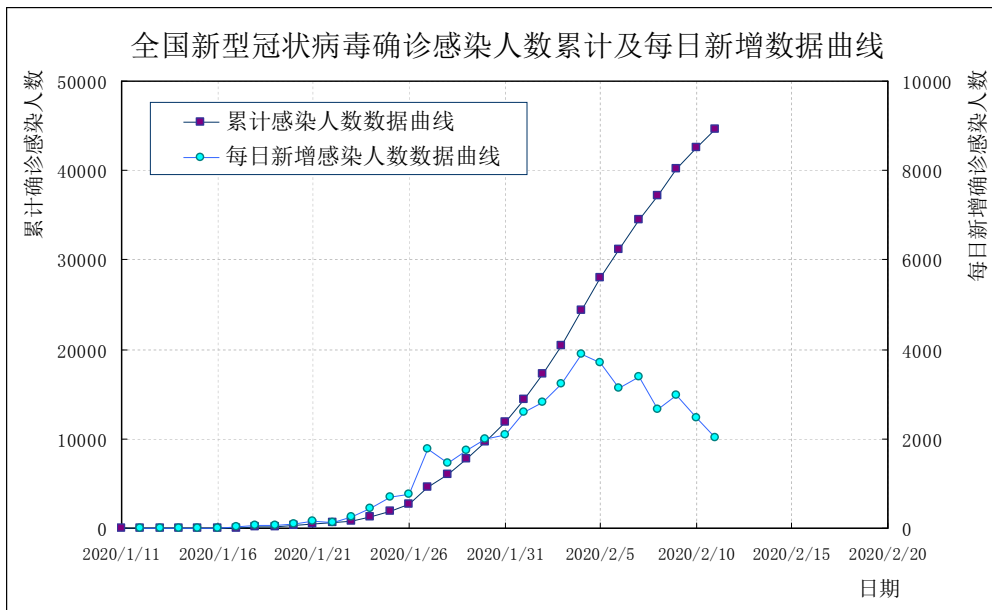


图10 新型冠状病毒确诊感染累计及每日新增人数数据曲线

从图10初步可见此次新型冠状病毒疫情累计感染病例人数数据曲线拐点出现在2020年2月3日~7日附近区域。

下面依据方程(2)、(7)、(11)式,及其每日新增数据计算方程(15)式、导数方程(4)式,给出中国境内在2020年1月11日~2月21日之间新型冠状病毒感染确诊累计病例数据的拟合方程具体形式及曲线特征,并做出相应的趋势预测探讨,为进一步的多因素、多变量非线性动力学方程分析研究提供参考。

其中,从2020年2月12日起,湖北省将临床诊断病例数据13332计入湖北省累计确诊病例数据,同时也开始计入全国累计确诊感染人数,数据中附有湖北省临床诊断病例数据单列说明;从2月16日起,湖北省新增确诊病例数据中仍包含临床诊断病例数据,但再未见临床诊断病例数据的单列说明^[3]。

基于中国境内在2020年1月11日~2月15日之间新型冠状病毒感染确诊累计病例数据,依据前偏对称或欠对称方程(2)式,简单地取 $\kappa = 0.6$,可给出病毒感染累计确诊病例人数 P 的趋势性拟合方程为

$$P_{FUS} = \frac{56028}{1 + 0.6 \exp[-0.22(t - 27.2)] + 0.4 \exp[-0.30(t - 27.2)]}, \quad (49)$$

式中 t 是以2020年1月10日为第1天的天数(即 $t = 1$),与原始数据对比计算起始日期为2020年1月11日(即 $t = 2$);向2020年1月10日之前进行延展运算时 t 可取相应的0值或负数值。

方程(49)式的拐点位置在2020年2月5日附近区域,病毒感染确诊累计病例数 P 的阶段性极限值(或饱和值) P_{max} 为

$$P_{max} = 56028. \quad (50)$$

方程(49)式可近似地化简为简略双曲正切函数(7)式形式

$$P = 28014 + 28014 \tanh[0.122(t - 27.2)]. \quad (51)$$

由方程(49)、(15)式及(4)式,可给出中国境内新型冠状病毒确诊感染累计病例人数计算数据、每日新增确诊感染人数计算数据及导数方程计算数据的趋势性曲线如图11、12所示;此计算中未包括湖北省临床诊断病例数据。

因从2020年2月16日起,湖北省新增确诊病例数据中再未见其所包含的该省临床诊断病例单列数据说明,故此预测方程(49)式与原始数据的对比区间取为2020年1月11日~2月15日。

由方程 (49) 式, 可得到达 90% P_{\max} 、95% P_{\max} 、99% P_{\max} 值的日期分别为 2020 年 2 月 15 日、2 月 18 日、2 月 25 日。

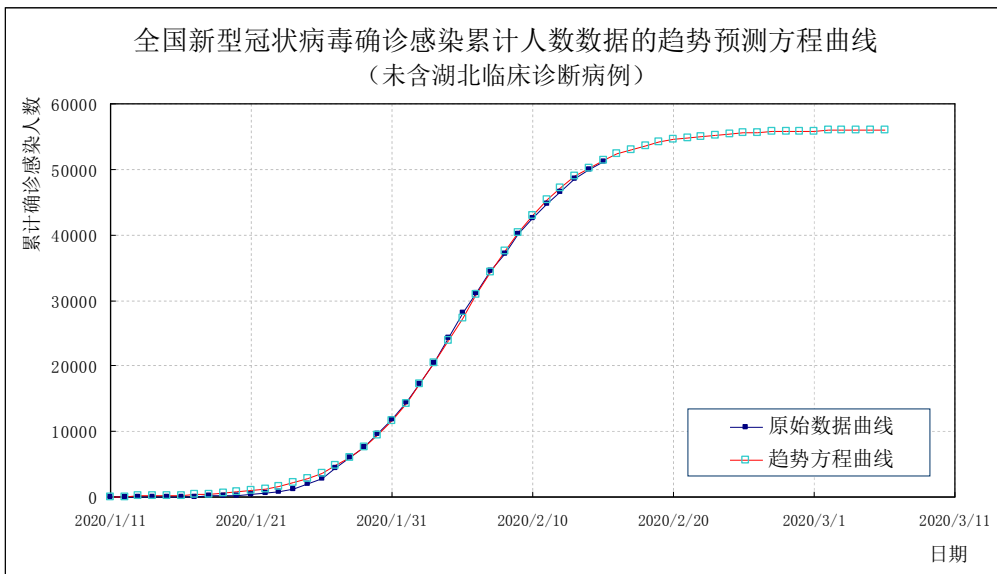


图 11 全国新型冠状病毒确诊感染累计人数数据的趋势预测方程曲线 (未含湖北临床诊断病例)

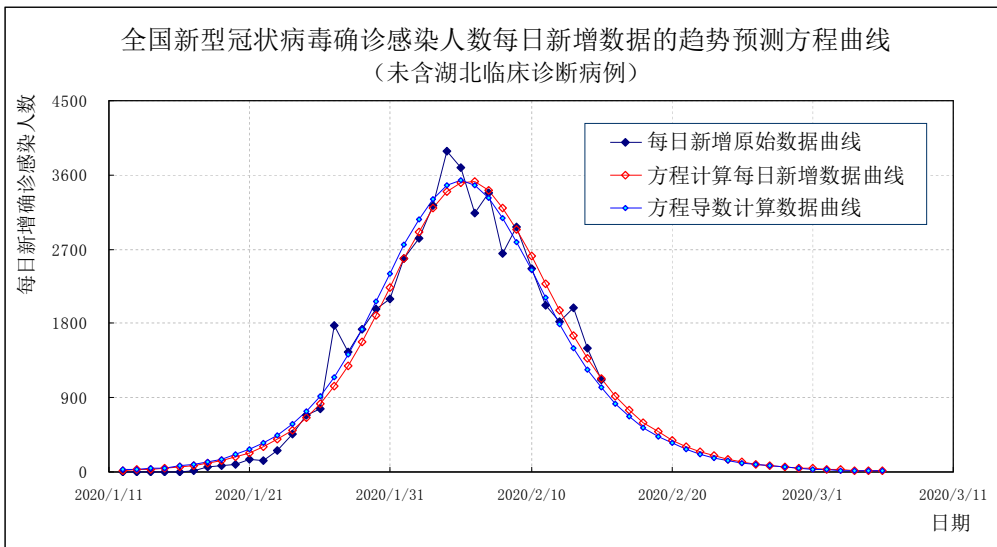


图 12 全国新型冠状病毒每日新增确诊感染人数的趋势预测方程曲线 (未含湖北临床诊断病例)

5 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒感染累计病例数据的趋势预测方程

对中国境内除湖北省以外地区在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间的新型冠状病毒感染确诊累计病例人数数据特征予以分析, 依据前偏对称或欠对称方程 (2) 式, 简单地取 $\kappa = 0.8$, 得其一具体的趋势性预测方程为

$$P_{\text{FUS}} = \frac{12914}{1 + 0.8 \exp[-0.219(t - 24.6)] + 0.2 \exp[-0.419(t - 24.6)]}, \quad (52)$$

式中 t 同方程 (49) 式。

方程 (52) 式的曲线拐点在 2020 年 2 月 2 日~3 日之间, 预测计算的累计感染确诊病例阶段性极限值 (或饱和值) P_{\max} 为

$$P_{\max} = 12914. \quad (53)$$

方程 (52) 式可近似简化为经典的双曲正切函数方程 (7) 式形式

$$P = 6457 + 6457 \tanh[0.120(t - 24.6)]. \quad (54)$$

由方程 (52) 式、(15) 式及 (4) 式, 可给出中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染累计人数计算数据、每日新增确诊感染人数计算数据及导数方程计算数据的趋势性曲线如图 13、14 所示。

由方程 (52) 式计算, 可得到达 $90\% P_{\max}$ 、 $95\% P_{\max}$ 、 $99\% P_{\max}$ 值的日期分别为 2020 年 2 月 12 日、2 月 15 日、2 月 22 日。

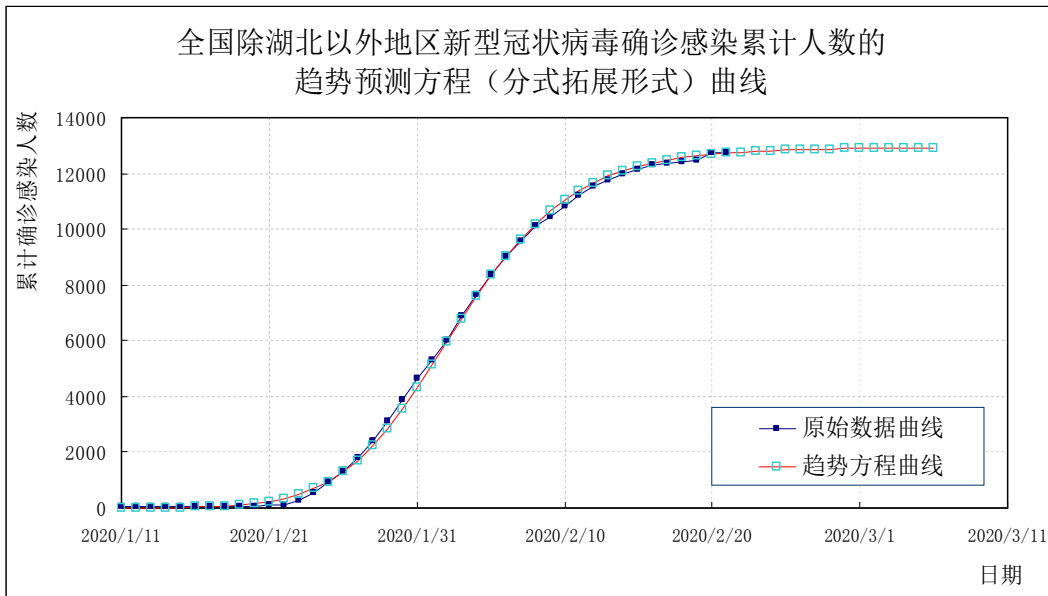


图 13 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染累计数据的趋势预测方程(分式拓展形式)曲线

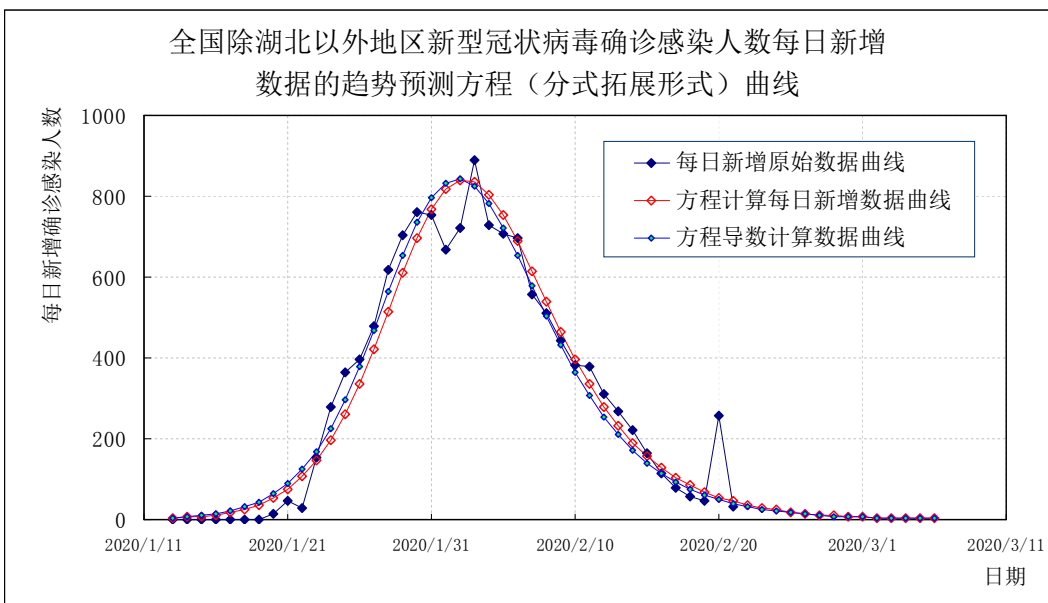


图 14 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒每日新增确诊感染人数的预测方程(分式拓展形式)曲线

依据级数方程 (11) 式的形式, 对于图 13、14 所示的原始数据曲线偏对称或欠对称特征, 简单地取 $\gamma = 0.4$, 则得中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染累计病例人数 P 的一具体形式近似为

$$P_{\text{SER}} = 6457[1 + 0.4 \tanh[0.21(t - 21.2)] + 0.6 \tanh[0.122(t - 27.5)]] \quad (55)$$

方程 (55) 式中 t 同方程 (49) 式。

方程 (55) 式预测计算的新型冠状病毒累计感染确诊病例人数阶段性极限值 (或饱和值) P_{\max} 仍为

$$P_{\max} = 2P_0 = 12914。$$

方程 (55) 式中包含的二个阶段性拐点日期分别为 2020 年 1 月 30 日~31 日、2 月 5 日~6 日。

由方程 (55) 式、(15) 式及 (14) 式, 可给出中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染累计人数计算数据、每日新增确诊感染人数计算数据及导数方程计算数据的趋势性曲线如图 15、16 所示。

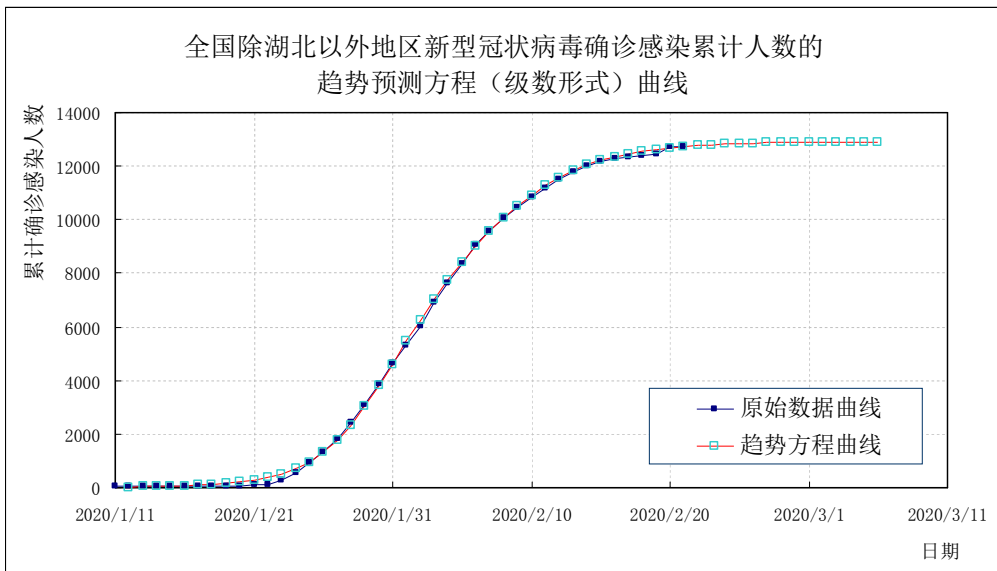


图 15 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒确诊感染累计人数数据的趋势预测方程(级数形式)曲线

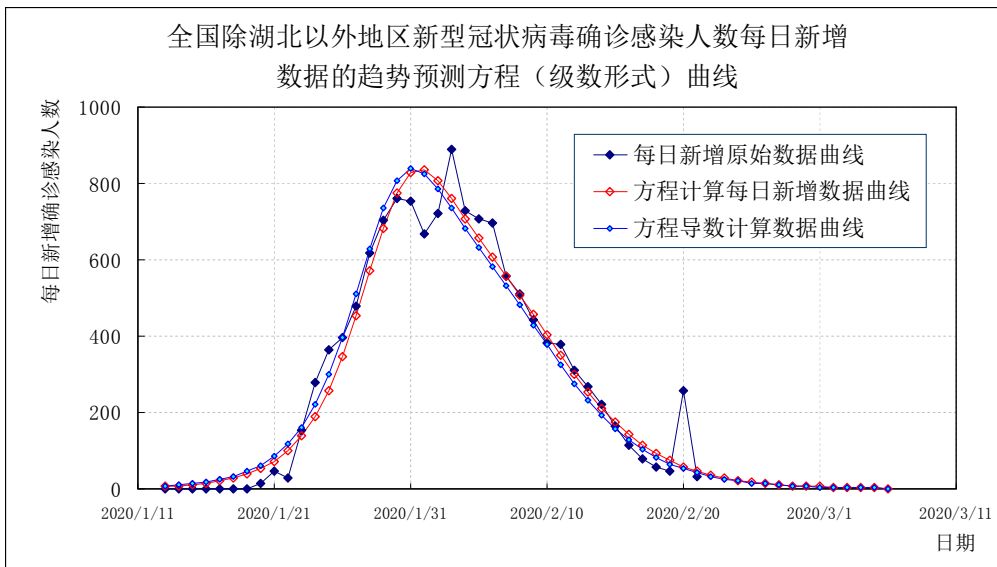


图 16 全国除湖北省以外地区新型冠状病毒每日新增确诊感染人数的趋势预测方程(级数形式)曲线

6 全国新型冠状病毒感染累计病例数据的预测方程(包含湖北省临床诊断数据前推)

对中国境内在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间的新型冠状病毒感染确诊累计数据特征予以分析,在包含湖北省从 2 月 12 日起将每日临床诊断病例数据加进累计确诊感染数据中的情况下,由前偏对称方程(2)式,简单地取 $\kappa = 0.7$, 得病毒感染确诊累计病例数 P 的趋势预测方程

$$P_{FUS} = \frac{81006}{1 + 0.7 \exp[-0.192(t - 28.7)] + 0.3 \exp[-0.236(t - 28.7)]}, \quad (56)$$

式中 t 同方程(49)式。

方程曲线拐点日期在 2020 年 2 月 6 日~7 日之间,预测计算的病毒感染确诊累计病例阶段性极限值(或饱和值) P_{max} 为

$$P_{max} = 2P_0 = 81006. \quad (57)$$

方程(56)式可近似简化为经典的双曲正切函数方程(7)式的具体形式

$$P = 40503 + 40503 \tanh[0.10(t - 28.7)]. \quad (58)$$

依据方程(56)式、(15)式及(4)式,可给出中国境内新型冠状病毒确诊感染累计人数计算数据、每日新增确诊感染人数计算数据及导数方程计算数据的趋势性曲线如图 17、18 所示;图中包含对 2020 年 1 月 11 日~2 月 11 日湖北省临床诊断病例数据的推算。

由于在 2020 年 2 月 12 日起湖北省将临床诊断病例数据计入湖北省累计确诊病例数据,使得全国累计确诊病例数据在 2020 年 2 月 12 日有较大阶跃,所以较为精细的描述刻画还有待获得稍多的湖北省新型冠状病毒感染临床诊断数据资料后,依据偏对称方程及级数方程等予以深入分析讨论。

由方程 (56) 式计算,可得到达 $90\% P_{\max}$ 、 $95\% P_{\max}$ 、 $99\% P_{\max}$ 值的日期分别为 2020 年 2 月 18 日、2 月 22 日、3 月 1 日。

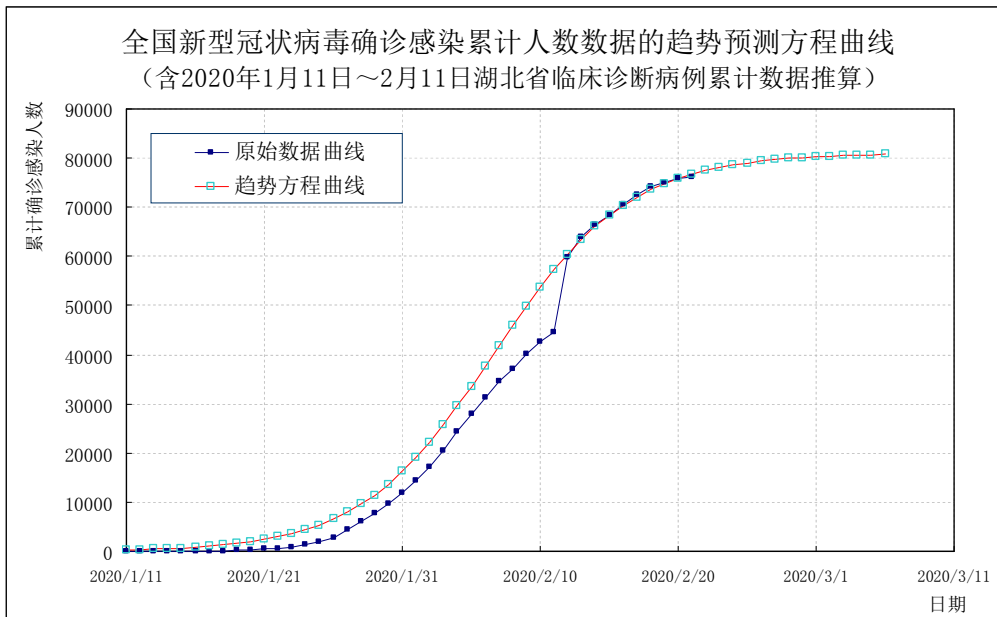


图 17 全国新型冠状病毒确诊感染累计人数数据的趋势预测方程曲线

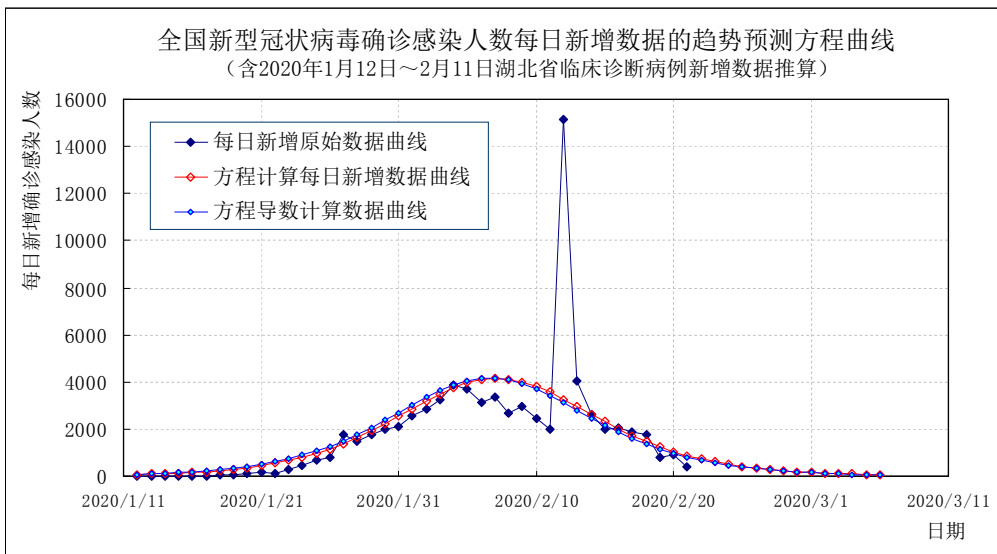


图 18 全国新型冠状病毒每日新增确诊感染人数的趋势预测方程曲线

事物总是在动态平衡中演化,因果循环递进。反思并总结 2003 年 SARS 病毒和这次新型冠状病毒疫情发展过程,从国家安全角度考虑,当警钟长鸣、忧患长思、知难奋起、智慧悲悯。国家宜适时立法严禁交易及食用野生动物,提倡科学的膳食结构及健康的生活方式,明确部分政府机构责任主导与社会服务相结合的功能,提升疾病预防控制中心的行政地位,充分尊重并重视采纳临床医生和一线科研人员的意见和主张,加强病毒基因库建设,适度开展多种病毒基因序列嵌替编辑组合后衍生功能及其进化趋势的前导性探索研究,同步提高对出入境人员、动物及物品的病毒检测检疫及防控应对技术水平,将病毒防御及公共卫生建设切实放到国家安全战略层面,在继续注重并联合推进分析医学的同时继承发扬整体医学的优点,深入挖掘传统中医药宝库,持续地加大支持相关疫苗探索及临床试验工作,密切关注病毒与抗体协同进化形成动态平衡复合性特征的临界患者人群,探索疫情产生的季节性及周期性规律,及时研究并建立预案以从容应对由于疫情传播所带来的国家之间负面连带效应,宣传并树立面向国家建设发展主战场需要的人生志向,切实提高科研教育一线人员的地位及待遇,锻炼出一支能够打硬仗、打胜仗的队伍,在特定的战略及战术方面保障国家有序稳步地按预置计划向前发展。

7 讨论

本短文基于对 2003 年北京及香港二城市 SARS 病毒感染数据的趋势分析及中国境内新型冠状病毒肺炎确诊感染人数数据在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间的公布资料, 采用一般饱和过程的分析方法, 并依据偏对称方程初步给出了 SIR 模型方程组的趋势性近似解析解, 随后给出了中国境内及中国境内除湖北省以外地区新型冠状病毒肺炎感染累计病例数据的偏对称方程具体形式及其曲线特征, 同时给出了拐点位置与阶段性极限值, 以便进行后续的数据验算与调整方程参数给出更为完整准确的趋势预测。

病毒感染疫情发展过程有诸多相互作用的因素参与其中, 诸如政府机构根据疫情发展状况所采取的不断调整的救治及防控措施、病毒源头和中间宿主确认、疫情期间病毒的变异演化状况和相关医学数据信息共享开放程度、各类人员的交互流动、季节气候变化, 以及感染病例基础数据统计中所采用方法的差异、标准版本的更替、数据来源覆盖层面和即时细致程度等, 导致疫情发展过程具有很大的波动性及不确定性。是故, 至为简洁的理想方程形式, 仅能简略给出疫情发展过程一个面向或投影的阶段性主线趋势, 可以初步视其为多变量联立方程组的一个趋势性近似解; 预测的过程, 亦是诸具体理想方程在实际各相应演化阶段逐步失效的过程; 待较为完整的基础数据出现后, 采用更具一般性的饱和过程分析方法予以讨论, 为对疫情发展过程的进一步精细分析及多变量非线性动力学方程探索研究提供参考。

参考资料:

- 1 龚建华, 孙战利, 李小文, 等. SARS 疫情控制的模拟分析[J]. 遥感学报, 2003, 7(4): 260-265.
GONG J, SUN Z, LI X, et al. Simulation and analysis of control of severe acute respiratory syndrome[J]. Journal of Remote Sensing, 2003, 7(4): 260-265.
- 2 韩卫国, 王劲峰, 刘旭华. SARS 传播时间过程的参数反演和趋势预测[J]. 地球科学进展, 2004, 19(6): 925-930.
HAN W, WANG J, LIU X. Back analyzing parameters and predicting trend of SARS transmission[J]. Advances in Earth Science, 2004, 19(6): 925-930.
- 3 中国境内新型冠状病毒肺炎确诊感染人数原始数据来源于国家有关部委及新闻媒体等机构公布的在 2020 年 1 月 11 日~2 月 21 日之间的疫情数据资料。
- 4 阎坤. 数据曲线间断区域的自适应连接方程研究[J]. 地球物理学进展, 2011, 26(1): 162~171.
YAN Kun. Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve[J]. Progress in Geophys(in Chinese with abstract in English), 2011, 26(1): 162~171.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/curveandequation-pdf.pdf>
- 5 阎坤. 关于连接方程的简略注释[研究报告]. 西安: 西安现代非线性科学应用研究所, 2011-03-18.
YAN Kun. Brief annotation of the connection equation[Research report]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 18 March 2011.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/ConnectionEquation-pdf.pdf>

计算附录

全国新型冠状病毒肺炎确诊感染累计病例人数趋势预测方程 (56) 式计算表(含湖北省临床诊断数据推算) 2020 年 1 月 24 日~3 月 23 日

日期	1-24	1-25	1-26	1-27	1-28	1-29	1-30	1-31	2-01	2-02
计算值	4421	5391	6552	7934	9567	11477	13691	16227	19092	22282
日期	2-03	2-04	2-05	2-06	2-07	2-08	2-09	2-10	2-11	2-12
计算值	25776	29533	33498	37597	41749	45867	49867	53676	57235	60502
日期	2-13	2-14	2-15	2-16	2-17	2-18	2-19	2-20	2-21	2-22
计算值	63452	66078	68386	70391	72116	73588	74836	75887	76767	77503
日期	2-23	2-24	2-25	2-26	2-27	2-28	2-29	3-01	3-02	3-03
计算值	78114	78622	79042	79389	79676	79912	80107	80267	80398	80507
日期	3-04	3-05	3-06	3-07	3-08	3-09	3-10	3-11	3-12	3-13
计算值	80596	80669	80729	80778	80819	80852	80879	80902	80920	80936
日期	3-14	3-15	3-16	3-17	3-18	3-19	3-20	3-21	3-22	3-23
计算值	80948	80958	80967	80974	80979	80984	80988	80991	80994	80996